

THE Q-MATRIX PROBLEM FOR MARKOV CHAINS

马尔可夫过程的 Q-矩阵问题

● 侯振挺等著

● 湖南科学技术出版社

The Q-matrix Problem for Markov Chains

马尔可夫过程的Q-矩阵问题

侯振挺　邹捷中　张汉君　刘再明
肖果能　陈安岳　费志凌著



湖南科学技术出版社

马尔可夫过程的 Q 矩阵问题

编写著者：侯振挺等
责任编辑：胡海清
出版发行：湖南科学技术出版社
(长沙市展览馆路 3 号)
印　　刷：湖南省新华印刷三厂
印装质量问题请直接与本厂联系
厂　　址：长沙市韶山路 158 号
邮政编码：410004
经　　销：湖南省新华书店
出版日期：1994 年 9 月第 1 版第 1 次
开　　本：850×1168 毫米　1/32
印　　张：18.5
插　　页：4
字　　数：488000
印　　数：1—1100
征订期号：地科 154—001
书　　号：ISBN 7-5357-1532-X/O·122
定　　价：22.50 元

湘新登字 004 号

谨以此书献给

已故 **G. E. H. Reuter** 教授和 **R. Davidson** 博士

序

可列马尔可夫过程(以下简称马尔可夫过程)构造理论是可列马尔可夫过程理论的重要部分。D. Williams 教授把构造理论的定性部分(存在性和唯一性)叫做 Q—矩阵问题。本书是我和我的同事们长期以来在 Q—矩阵问题方面研究成果的一个总结。最近,美国数学会出版的"当代数学丛书"118 卷《概率论及其应用在中国》的"Q—矩阵问题"一章就是本书的一个摘要。

粗略说来,"Q—矩阵问题"主要研究"对任一矩阵 Q,给出 Q 过程存在性和唯一性条件"。该问题于 1931 年由 Kolmogorov 提出,起初主要研究保守情形,由 Doob 和 Reuter 完成。进而,研究全稳定情形和全瞬时情形,前者由 Doob、Reuter 和侯振挺最终于 1974 年完成;后者由 D. Williams 于 1976 年完成。1974 年后,侯振挺把原来 Kolmogorov 所提出的问题和有关概念加以扩充,提出了所谓"定性理论",大大丰富了 Q—矩阵问题的研究内容,并得到了完整的结果。对于既有稳定态,又有瞬时态的一般情形,由于概率直观模糊,分析表达复杂,直到 70 年代末,这方面研究进展甚微。80 年代初,陈安岳同志得到有关禁止概率的一个分解定理,并立即意识到这个定理是研究一般情形下 Q—矩阵问题的一个有力工具。于是,陈安岳、邹捷中、张汉君、刘再明、费志凌等同志近十年来在这方面积极地开展了一系列的研究,使一般情形下的 Q—矩阵问题

有了突破性的进展。最近，我们把这些结果整理成书。就在这成书之即，我们又取得了一些可喜的结果，可望在不久的将来能最后完成 Q－矩阵问题的主要研究——Q 过程的存在性与唯一性。

本书由侯振挺主持编写。侯振挺为全书编定了篇章结构和内容，具体执笔者为邹捷中、张汉君、刘再明、肖果能等人。其中邹捷中撰写绪论及第一章、第二章、第十八章；刘再明撰写第三章至第十二章；张汉君撰写第十三章至第十五章；肖果能撰写第十六章、第十七章。全书最后由侯振挺审定。

由于作者才疏学浅，书中难免有这样那样的错误，敬请同志们批评指正。

在本课题的研究过程中，我们始终得到数学界前辈苏步青、陈省身、D. G. Kendall、K. L. Chung、N. Ikeda、王梓坤先生以及王寿仁、胡国定、梁之舜、严士健、钱敏、苗邦均等先生的关心和鼓励。严加安、胡迪鹤、陈木法、陈培德、吴荣、钱敏平、龚光鲁、戴永隆、郭青峰、杨向群、黄志远、汪嘉冈、何声武、吴让泉、张文修、黄之瑞、刘文、刘秀芳、郑伟安、马志明等同志对本书的酝酿和写作一直给予支持和帮助，高镇宁、陶敏、张寅南、欧阳庆等同志以及湖南科学技术出版社的同志们为本书的出版倾注了许多心血，长沙铁道学院科研所方小斌、胡达轩同志为本书的打印和排版做出了很大贡献。此外，国家自然科学基金委员会对 Q－矩阵问题的研究一直给予了资助，在此一并致谢。

侯振挺

1994 年 3 月 23 日

目 录



MATRIX PROBLEM

绪　论

马尔可夫过程是一类重要的随机过程，它的原始模型马尔可夫链，由俄国数学家A.A.马尔可夫于1907年提出。粗略说来，所谓马尔可夫性可以用下述直观语言来刻划：在已知系统目前的状态(现在)的条件下，它未来的演变(将来)不依赖于它以往的演变(过去)，换言之，在已知“现在”的条件下，“将来”与“过去”无关。具有这种特性的随机过程称为马尔可夫过程。荷花池中一只青蛙的跳跃是马尔可夫过程的一个形象化例子。青蛙按照它瞬间或起的念头从一片荷叶上跳跃到另一片荷叶上。如果青蛙是没有记忆的，人们自然可以假定，当已知青蛙在某时刻所处的位置时，它下一步跳往何处与它此前走过的路径无关。如果将荷叶编号(例如编号为自然数1,2,3,…)，并用X_0表示青蛙在初始时刻所处的荷叶的号码，用$X_1,X_2,\cdots$分别表示青蛙经过第一次，第二次，……跳跃后所处的荷叶的号码，那么，随机序列$\{X_n,n\geqslant 0\}$就是一个马尔可夫过程。其实，人们在实际中所遇到的许多过程如液体中固体微粒所作的布朗运动，原子核中一自由电子在轨道中的跃迁，人口增长过程等等都可视为马尔可夫过程。

上述青蛙跳跃的过程$\{X_n,n\geqslant 0\}$也可以记为$\{X_t,t\in T\}$，其中$T=\{0,1,2,\cdots\}$。我们形象地称T为时间参数集，而称$\{X_t,t\in T\}$的值域E为过程的状态空间。自然，马尔可夫过程的时间参数集和

状态空间不必囿于离散集，例如可取 $T=[0,\infty)$，$E=(-\infty,\infty)$。在本书中，我们将只研究时间参数集 $T=[0,\infty)$，状态空间为离散集（例如 $E=\{0,1,2,\cdots\}$）的马尔可夫过程。

有了以上的直观认识和说明，我们可以给出离散状态空间马尔可夫过程的严格数学定义。设随机过程 $X=\{X_t,t\geqslant 0\}$ 为一个离散状态空间马尔可夫过程，如果它具有马尔可夫性：

对任意 $n\geqslant 2$，任意 $0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_n$ 和任意使 $P(X_{t_1}=i_1,X_{t_2}=i_2,\cdots,X_{t_n}=i_n)>0$ 的 $i_1,i_2,\cdots,i_n\in E$，有

$$P(X_{t_n}=i_n\,|\,X_{t_1}=i_1,\cdots,X_{t_{n-1}}=i_{n-1})=P(X_{t_n}=i_n\,|\,X_{t_{n-1}}-i_{n-1}). \qquad (1)$$

上式直观解释是在已知“现在”$(X_{t_{n-1}}=i_{n-1})$的条件下，“将来”$(X_{t_n}=i_n)$与“过去”$(X_{t_1}=i_1,X_{t_2}=i_2,\cdots X_{t_{n-2}}=i_{n-2})$无关。

因此，如 $P(X_s=i)>0$，可定义

$$p_{ij}(s,t)=P(X_t=j\,|\,X_s=i),\qquad i,j\in E,s\leqslant t.$$

称 $p_{ij}(s,t)$ 为过程 X 于 s 时在 i 条件下，于 t 时转移至 j 的转移概率。一般说来，四元函数 $p_{ij}(s,t)$ 依赖于 i,j,s,t。如果对一切 i,j，$p_{ij}(s,t)$ 只依赖于差 $t-s$，也即

$$p_{ij}(s,t)=p_{ij}(0,t-s),\qquad s\leqslant t.$$

则称其对应的马尔可夫过程为齐次马尔可夫过程。 记 $p_{ij}(t)=p_{ij}(0,t)$，$t\geqslant 0$，则有

$$\begin{cases} p_{ij}(t)\geqslant 0; \\ \sum\limits_{j\in E}p_{ij}(t)\leqslant 1; \\ p_{ij}(t+s)=\sum\limits_{k\in E}p_{ik}(t)p_{kj}(s). \end{cases} \qquad (2)$$

由于$(p_{ij}(t))$完全刻划了齐次马尔可夫过程 X，因此，以后我们径称满足条件(2)的实函数族$(p_{ij}(t),i,j\in E,t\geqslant 0)$为一个马尔可夫过程。如果还有

$$\lim_{t\to 0}p_{ij}(t)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{如 } i=j; \\ 0, & \text{如 } i\neq j.\end{cases} \qquad (3)$$

则称 $(p_{ij}(t))$ 为一个标准马尔可夫过程。在本书中，我们以$(p_{ij}(t),i,j\in E,t\geqslant 0)$作为讨论的出发点和主要研究对象。

本书的目的是，从最基本的概念出发，逐步展开马尔可夫过程的 Q一 矩阵问题的讨论。对于标准马尔可夫过程，其转移概率 $p_{ij}(t)$ 具有较好的解析性质，例如

$$q_{ij} \triangleq p'_{ij}(0) = \lim_{t \to 0} p'_{ij}(t) \tag{4}$$

存在，且

$$\begin{cases} 0 < q_{ij} < \infty, \quad i \neq j; \\ \sum_{j \neq i} q_{ij} \leqslant -q_{ii} \triangleq q_i \leqslant \infty. \end{cases} \tag{5}$$

称矩阵 $Q=(q_{ij})$为标准马尔可夫过程$(p_{ij}(t))$的密度矩阵，习惯上也称为 Q一矩阵。因为在实际问题中，Q 往往比$(p_{ij}(t))$更容易得到。于是，所谓 Q一矩阵问题应运而生，即任给一个形如(5)的矩阵 $Q=(q_{ij})$，是否存在一个标准马尔可夫过程$(p_{ij}(t))$，使得 $p'_{ij}(0)=q_{ij}$。如果过程存在，是否唯一。我们把存在性和唯一性称为 Q一矩阵问题。自 1931 年始，半个多世纪来，不少著名的概率论学者，例如 Kolmogorov、Doob、Feller、K. L. Chung、Kendall 等人均在该问题上开展过工作，并作出了重要贡献。三十多年来，我国概率论工作者，如王梓坤、侯振挺、杨向群、陈木法等人也对这一领域进行了广泛深入的研究，取得了可喜的成就，并有若干专著出版。

关于 Q一矩阵问题，以往的专著大多限于全稳定情形，对于瞬时态情况的研究则大多散见于各种刊物中。本书的讨论范围不限于全稳定态情形。

关于马尔可夫过程理论特别是马尔可夫过程的构造理论的研究，历来有概率方法和分析方法。概率方法的直观形象明晰，概率意义比较清楚；分析方法则有表达简洁、明快的特点。两者各有优点与不足之处，均取得一定成果。就应用而言，也许物理学家、生物学家、化学家等专家更钟爱概率方法所表述的结果，而分析方法表述的结果更适用于将概率论与其他数学学科的成就联系起来或利用现代数学的成果。例如 Itô 建立的随机微分方程理论，Feller 在马尔可夫过程研究中引入的泛函分析半群方法，角谷静夫、Doob 等人发现的布朗运动与狄利克雷问题的联系，后来 Hunt 等人研究的

相当一般的马尔可夫过程与位势理论的关系以及新近十几年发展起来的 Malliavin 分析都是这方面的例证。本书着力于使用分析方法研究 Q—矩阵问题。

在运用分析方法研究 Q—矩阵问题方面，我们不能不提到最近辞世的著名英国学者 G. E. H. Reuter 教授，Reuter 教授倾毕生精力于 Q—矩阵问题的研究，建树良多，功不可没，对中国概率论工作者的工作一直给予热情的关注和支持，因此我们愿在本书出版之际表达对 Reutet 教授的怀念和敬意。

本书分五篇凡十八章，第一篇是预备性的，叙述了马尔可夫过程的一些基本概念、性质及本书中将用到的分析工具。所用到的主要分析工具是拉普拉斯变换（以下简称拉氏变换）。由于 $p_{ij}(t)$ 与其拉氏变换 $\varphi_{ij}(\lambda)$ 一一对应，故我们可以将对 $p_{ij}(t)$ 的研究转化为对更易于处理的拉氏变换的研究。在第一篇里，我们还专辟一章叙述 Q 过程的分解定理，它们在以后构造 Q 过程特别是含瞬时态的 Q 过程中具有重要作用。第二篇讨论 Q 过程的存在性。全稳定 Q 过程和全瞬时态 Q 过程的存在性准则分别由 Feller 和 Williams 得到。至于既含瞬时态又含稳定态的情况，尚无一般性的存在准则，但是，利用禁止概率分解定理，我们可以得到一些特殊情况下的存在性准则，例如陈安岳给出了有限个稳定态无限个瞬时态 Q 过程的存在性准则。第三篇讨论 Q 过程的唯一性。第四篇是关于 Q—矩阵问题的进一步讨论，如定性理论、极大 Q 过程、可逆 Q 过程等特殊专题。第五篇分三章讨论了与 Q—矩阵问题有关联的三个论题。

对本书材料的取舍我们是颇费踌躇的，既要保持本书材料的自封闭，让初学者读了这本书能尽快达到本专业的某个前沿，又要使专家们也能从本书获益，实在是超出了作者们的能力范围。好在目前国内外已出版有许多优秀的专著，例如 K. L. Chung[1]，D. Williams[5]，王梓坤[1,2]，侯振挺、郭青峰[1]，杨向群[1]，专家读者可从这些书中得到收益。因此，我们选择了从最基本的概念出发，循序渐进地展开，力图反映作者们在 Q—矩阵问题上的最新成果，其中也参考和引用了他人的成果，本书中提到的某些结果，肯

定不是最终的，有些结果的证明还有很多斧凿痕迹，大可以作出简化。但是，我们宁可让读者们从中看到作者当初的原始构思。

本书附的参考文献肯定是不完整的。但限于篇幅，我们只能选择直接与本书内容有关的部分。

第 Ⅰ 篇

预备知识

1 问题的提出

§1 马尔可夫过程

设 E 为可列集.

定义 1.1.1 一个马尔可夫过程(以下简称马氏过程或过程),是指具有下列性质的一族实值函数 $p_{ij}(t)$ $(i,j\in E,\ t\geqslant 0)$:

$$p_{ij}(t)\geqslant 0,\qquad (i,j\in E,\ t\geqslant 0);\tag{1.1.1}$$

$$\sum_{j\in E}p_{ij}(t)\leqslant 1,\qquad (i\in E,\ t\geqslant 0);\tag{1.1.2}$$

$$p_{ij}(s+t)=\sum_{k\in E}p_{ik}(s)p_{kj}(t),(i,j\in E,\ s,t\geqslant 0);\tag{1.1.3}$$

$$p_{ij}(0)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j;\\ 0, & i\neq j;\end{cases}\quad (i,j\in E).\tag{1.1.4}$$

记为$(p_{ij}(t);\ i,j\in E)$ 或$(p_{ij}(t))$,或用矩阵形式记为 $P(t)$.

若还有

$$\sum_{j\in E}p_{ij}(t)=1,\quad (i\in E,\ t\geqslant 0),\tag{1.1.5}$$

则称$(p_{ij}(t))$ 为诚实的(或不中断的) 马氏过程,否则称为非诚实的(或中断的).

条件(1.1.1) — (1.1.4) 也可用矩阵形式写为:

$$P(t)\geqslant \mathbf{0},\qquad (t\geqslant 0);\tag{1.1.1$'$}$$

$$P(t)\mathbf{1}\leqslant \mathbf{1},\qquad (t\geqslant 0);\tag{1.1.2$'$}$$

$$P(s+t)=P(s)P(t),\quad (s,t\geqslant 0);\tag{1.1.3$'$}$$

$$P(0)=\mathbf{I},\tag{1.1.4$'$}$$

其中 $\mathbf{I}$ 为单位矩阵$(\delta_{ij},i.\ j\in \mathbf{E})$,$\mathbf{1}$ 表每个分量均为 1 的列向量,$\mathbf{0}$ 表

每个分量均为 0 的矩阵.

条件(1.1.5) 也相应地可以写为

$$P(t)\mathbf{1}=\mathbf{1},\qquad (t\geqslant 0).\tag{1.1.5'}$$

注 1 在本书中记号$(p_{ij}(t))$或$P(t)$有两种意义,它或者表示一个马氏过程,或者表示函数$p_{ij}(t)$构成的矩阵$(p_{ij}(t))$,因含义甚明,不再一一述及.

注 2 条件(1.1.1),(1.1.2) 称为范条件,(1.1.3) 称为 K－C(Колмогоров － Chapman) 方程.

下面的定理说明,对于一个非诚实的马氏过程,总可以化为诚实的过程.

定理 1.1.1 设$P(t)=(p_{ij}(t);i,j\in E)$为一个马氏过程,任取$\Delta\notin E$,令$\hat{E}=E\cup\{\Delta\}$.

$$\hat{p}_{ij}(t)=\begin{cases}p_{ij}(t), & i,j\in E;\\ 1-\sum\limits_{k\in E}p_{ik}(t), & i\in E,j=\Delta;\\ 0, & i=\Delta,j\in E;\\ 1, & i=j=\Delta.\end{cases}\tag{1.1.6}$$

则$\hat{P}(t)=(\hat{p}_{ij}(t);i,j\in\hat{E})$是一个诚实的马氏过程.

证明 显然有

$$\hat{p}_{ij}(t)\geqslant 0,\quad (i,j\in\hat{E});\tag{1.1.7}$$

$$\sum_{j\in\hat{E}}\hat{p}_{ij}(t)=1,\quad (i\in\hat{E}).\tag{1.1.8}$$

注意到$\hat{p}_{\Delta j}(t)=0,(j\in E)$,得

$$\hat{p}_{\Delta j}(t+s)=0=\sum_{k\in\hat{E}}\hat{p}_{\Delta k}(t)\hat{p}_{kj}(s),\quad (j\in E).\tag{1.1.9}$$

注意

$$\hat{p}_{i\Delta}(t)=1-\sum_{k\in E}p_{ik}(t),\quad (i\in E),$$

得

$$\hat{p}_{i\Delta}(t+s)=1-\sum_{j\in E}p_{ij}(t+s)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k\in \hat{E}} \hat{p}_{ik}(t) - \sum_{j\in E}\sum_{k\in E} p_{ik}(t)p_{kj}(s) \\
&= \sum_{k\in E} p_{ik}(t) + \hat{p}_{i\Delta}(t) - \sum_{k\in E} p_{ik}(t)\sum_{j\in E} p_{kj}(s) \\
&= \sum_{k\in E} p_{ik}(t)\Big(1 - \sum_{j\in E} p_{kj}(s)\Big) + \hat{p}_{i\Delta}(t) \\
&= \sum_{k\in E} p_{ik}(t)\hat{p}_{k\Delta}(s) + \hat{p}_{i\Delta}(t)\hat{p}_{\Delta\Delta}(s) \\
&= \sum_{k\in \hat{E}} \hat{p}_{ik}(t)\hat{p}_{k\Delta}(s), \quad (i\in E). \qquad (1.1.10)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{p}_{ij}(t+s) &= p_{ij}(t+s) \\
&= \sum_{k\in E} p_{ik}(t)p_{kj}(s) \\
&= \sum_{k\in E} \hat{p}_{ik}(t)\hat{p}_{kj}(s) \\
&= \sum_{k\in \hat{E}} \hat{p}_{ik}(t)\hat{p}_{kj}(s), \quad (i,j\in E). \qquad (1.1.11)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{p}_{\Delta\Delta}(t+s) &= 1 \\
&= \hat{p}_{\Delta\Delta}(t)\hat{p}_{\Delta\Delta}(s) \\
&= \sum_{k\in E} \hat{p}_{\Delta k}(t)\hat{p}_{k\Delta}(s) + \hat{p}_{\Delta\Delta}(t)\hat{p}_{\Delta\Delta}(s) \\
&= \sum_{k\in \hat{E}} \hat{p}_{\Delta k}(t)\hat{p}_{k\Delta}(s). \qquad (1.1.12)
\end{aligned}
$$

又显然有

$$\hat{p}_{ij}(0) = \delta_{ij}, \qquad (i,j\in E); \qquad (1.1.13)$$

$$\hat{p}_{\Delta j}(0) = 0, \qquad (j\in E); \qquad (1.1.14)$$

$$\hat{p}_{\Delta\Delta}(0) = 1; \qquad (1.1.15)$$

$$\hat{p}_{i\Delta}(0) = 1 - \sum_{j\in E} p_{ij}(0) = 0. \qquad (1.1.16)$$

由(1.1.7)—(1.1.16)知 $\hat{P}(t)$ 是一个诚实的马氏过程.

定理 1.1.2 设 $P(t)=(p_{ij}(t);i,j\in E)$ 为一个诚实的马氏过程,对任意 $\lambda>0$,令

$$\bar{p}_{ij}(t) = e^{-\lambda t}p_{ij}(t). \qquad (1.1.17)$$

则 $\bar{P}(t)=(\bar{p}_{ij}(t);i,j\in E)$ 为一个非诚实的马氏过程.

证明 显然有

$$\tilde{p}_{ij}(t) \geqslant 0; \tag{1.1.18}$$

$$\begin{aligned}\tilde{p}_{ij}(s+t) &= e^{-\lambda(s+t)} p_{ij}(s+t) \\ &= e^{-\lambda(s+t)} \sum_{k \in E} p_{ik}(s) p_{kj}(t) \\ &= \sum_{k \in E} (e^{-\lambda s} p_{ik}(s)) \cdot (e^{-\lambda t} p_{kj}(t)) \\ &= \sum_{k \in E} \tilde{p}_{ik}(s) \tilde{p}_{kj}(t);\end{aligned} \tag{1.1.19}$$

$$\tilde{p}_{ij}(0) = p_{ij}(0) = \delta_{ij}; \tag{1.1.20}$$

$$\begin{aligned}\sum_{j \in E} \tilde{p}_{ij}(t) &= \sum_{j \in E} e^{-\lambda t} p_{ij}(t) \\ &= e^{-\lambda t} \sum_{j \in E} p_{ij}(t) \\ &= e^{-\lambda t} < 1.\end{aligned} \tag{1.1.21}$$

由(1.1.18)—(1.1.21)知，$\tilde{P}(t)$ 为一个非诚实的马氏过程.

§2　可测马尔可夫过程

定义 1.2.1　设 $P(t) = (p_{ij}(t))$ 为一马氏过程，如果对任意 $i, j \in E$，$p_{ij}(t)$ 是 $t \in (0,\infty)$ 的 Lebesgue 可测函数，则称 $P(t)$ 为可测马尔可夫过程，简称为可测马氏过程或可测过程.

引理 1.2.1　设 $P(t) = (p_{ij}(t); i, j \in E)$ 为一马氏过程，$\hat{P}(t) = (\hat{p}_{ij}(t); i, j \in \hat{E} = E \cup \{\triangle\})$ 为定理 1.1.1 中定义的诚实过程，则 $P(t)$ 为可测过程当且仅当 $\hat{P}(t)$ 为可测过程.

证明　充分性显然. 往证必要性：

由 $\hat{p}_{ij}(t)$ 的定义，若对任意 $i, j \in E$，$p_{ij}(t)$ 是$(0,\infty)$上的 Lebesgue 可测函数，则对任意 $i, j \in \hat{E}$，$\hat{p}_{ij}(t)$ 也是$(0,\infty)$上的 Lebesgue 可测函数，从而 $\hat{P}(t)$ 为可测过程. 引理证毕.

下述定理刻划了可测过程.

定理 1.2.1　对任意的马氏过程 $(p_{ij}(t))$，下列断言等价：

(i) 对任意 $i,j\in E$, $\lim\limits_{t\to 0}p_{ij}(t)=u_{ij}$ 存在;

(ii) $(p_{ij}(t))$ 可测;

(iii) 对任意 $i,j\in E$, $p_{ij}(t)$ 在$(0,\infty)$内连续.

此时

$$u_{ij}=\lim_{t\to 0}p_{ij}(t),$$

满足

$$u_{ij}\geqslant 0,\qquad (i,j\in E);\tag{1.2.1}$$

$$\sum_{j\in E}u_{ij}\leqslant 1,\qquad (i\in E);\tag{1.2.2}$$

$$u_{ij}=\sum_{k\in E}u_{ik}u_{kj},\qquad (i,j\in E).\tag{1.2.3}$$

证明 (i)→(ii)

设 $u_{ij}=\lim\limits_{t\to 0}p_{ij}(t)$,则由控制收敛定理,

$$\lim_{h\to 0}p_{ij}(t+h)=\lim_{h\to 0}\sum_{k\in E}p_{ik}(t)p_{kj}(h)=\sum_{k\in E}p_{ik}(t)u_{kj},$$

从而 $p_{ij}(t)$ 在任意 $t\in(0,\infty)$ 上有右极限,由函数论知 $p_{ij}(t)$ 的不连续点至多可列个,从而 $p_{ij}(t)$ 为 Lebesgue 可测函数,故$(p_{ij}(t))$ 可测.

(ii) → (iii)

首先,对 $0<s<t$,

$$\begin{aligned}\sum_{j\in E}|p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)|&=\sum_{j\in E}\Big|\sum_{k\in E}[p_{ik}(s+h)-p_{ik}(s)]p_{kj}(t-s)\Big|\\&\leqslant\sum_{j\in E}\sum_{k\in E}|p_{ik}(s+h)-p_{ik}(s)|p_{kj}(t-s)\\&=\sum_{k\in E}|p_{ik}(s+h)-p_{ik}(s)|\sum_{j\in E}p_{kj}(t-s)\\&\leqslant\sum_{k\in E}|p_{ik}(s+h)-p_{ik}(s)|.\end{aligned}$$

由 $p_{ij}(t)$ 的可测性,可对上式积分.如 $t\geqslant a>0$,则

$$\sum_{j\in E}|p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)|\leqslant\sum_{k\in E}\frac{1}{a}\int_0^a|p_{ik}(s+h)-p_{ik}(s)|ds.$$

如 $0<h<a$,则上式右方级数被收敛级数

$$\sum_{k\in E}\frac{2}{a}\int_0^{2a}p_{ik}(s)\mathrm{d}s$$

所控制，从而可在求和号下对 h 取极限，但由熟知的定理知，对任意 k

$$\lim_{h\to 0}\int_0^{\infty}|p_{ik}(s+h)-p_{ik}(s)|ds=0.$$

故对任意固定的 $a>0$ 及 $t\in(a,\infty)$，

$$\lim_{h\to 0}\sum_{j\in E}|p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)|=0. \tag{1.2.4}$$

由(1.2.4)知任意 $p_{ij}(t)$ 在 $(0,\infty)$ 内连续.

(iii) → (i)

由引理 1.1.1，及(ii) → (iii) 和事实(iii) → (ii)，不妨假定 $(p_{ij}(t))$ 诚实. 设对任意 $i,j\in E$，$p_{ij}(t)$ 在 $(0,\infty)$ 内连续. 固定 $i,j\in E$，设 $\{t_n\}$，$\{t_n'\}$ 为收敛于 0 的正实数列，使

$$p_{ij}(t_n)\to u_{ij},\qquad p_{ij}(t_n')\to u_{ij}',\qquad (n\to\infty).$$

若 $(k,l)\neq(i,j)$，因 $\{p_{kl}(t_n)\}_{n\geqslant 1}$ 为有界数列，故存在收敛子列 $\{p_{kl}(t_n^{(1)})\}$，设

$$p_{kl}(t_n^{(1)})\to u_{kl},\qquad (n\to\infty),$$

如此继续下去，我们得到 $\{t_n\}$ 的一子序列，不妨仍记为 $\{t_n\}$，使对任意的 $i,j\in E$，

$$\lim_{n\to\infty}p_{ij}(t_n)=u_{ij};$$

类似地有

$$\lim_{n\to\infty}p_{ij}(t_n')=u_{ij}'.$$

由 Fatou 引理

$$1=\lim_{n\to\infty}\sum_{j\in E}p_{ij}(t_n)\geqslant\sum_{j\in E}u_{ij}. \tag{1.2.5}$$

又由 $p_{ij}(t)$ 的连续性及控制收敛定理

$$\begin{aligned}p_{ij}(t)&=\lim_{n\to\infty}p_{ij}(t+t_n)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k\in E}p_{ik}(t)p_{kj}(t_n)\\&=\sum_{k\in E}p_{ik}(t)u_{kj}.\end{aligned} \tag{1.2.6}$$

故有

$$1 = \sum_{j\in E} p_{ij}(t) = \sum_{k\in E} p_{ik}(t) \sum_{j\in E} u_{kj}. \qquad (1.2.7)$$

故对某 $k \in E$, $\sum_{j\in E} u_{kj} < 1$,则由(1.2.7)知对任意 $t > 0$,

$$p_{ik}(t) = 0.$$

从而

$$u_{ik} = 0, \qquad u'_{ik} = 0.$$

再由 Fatou 引理

$$\begin{aligned} p_{ij}(t) &= \lim_{n\to\infty} p_{ij}(t + t'_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in E} p_{ik}(t'_n) p_{kj}(t) \\ &\geqslant \sum_{k\in E} u'_{ik} p_{kj}(t). \end{aligned} \qquad (1.2.8)$$

令 t 沿 $t_n \to 0$,得

$$u_{ij} \geqslant \sum_{k\in E} u'_{ik} u_{kj}. \qquad (1.2.9)$$

在(1.2.6)中令 t 沿 $t'_n \to 0$,得

$$u'_{ij} \geqslant \sum_{k\in E} u'_{ik} u_{kj}. \qquad (1.2.10)$$

注意上面提到的结论:如 $\sum_{j\in E} u_{kj} < 1$,则 $u'_{ik} = 0$. 对(1.2.10)求和得

$$\begin{aligned} \sum_{j\in E} u'_{ij} &\geqslant \sum_{j\in E} \sum_{k\in E} u'_{ik} u_{kj} \\ &= \sum_{k\in E} u'_{ik} \sum_{j\in E} u_{kj} = \sum_{k\in E} u'_{ik}. \end{aligned} \qquad (1.2.11)$$

故有

$$u'_{ij} = \sum_{k\in E} u'_{ik} u_{kj}. \qquad (1.2.12)$$

比较(1.2.9)与(1.2.12),得

$$u_{ij} \geqslant u'_{ij}.$$

由对称性

$$u'_{ij} \geqslant u_{ij},$$

从而

$$u_{ij} = u'_{ij}.$$

这就证明了$\lim\limits_{t\to 0} p_{ij}(t) = u_{ij}$ 存在，因 $i,j \in E$ 是任意的，故(i) 成立.

最后，证明 (u_{ij}) 满足(1.2.1) — (1.2.3)，由(1.1.1) 和(1.1.2) 知(1.2.1) 和(1.2.2) 成立. 如 $P(t)$ 诚实，由(1.2.12) 知(1.2.3) 成立；如$(p_{ij}(t))$ 非诚实，设 $\hat{P}(t) = (\hat{p}_{ij}(t), i, j \in \hat{E})$ 为定理 1.1.1 中定义的诚实过程，则由引理 1.2.1，$\hat{P}(t)$ 也为可测过程，从而 $\hat{u}_{ij} = \lim\limits_{t\to 0}\hat{p}_{ij}(t)$ 满足(1.2.1) — (1.2.3) 且

$$\hat{u}_{ij} = u_{ij}, \qquad i, j \in E;$$

$$\hat{u}_{\Delta j} = 0, \qquad j \in E.$$

从而

$$u_{ij} = \hat{u}_{ij} = \sum_{k \in \hat{E}} \hat{u}_{ik}\hat{u}_{kj}$$

$$= \sum_{k \in E} \hat{u}_{ik}\hat{u}_{kj} + \hat{u}_{i\Delta}\hat{u}_{\Delta j} = \sum_{k \in E} u_{ik}u_{kj}, \quad (i, j \in E).$$

故对非诚实过程，亦有(1.2.1) — (1.2.3).

定理 1.2.2 设矩阵(u_{ij}) 满足条件

$$u_{ij} \geqslant 0; \tag{1.2.13}$$

$$\sum_{j \in E} u_{ij} \leqslant 1; \tag{1.2.14}$$

$$u_{ij} = \sum_{k \in E} u_{ik}u_{kj}. \tag{1.2.15}$$

则参数集 E 可分解为互不相交的子集 $F, I, J, \cdots$，使得

(i) 如 $j \in F$，

$$u_{ij} = 0; \tag{1.2.16}$$

(ii) 存在实数 $u_j (j \in E - F)$，具有性质

$$u_j > 0, \quad \sum_{j \in J} u_j = 1, \tag{1.2.17}$$

且

$$u_{ij} = \delta_{IJ} u_j, \quad 如\ i \in I, j \in J; \tag{1.2.18}$$

(iii) 记 C 为不含 F 的子集类，即 $C = \{I, J, \cdots\}$，则存在实数 $\{\rho_{iJ}, i \in F, J \in C\}$，使

$$\rho_{iJ} \geqslant 0, \quad \sum_{J \in C} \rho_{iJ} \leqslant 1, \tag{1.2.19}$$

且

$$u_{ij} = \rho_{iJ} u_j, \text{如 } i \in F, j \in J. \tag{1.2.20}$$

反之,任给 E 的一个不交分解 $E = F \cup I \cup J \cdots$,及分别满足(1.2.17)和(1.2.19)的实数组 $\{u_j, j \in E - F\}$ 和 $\{\rho_{iJ}; i \in F, J \in C\}$,则存在矩阵 (u_{ij}) 满足(1.2.13)、(1.2.14)、(1.2.15)、(1.2.16)、(1.2.18)和(1.2.20).

证明 令 $u_j = \sup\limits_{i \in E} u_{ij}$,由(1.2.13)－(1.2.15)得

$$\begin{aligned} u_{ij} &= \sum_{k \in E} u_{ik} u_{kj} \\ &= \sum_{k \neq j} u_{ik} u_{kj} + u_{ij} u_{jj} \\ &\leqslant \sum_{k \neq j} u_{ik} u_j + u_{ij} u_{jj} \\ &= \sum_{k \in E} u_{ik} u_j + u_{ij}(u_{jj} - u_j). \end{aligned}$$

从而

$$u_{ij}(1 + u_j - u_{jj}) \leqslant \sum_{k \in E} u_{ik} u_j \leqslant u_j.$$

对 i 取上确界得

$$u_j(1 + u_j - u_{jj}) \leqslant u_j. \tag{1.2.21}$$

如 $u_j = 0$,则 $u_{jj} = 0$;如 $u_j > 0$,由(1.2.21)得 $u_j \leqslant u_{jj}$,由 u_j 的定义知

$$u_j = u_{jj}. \tag{1.2.22}$$

故不论 $u_j > 0$ 或 $u_j = 0$,均有(1.2.22).于是

$$\begin{aligned} u_{jj} &= \sum_{k \in E} u_{jk} u_{kj} \\ &= \sum_{k \in E} u_{jk} u_{jj} + \sum_{k \in E} u_{jk}(u_{kj} - u_{jj}) \\ &\leqslant u_{jj} + u_{ji}(u_{ij} - u_{jj}), \end{aligned}$$

$$u_{ji}(u_{ij} - u_{jj}) \geqslant 0,$$

从而

$$u_{ij}=u_{jj}，如\ u_{ji}>0. \tag{1.2.23}$$

定义 $F=\{j\in E;u_{jj}=0\}$. 故 $j\in F$,则,$0\leqslant u_{ij}\leqslant u_{jj}=0$,故 $u_{ij}=0$,这就证明了(1.2.16).

由(1.2.13) — (1.2.15). 我们有

$$u_{ij}\geqslant u_{ik}u_{kj}.$$

因此

$$u_{ik}>0,u_{kj}>0\ 推出\ u_{ij}>0. \tag{1.2.24}$$

今在 $E-F$ 中定义关系"～",$i\sim j$ 当且仅当 $u_{ij}>0$. 下面验证"～"是等价关系.

由 $u_{jj}>0(j\notin F)$ 及 $u_{jj}=u_j$ 知 $j\sim j$,"～"是反射的;如 $i\sim j$,则 $u_{ij}>0$,由(1.2.23),$u_{ji}=u_{ii}>0$,从而 $j\sim i$,"～"是对称的;最后,由(1.2.24)知:如 $i\sim k$、$k\sim j$,则 $i\sim j$,"～"是推移的. 从而"～"确为一等价关系. 它将 $E-F$ 分解成不交子集 $I,J,\cdots$,使得 i,j 属于同一子集当且仅当 $u_{ij}>0$. 于是,如 $I\neq J$,则 $u_{ij}=0(i\in I,j\in J)$; 如 $I=J$,则 $u_{ji}>0$, 由(1.2.22)及(1.2.23)得 $u_{ij}=u_{jj}=u_j$,结合这两种情形得到 $u_{ij}=\delta_{IJ}u_j,i\in I,j\in J$,此即(1.2.18).

如 $i\in E-F$,则

$$0<u_{ii}=\sum_{k\in E}u_{ik}u_{ki}\leqslant(\sum_{k\in E}u_{ik})u_i\leqslant u_i=u_{ii},$$

故有

$$\sum_{k\in E}u_{ik}=1,\quad i\notin F; \tag{1.2.25}$$

$$1=\sum_{j\in E}u_{ij}=\sum_{j\in E}\delta_{IJ}u_j=\sum_{i\in I}u_i.$$

此即(1.2.17). 定义

$$\rho_{iJ}=\sum_{k\in J}u_{ik}, \tag{1.2.26}$$

则

$$\rho_{iJ}\geqslant 0,\quad \sum_{J\in C}\rho_{iJ}\leqslant 1.$$

又

$$u_{ij}=\sum_{k\in E}u_{ik}u_{kj}=\sum_{k\in J}u_{ik}u_{kj}$$

$$=(\sum_{k\in J}u_{ik})u_j=\rho_{iJ}u_j,\quad i\in F,j\in J.$$

此即(1.2.20).

反面的结论是平凡的.

定理 1.2.3 设$(p_{ij}(t))$为可测马氏过程,$u_{ij}=\lim_{t\to 0}p_{ij}(t)$,$E$按定理 1.2.2 的方式分解为

$$E=F\cup I\cup J\cdots,\tag{1.2.27}$$

则$P(t)=(p_{ij}(t))$可如下表达:

(i) $p_{ij}(t)=0$ 如 $j\in F$,$(t>0)$. (1.2.28)

(ii) 存在马氏过程$(\Pi_{IJ}(t))$, $I,J\in C$,满足

$$\lim_{t\to 0}\Pi_{IJ}(t)=\delta_{IJ},\tag{1.2.29}$$

使得$t>0$时

$$p_{ij}(t)=\Pi_{IJ}(t)u_j,\quad \text{如 } i\in I,j\in J,\tag{1.2.30}$$

其中$u_j=u_{jj}$.

(iii) 存在$(0,\infty)$上连续函数$\Pi_{iJ}(t)$, $i\in F,J\in C$,满足:

$$\Pi_{iJ}(t)\geqslant 0;\tag{1.2.31}$$

$$\sum_{J\in C}\Pi_{iJ}(t)\leqslant 1;\tag{1.2.32}$$

$$\sum_{K\in C}\Pi_{iK}(s)\Pi_{KJ}(t)=\Pi_{iJ}(s+t).\tag{1.2.33}$$

使

$$p_{ij}(t)=\Pi_{iJ}(t)u_j,\ \text{如 } i\in F,j\in J.\tag{1.2.34}$$

反之,设任给E的一个不交分解$E=F\cup I\cup J\cdots$,任给一满足(1.2.29)的马氏过程$(\Pi_{IJ}(t),I,J\in C)$,任给一族满足(1.2.31)—(1.2.33)的在$(0,\infty)$上连续函数$(\Pi_{iJ}(t), i\in F,J\in C)$及任一满足(1.2.17)的$u_j$, $j\in E-F$,则由(1.2.28)、(1.2.30)、(1.2.34)定义的$(p_{ij}(t))$(在$t=0$补定义$p_{ij}(0)=\delta_{ij}$)是可测马氏过程.

又若$(p_{ij}(t))$诚实,则$(\Pi_{IJ}(t))$亦诚实且(1.2.32)中等号成立.反之亦然.

证明 首先设$P(t)=(p_{ij}(t))$诚实.设$t_n\to 0$,则由控制收敛

定理

$$p_{ij}(t)=\lim_{n\to\infty}p_{ij}(t+t_n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k\in E}p_{ik}(t)p_{kj}(t_n)$$
$$=\sum_{k\in E}p_{ik}(t)u_{kj}. \tag{1.2.35}$$

如 $j\in F$,则由定理 1.2.2(i),$u_{kj}=0\quad(k\in E)$. 从而 $p_{ij}(t)=0$,(1.2.28) 成立.

设 $i\in I,j\in J$,则由(1.2.18) 及(1.2.35)

$$p_{ij}(t)=(\sum_{k\in J}p_{ik}(t))u_j. \tag{1.2.36}$$

故 $p_{ij}(t)u_j^{-1}$ 只依赖于 i 及 J. 另一方面,由 Fatou 引理

$$p_{ij}(t)=\lim_{n\to\infty}p_{ij}(t+t_n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k\in E}p_{ik}(t_n)p_{kj}(t)$$
$$\geqslant\sum_{k\in E}u_{ik}p_{kj}(t). \tag{1.2.37}$$

如对某 $j=j_0$,上式取严格不等式"$>$",则在(1.2.37) 中对 j 求和,得

$$1=\sum_{j\in E}p_{ij}(t)$$
$$>\sum_{j\in E}\sum_{k\in E}u_{ik}p_{kj}(t)$$
$$=\sum_{k\in E}u_{ik}\sum_{j\in E}p_{kj}(t)$$
$$=\sum_{k\in E}u_{ik}=1.$$

矛盾. 故(1.2.37) 取等式. 再由(1.2.18)

$$p_{ij}(t)=\sum_{k\in E}u_{ik}p_{kj}(t)=\sum_{k\in I}u_kp_{kj}(t).$$

这表明 $p_{ij}(t)u_j^{-1}$ 只依赖于 I 及 j,与上面的事实联合起来知 $p_{ij}(t)u_j^{-1}$ 只依赖于 I 及 J,从而可定义 $\Pi_{IJ}(t)=p_{ij}(t)u_j^{-1}$. (1.2.30) 显然成立. 在 $t=0$ 补定义 $\Pi_{IJ}(0)=\delta_{IJ}$.. 往证$(\Pi_{IJ}(t))$是满足(1.2.29) 的

马氏过程.

显然 $\Pi_{IJ}(t) \geqslant 0$. 设 $i \in I$,则由(1.2.17)

$$
\begin{aligned}
1 &= \sum_{j \in E} p_{ij}(t) = \sum_{j \in F} p_{ij}(t) \\
&= \sum_{j \in F} \Pi_{IJ}(t) u_j = \sum_{J \in C} \sum_{j \in J} \Pi_{IJ}(t) u_j \\
&= \sum_{J \in C} \Pi_{IJ}(t),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Pi_{IJ}(s+t) &= p_{ij}(s+t) u_j^{-1} = \sum_{k \in F} p_{ik}(s) p_{kj}(t) u_j^{-1} \\
&= \sum_{K \in C} \sum_{k \in K} \Pi_{IK}(s) u_k \Pi_{KJ}(t) \\
&= \sum_{K \in C} \Pi_{IK}(s) \Pi_{KJ}(t) \sum_{k \in K} u_k \\
&= \sum_{K \in C} \Pi_{IK}(s) \Pi_{KJ}(t).
\end{aligned}
$$

故$(\Pi_{IJ}(t))$为一马氏过程.

再由(1.2.18)

$$
\lim_{t \to 0} \Pi_{IJ}(t) = \lim_{t \to 0} p_{ij}(t) u_j^{-1} = u_{ij} u_j^{-1} = \delta_{IJ}.
$$

此即(1.2.29).

往证(iii). 注意(1.2.36)对任意 $i \in E$ 成立, 定义 $\Pi_{iJ}(t) = \sum_{k \in J} p_{ik}(t)$,如 $i \in F, J \in C$,则(1.2.36)化为(1.2.34),即

$$
p_{ij}(t) = \Pi_{iJ}(t) u_j, \quad 如\ i \in F, j \in J.
$$

显然

$$
\Pi_{iJ}(t) \geqslant 0,
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{J \in C} \Pi_{iJ}(t) &= \sum_{J \in C} \sum_{k \in J} p_{ik}(t) = \sum_{j \in F} p_{ij}(t) \\
&= \sum_{j \in E} p_{ij}(t) = 1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Pi_{iJ}(s+t) &= p_{ij}(s+t) u_j^{-1} = \sum_{k \in E} p_{ik}(s) p_{kj}(t) u_j^{-1} \\
&= \sum_{K \in C} \sum_{k \in K} \Pi_{iK}(s) u_k \Pi_{KJ}(t)
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{K\in C} \Pi_{iK}(s)\Pi_{KJ}(t) \sum_{k\in K} u_k$$

$$= \sum_{K\in C} \Pi_{iK}(s)\Pi_{KJ}(t).$$

得证(1.2.31)－(1.2.33). 由(1.2.34)及 $p_{ij}(t)$ 的连续性知 $\Pi_{iJ}(t)$ 在 $(0,\infty)$ 连续.

再假定 $P(t)$ 不必诚实. 设 E 已按定理 1.2.2 的方式分解为 $E = F \cup I \cup J \cdots$. 又设 $(\hat{p}_{ij}(t); i, j \in \hat{E} = E \cup \{\Delta\})$ 为定理 1.1.1 中定义的诚实过程, $\hat{E}$ 按定理 1.2.2 的方式分解为 $\hat{E} = \hat{F} \cup \hat{I} \cup \hat{J} \cdots$, 则由前一部分的证明, 存在 $(\hat{\Pi}_{IJ}(t)), \hat{I}, \hat{J} \in \hat{C}, (\Pi_{iJ}(t)), i \in \hat{F}, J \in \hat{C}$, 使满足(i)、(ii)、(iii) 且 $(\hat{\Pi}_{IJ}(t))$ 为诚实的马氏过程, (1.2.32) 换为 $\hat{\Pi}_{iJ}(t)$ 时等式成立, 记"$\Rightarrow$"为相应于过程 $\hat{P}(t)$ 的等价关系. 因对任意 $i, j \in E, u_{ij} = \hat{u}_{ij}, u_{\Delta j} = 0$, 故 $u_j = \hat{u}_j$; 从而 $i \in E - F$ 当且仅当 $i \in E - \hat{F}, i \sim j$ 当且仅当 $i \Rightarrow j$. 因 $\hat{P}_{\Delta\Delta}(t) \equiv 1 \neq 0$ 由(1.2.28)知 $\Delta \notin \hat{F}$, 故 $\hat{F} = F$. 对任一 $j \in \hat{J} (j \in E)$, 由于 $\hat{P}_{\Delta j}(t) = 0 (t > 0)$, 故 Δ 自成一类, 不妨仍记之为 Δ. 故 $\hat{E} = F \cup \Delta \cup I \cup J \cdots$, 从而如 $j \in F$, 则 $p_{ij}(t) = \hat{p}_{ij}(t) = 0$, (i) 成立.

由 $u_\Delta = 1$ 得, $\hat{\Pi}_{\Delta\Delta}(t) = 1$. 对 $J \in C = \{I, J, \cdots\}$, $\hat{\Pi}_{\Delta J}(t) = P_{\Delta j}(t) u_j^{-1} = 0 \quad (j \in J)$.

定义

$$\Pi_{IJ}(t) = \hat{\Pi}_{IJ}(t),\ I, J \in C,$$

$$\Pi_{iJ}(t) = \hat{\Pi}_{iJ}(t),\ i \in F, J \in C.$$

则(1.2.30), (1.2.34) 显然成立.

往证 $(\Pi_{IJ}(t), I、J \in C)$ 为马氏过程, 且满足(1.2.29)

显然

$$\Pi_{IJ}(t) \geqslant 0,$$

$$\sum_{J\in C} \Pi_{IJ}(t) = \sum_{J\in C} \hat{\Pi}_{IJ}(t) \leqslant \sum_{J\in C\cup\{\Delta\}} \hat{\Pi}_{IJ}(t) = 1,$$

$$\Pi_{IJ}(s+t) = \hat{\Pi}_{IJ}(s+t) = \sum_{K\in C\cup\{\Delta\}} \hat{\Pi}_{IK}(s)\hat{\Pi}_{KJ}(t)$$

$$= \sum_{K\in C} \hat{\Pi}_{IK}(s)\hat{\Pi}_{KJ}(t) + \hat{\Pi}_{I\Delta}(s)\hat{\Pi}_{\Delta J}(t)$$

$$= \sum_{K \in C} \Pi_{IK}(s) \Pi_{KJ}(t).$$

$$\lim_{t \to 0} \Pi_{IJ}(t) = \lim_{t \to 0} \hat{\Pi}_{IJ}(t) = \delta_{IJ}.$$

再证 $\Pi_{iJ}(t)$ 是满足(1.2.31) — (1.2.33) 的连续函数.

连续性是显然的. 又

$$\Pi_{iJ}(t) = \hat{\Pi}_{iJ}(t) \geqslant 0,$$

$$\sum_{J \in C} \Pi_{iJ}(t) = \sum_{J \in C} \hat{\Pi}_{iJ}(t)$$

$$\leqslant \sum_{J \in C} \hat{\Pi}_{iJ}(t) + \hat{\Pi}_{i\Delta}(t) = 1,$$

$$\Pi_{iJ}(s+t) = \hat{\Pi}_{iJ}(s+t)$$

$$= \sum_{K \in C \cup \{\Delta\}} \hat{\Pi}_{iK}(s) \hat{\Pi}_{KJ}(t)$$

$$= \sum_{K \in C} \hat{\Pi}_{iK}(s) \hat{\Pi}_{KJ}(t) + \hat{\Pi}_{i\Delta}(s) \hat{\Pi}_{\Delta J}(t)$$

$$= \sum_{K \in C} \Pi_{iK}(s) \Pi_{KJ}(t).$$

反面的结论是平凡的.

系 如$(p_{ij}(t))$可测,$i \notin F$,则级数 $\sum_{j \in E} p_{ij}(t)$ 在每个有限区间 $[0,T]$ 上关于 t 一致收敛.

证明 令 $\hat{P}(t) = (\hat{p}_{ij}(t), i, j \in \hat{E} = E \cup \{\Delta\})$ 为定理 1.1.1 中的诚实过程,定义

$$\bar{p}_{ij}(t) = \begin{cases} \hat{p}_{ij}(t), & t > 0; \\ u_{ij}, & t = 0; \end{cases} \qquad i, j \in \hat{E}.$$

则每个 $\bar{p}_{ij}(t)$ 是$[0,\infty)$中的连续函数,且 $\sum_{j \in E} \bar{p}_{ij}(t) = 1 - \bar{p}_{i\Delta}(t)$ 亦为 $[0,\infty)$ 上连续函数. 由 Dini 定理立得本系.

定理 1.2.4 如$(p_{ij}(t))$为可测马氏过程,则

(i) 如 $j \in F$,则 $p_{ij}(t) = 0 (t > 0, i \in E)$;

(ii) 如 $j \notin F$,则 $p_{jj}(t) > 0, t \geqslant 0$;

(iii) 如对某 $t_0 > 0, p_{ij}(t_0) > 0$,则对一切 $t \geqslant t_0, p_{ij}(t) > 0$.

证明 (i) 即(1.2.28).

(ii) 如 $j \in F$，则 $\lim\limits_{t\to 0} p_{jj}(t) = u_{jj} > 0$，故对固定的 $t > 0$，当 n 充分大时，$p_{jj}(\frac{t}{n}) > 0$，但由范条件及 $K-C$ 方程

$$p_{jj}(t) \geqslant [p_{jj}(\frac{t}{n})]^n > 0.$$

又 $p_{jj}(0) = 1$，故 $p_{jj}(t) > 0, (t \geqslant 0)$.

(iii) 如 $p_{ij}(t_0) > 0$，则由(i)，$j \in F$，再由(ii)，当 $t \geqslant t_0$ 时 $p_{jj}(t - t_0) > 0$，故当 $t \geqslant t_0$ 时，

$$p_{ij}(t) = \sum_{k\in E} p_{ik}(t_0) p_{kj}(t - t_0) \geqslant p_{ij}(t_0) p_{jj}(t - t_0) > 0.$$

下面的定理深化了上述结果.

定理 1.2.5 如 $(p_{ij}(t))$ 为可测马氏过程，则每一 $p_{ij}(t)$ 在 $(0, \infty)$ 上或恒为 0 或恒不为 0.

证明 不妨假定 $E = \{0,1,2,\cdots\}$，先设 $i \in F$，如说定理结论对某 $p_{il}(t)$ 不真，则由定理 1.2.4 知，存在 $t_0 > 0$ 使

$$p_{il}(t) = 0. \quad 如\ 0 < t \leqslant t_0,$$

$$p_{il}(2t_0) = c > 0.$$

由定理 1.2.3 的系，存在 N，使

$$\sum_{j>N} p_{ij}(t) < \frac{c}{4}, \quad 如\ 0 < t \leqslant 2t_0. \tag{1.2.38}$$

令 $s = \frac{t_0}{2N}$，定义

$$A_m = \{k; p_{ik}(ms) > 0\}, \quad m = 1,2,\cdots.$$

则由定理 1.2.4 知 $A_m \subset A_{m+1}$，令 $B_1 = A_1, B_m = A_m - A_{m-1} (m \geqslant 2)$，如 $k \notin A_m$，则

$$0 = p_{ik}(ms) = \sum_{j\in E} p_{ij}((m-1)s) p_{jk}(s) = \sum_{j\in A_{m-1}} p_{ij}((m-1)s) p_{jk}(s).$$

故有

$$p_{jk}(s) = 0 \quad 如\ j \in A_{m-1}, k \notin A_m. \tag{1.2.39}$$

今证 $B_m (1 \leqslant m \leqslant 2N)$ 非空且不交. 不交是显然的. 如有某 $m (1 \leqslant m \leqslant 2N)$，使 $B_m = \phi$，则 $A_m = A_{m-1}$，根据(1.2.39)得

$$p_{ik}((m+1)s)=\sum_{j\in A_m}p_{ij}(ms)p_{jk}(s)$$

$$=\sum_{j\in A_{m-1}}p_{ij}(ms)p_{jk}(s)=0,\text{如 } k\in A_m,$$

故 $A_{m+1}\subset A_m$，从而 $A_{m-1}=A_m$，如此重复下去得 $A_{m'}=A_m(m'\geqslant m)$. 这是不可能的，因为由假定 $l\notin A_{2N}$，但 $l\in A_{4N}$.

令 $1\leqslant m\leqslant 2N$，如 $k\notin A_m$ 则由 (1.2.39)，对 $n\geqslant 1$,

$$p_{ik}((n+1)s)=(\sum_{j\notin A_m}+\sum_{j\in B_m}+\sum_{j\in A_{m-1}})p_{ij}(ns)p_{jk}(s)$$

$$=(\sum_{j\notin A_m}+\sum_{j\in B_m})p_{ij}(ns)p_{jk}(s).$$

所以

$$\sum_{k\notin A_m}p_{ik}((n+1)s)=(\sum_{j\notin A_m}+\sum_{j\in B_m})p_{ij}(ns)\sum_{k\notin A_m}p_{jk}(s)$$

$$\leqslant\sum_{j\notin A_m}p_{ij}(ns)+\sum_{j\in B_m}p_{ij}(ns).$$

对 n 自 0 至 $4N-1$ 求和，得

$$\sum_{k\notin A_m}p_{ik}(4Ns)\leqslant\sum_{n=1}^{4N}\sum_{j\in B_m}p_{ij}(ns).$$

因 $l\notin A_{2N}$，l 更不属于 A_m，故上式左方的值至少为 $p_{il}(4Ns)=c$，于是

$$c\leqslant\sum_{n=1}^{4N}\sum_{j\in B_m}p_{ij}(ns),\quad 1\leqslant m\leqslant 2N.$$

因集 $B_1\cdots,B_{2N}$ 非空不交，故其中至少有 N 个集合与集合 $\{1,2,\cdots,N\}$ 不交，记此 N 个集合并为 B. 则

$$Nc\leqslant\sum_{n=1}^{4N}\sum_{j\in B}p_{ij}(ns).\qquad(1.2.40)$$

但另一方面有

$$\sum_{j\in B}p_{ij}(ns)\leqslant\sum_{j>N}p_{ij}(ns)<\frac{c}{4}.$$

此与 (1.2.40) 矛盾，于是定理对 $i\notin F$ 得证.

再设 i 任意，且对某 $t_1>0$，$p_{ij}(t_1)>0$，则由 $p_{ij}(t_1)=$

$\sum_{k\in E} p_{ik}(\frac{t_1}{2})p_{kj}(\frac{t_1}{2})$ 及定理 1.2.4(i) 知，存在 $k \in F$. 使 $p_{ik}(\frac{t_1}{2}) > 0$.

及 $p_{kj}(\frac{t_1}{2}) > 0$，由前面所证 $p_{kj}(\frac{t_1}{4}) > 0$，故

$$p_{ij}(\frac{3}{4}t_1) \geqslant p_{ik}(\frac{t_1}{2})p_{kj}(\frac{t_1}{4}) > 0.$$

重复上述过程，知对 $n = 1,2,\cdots,\quad p_{ij}((\frac{3}{4})^n t_1) > 0$，因 $(\frac{3}{4})^n \to 0$.

故由定理 1.2.4(iii) 知，$p_{ij}(t)$ 在 $(0,\infty)$ 上恒大于 0. 定理证毕.

系 如 $(p_{ij}(t))$ 为可测马氏过程，则 $\sum_{j\in E} p_{ij}(t)$ 或恒为 1 或恒小于 1.

以下给出一个不可测马氏过程的例子.

例 1.2.1 一个不可测马氏过程：

记 R^1 为实数全体，E 为有理数全体，首先证明存在一个定义于 $(0,\infty)$，取值于 E 的函数 f，使得 $f(s+t) = f(s) + f(t)$.

赋无理数集 $E^c \triangleq R^1 - E$ 以良序，记在此良序下的无理数集为 $\{\xi_\alpha\}$，设 ξ_1 为其首元. 对 R^1 的任意子集 S，定义

$$M(S) = \{\sum_{i=1}^{n} r_i x_i; r_i \in E, x_i \in S, n \text{ 为任意正整数}\}.$$

任取 $\xi_0 \in E, \xi_0 \neq 0$，用超限归纳法定义 $\{\xi_\alpha\}$ 的子集 S_0 如下：

对超限序数 $\alpha \geqslant 1$，$\xi_\alpha \in S_0$，当且仅当 $\xi_\alpha \notin M(\{\xi_\beta: 0 \leqslant \beta < \alpha\})$.

显然 $\xi_1 \in S_0$. 记 $G = M(S_0)$，今证任意实数 t 必可唯一地表为：

$$t = k + v, \quad (k \in E, v \in G). \tag{1.2.41}$$

当 $t \in E$ 时，(1.2.41) 显然成立；下面用超限归纳法证明对 $\xi \in \{\xi_\alpha\}$，(1.2.41) 成立.

当 $\alpha = 1$ 时，因 $\xi_1 \in S_0 \subset G$，$\xi_1 = 0 + \xi_1$，故(1.2.41) 成立；

设对 $1 \leqslant \beta < \alpha$ 时，(1.2.41) 成立，即 $\xi_\beta = k_\beta + v_\beta(k_\beta \in E, v_\beta \in G)$. 往证对 ξ_α，(1.2.41) 成立. 分两种情形：

(i) $\xi_\alpha \notin M(\{\xi_\beta: 0 \leqslant \beta < \alpha\})$，由定义 $\xi_\alpha \in S_0 \subset G$，故(1.2.41) 成立；

(ii) $\xi_\alpha \in M(\{\xi_\beta: 0 \leqslant \beta < \alpha\})$,此时 $\xi_\alpha = \sum_{i=1}^{n} r_i \xi_{\beta_i}$,其中 $r_i \in E, 0 \leqslant \beta_i < \alpha \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$,由归纳假设 $\xi_\alpha = \sum_{i=1}^{n} r_i (k_{\beta_i} + v_{\beta_i})$

$= \sum_{i=1}^{n} r_i k_{\beta_i} + \sum_{i=1}^{n} r_{\beta_i} = k + v$,其中 $k = \sum_{i=1}^{n} r_i k_{\beta_i}, v = \sum_{i=1}^{n} r_i v_{\beta_i} \in G$. 故由超限归纳法原理知对任意 $\xi \in \{\xi_\alpha\}$,(1.2.41) 成立.

往证唯一性:若 $t = k_1 + v_1 = k_2 + v_2$ 其中 $k_1, k_2 \in E, v_1, v_2 \in G, v_1 \neq v_2$,则 $k_1 - k_2 = v_2 - v_1$.

设 $v_2 - v_1 = \sum_{i=1}^{l} r_i \xi_{\alpha_i}$ 其中 $r_i \in E, r_i \neq 0, \xi_{\alpha_i} \in S_0, (1 \leqslant i \leqslant l), 1 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 \cdots < \alpha_l$,则

$$\xi_{\alpha_l} = \frac{1}{r_l}(k_1 - k_2) - \sum_{i=1}^{l-1} \frac{r_i}{r_l} \xi_{\alpha_i}.$$

从而 $\xi_{\alpha_l} \in M(\{\xi_\beta: 0 \leqslant \beta < \alpha_l\})$,因此,$\xi_{\alpha_l} \notin S_0$,这与 $\xi_{\alpha_l} \in S_0$ 矛盾. 唯一性得证.

对每个 $t \in (0, \infty)$,设

$$t = k_t + v_t.$$

其中 $k_t \in E, v_t \in G$. 定义

$$f(t) = k_t.$$

则 f 是从 $(0, \infty)$ 至 E 的一个映射. 而且如 $s \in (0, \infty)$ 有表达式 $s = k_s + v_s$,则

$$s + t = (k_s + k_t) + (v_s + v_t),$$

其中 $k_s + k_t \in E, v_s + v_t \in G$. 故

$$f(s + t) = k_s + k_t = f(s) + f(t).$$

现在,我们定义 $p_{ij}(t), (i, j \in E, t \geqslant 0)$ 如下:

$$p_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & \text{如 } f(t) = j - i \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (t > 0);$$

$$p_{ij}(0) = \delta_{ij}$$

我们有

$$p_{ij}(t) \geqslant 0, \quad (t \geqslant 0);$$

由实数 t 表式的唯一性，对每个 $t \in R^1$ 和 $i \in E$，存在唯一的 $j \in E$ 使 $j = i + f(t)$，故

$$\sum_{j \in E} p_{ij}(t) = 1;$$

又若存在 $k \in E$，使 $f(s) = k - i$ 且 $f(t) = j - k$，则

$$f(s + t) = f(s) + f(t) = (k - i) + (j - k) = j - i.$$

故

$$p_{ij}(s + t) = 1 = 1 \times 1 = p_{ik}(s) p_{kj}(t) = \sum_{l \in E} p_{il}(s) p_{lj}(t).$$

因此，$(p_{ij}(t))$ 是一个马氏过程，但每一 $p_{ij}(t)$ 在 $(0,\infty)$ 上不连续，由定理 1.2.1 知，它不是可测马氏过程.

§3 标准马尔可夫过程

将可测马氏过程定义中的条件加强，就得到所谓标准马尔可夫过程.

定义 1.3.1 一个马尔可夫过程 $P(t) = (p_{ij}(t))$，如果满足条件

$$\lim_{t \to 0} p_{ij}(t) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如 } i = j; \\ 0, & \text{如 } i \neq j. \end{cases} \tag{1.3.1}$$

则称之为标准马尔可夫过程，简称为标准马氏过程. 条件(1.3.1)称为标准性条件.

此后，除非另有声明，本书中讨论的过程均指标准马氏过程.

以下再给出马氏过程的几个例子.

例 1.3.1 标准马氏过程：

取 $E = \{0,1,2\cdots\cdots\}$，$\mu \geqslant \lambda > 0$. 令

$$p_{ij}(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\mu t}(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}, & \text{如 } j \geqslant i, \\ 0, & \text{如 } j < i, \end{cases} \quad (t > 0);$$

$$p_{ij}(0) = \delta_{ij}.$$

则 $(p_{ij}(t))$ 是标准马氏过程；而且 $\mu = \lambda$ 时 $(p_{ij}(t))$ 是诚实的，$\mu > \lambda$

时$(p_{ij}(t))$是非诚实的. 事实上,

$$p_{ij}(t) \geqslant 0, (i, j \in E);$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(t) &= \sum_{j=i}^{\infty} p_{ij}(t) \\
&= \sum_{j=i}^{\infty} e^{-\mu t} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\mu t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \\
&= e^{-\mu t} e^{\lambda t} \\
&= e^{-(\mu-\lambda)t} \leqslant 1, \quad (i \in E);
\end{aligned}$$

如 $j < i$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(s) p_{kj}(t) &= \sum_{k=i}^{\infty} p_{ik}(s) p_{kj}(t) = 0 \\
&= p_{ij}(s+t);
\end{aligned}$$

如 $j \geqslant i$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(s) p_{kj}(t) &= \sum_{k=i}^{j} p_{ik}(s) p_{kj}(t) \\
&= \sum_{k=i}^{j} \frac{e^{-\mu s}(\lambda s)^{k-i}}{(k-i)!} \frac{e^{-\mu t}(\lambda t)^{j-k}}{(j-k)!} \\
&= \frac{e^{-\mu(s+t)}}{(j-i)!} \sum_{l=0}^{j-i} \frac{(j-i)!(\lambda s)^l (\lambda t)^{j-i-l}}{l!(j-i-l)!} \\
&= \frac{e^{-\mu(s+t)}[\lambda(s+t)]^{j-i}}{(j-i)!} \\
&= p_{ij}(s+t).
\end{aligned}$$

故在任何情况下有

$$p_{ij}(s+t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(s) p_{kj}(t).$$

又易知

$$\lim_{t \to 0} p_{ij}(t) = \delta_{ij}.$$

故$(p_{ij}(t))$是一个标准的马氏过程.

由 $\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(t) = e^{-(\mu-\lambda)t}(i \in E)$ 可知：$\mu = \lambda$ 时 $(p_{ij}(t))$ 是诚实的，$\mu > \lambda$ 时 $(p_{ij}(t))$ 是非诚实的.

例 1.3.2 可测非标准的马氏过程：

取 $E = \{0,1,2\cdots\cdots\}$，$p_j > 0(j \in E)$ 满足 $\sum_{j\in E} p_j = 1$. 定义

$$p_{ij}(t) = p_j, \quad (i,j \in E; t > 0);$$
$$p_{ij}(0) = \delta_{ij}, \quad (i,j \in E).$$

则 $(p_{ij}(t))$ 为一个非标准的可测马氏过程.

事实上，$p_{ij}(t) \geqslant 0, \quad (t \geqslant 0)$；

$$\sum_{j\in E} p_{ij}(t) = \sum_{j\in E} p_j = 1.$$

$$\begin{aligned}\sum_{k\in E} p_{ik}(s)p_{kj}(t) &= \sum_{k\in E} p_k p_j = p_j \\ &= p_{ij}(s+t), \quad (s,t > 0).\end{aligned}$$

当 $\min\{s,t\} = 0$ 时，$\sum_{k\in E} p_{ik}(s)p_{kj}(t) = p_{ij}(s+t)$ 仍成立. 故 $(p_{ij}(t))$ 是一个马氏过程；又对任意 $i,j \in E$，$p_{ij}(t) = p_j$ 是 $(0,\infty)$ 上 Lebesgue 可测函数，故 $(p_{ij}(t))$ 还是可测马氏过程；但是 $\lim_{t\to 0} p_{ij}(t) = p_j > 0$，$(i,j \in E)$；从而 $(p_{ij}(t))$ 不是标准马氏过程.

作为本节的最后一个例子，我们再给出一个标准马氏过程.

例 1.3.3 设 $E = \{0,1,2,\cdots\}$，以下将构造 E 上的一标准马氏过程 $(p_{ij}(t))$ 满足

$$\lim_{t\to 0} \frac{p_{00}(t) - 1}{t} = -\infty.$$

令

$$h(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-q_i t},$$

其中

$$0 < q_i < \infty, \quad 0 < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{q_i} < 1. \tag{1.3.2}$$

考虑下列积分方程

$$X(t) = 1 - \int_0^t X(s)h(t-s)ds, \quad (t \geqslant 0). \tag{1.3.3}$$

其中 $X(t)$ 为$[0,\infty)$ 上的有界连续函数.

首先,我们用迭代法证明(1.3.3) 有唯一解 $X(t)$.

记

$$a = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{q_i} < 1.$$

令

$$X_0(t) \equiv 0, \quad (t \geqslant 0);$$

$$X_{n+1}(t) = 1 - \int_0^t X_n(s)h(t-s)ds, \quad (n \geqslant 0, t \geqslant 0). \tag{1.3.4}$$

则对任意 $n \geqslant 0$, $X_n(t)$ 是$[0,\infty)$ 上有界连续函数.

$$\begin{aligned}
&|X_{n+1}(t) - X_n(t)| \\
\leqslant\ & \int_0^t |X_n(s) - X_{n-1}(s)| h(t-s)ds \\
\leqslant\ & \int_0^t h(t-s)ds \sup_{s\in[0,t]} |X_n(s) - X_{n-1}(s)| \\
\leqslant\ & \int_0^t h(t-s)ds \sup_{s\in[0,\infty)} |X_n(s) - X_{n-1}(s)| \\
=\ & \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{q_i}(1 - e^{-q_i t}) \sup_{t\in[0,\infty)} |X_n(t) - X_{n-1}(t)| \\
\leqslant\ & \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{q_i} \sup_{t\in[0,\infty)} |X_n(t) - X_{n-1}(t)| \\
=\ & a \sup_{t\in[0,\infty)} |X_n(t) - X_{n-1}(t)|,
\end{aligned}$$

从而

$$\sup_{t\in[0,\infty)} |X_{n+1}(t) - X_n(t)| \leqslant a \sup_{t\in[0,\infty)} |X_n(t) - X_{n-1}(t)|. \tag{1.3.5}$$

由(1.3.5) 及归纳法知,对任意的 $n \geqslant 0$,

$$\sup_{t\in[0,\infty)} |X_{n+1}(t) - X_n(t)| \leqslant a^n \sup_{t\in[0,\infty)} |X_1(t) - X_0(t)| = a^n. \tag{1.3.6}$$

因此，对任意 $n \geqslant 0, p \geqslant 1$，

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in[0,\infty)} |X_{n+p}(t) - X_n(t)| \\
\leqslant &\sup_{t\in[0,\infty)} |X_{n+p}(t) - X_{n+p-1}(t)| \\
&+ \sup_{t\in[0,\infty)} |X_{n+p-1}(t) - X_{n+p-2}(t)| + \cdots \\
&+ \sup_{t\in[0,\infty)} |X_{n+1}(t) - X_n(t)| \\
\leqslant &a^{n+p-1} + a^{n+p-2} + \cdots + a^n \\
= &\frac{a^n - a^{n+p}}{1-a} < \frac{a^n}{1-a}.
\end{aligned}$$

因 $0 < a < 1$，故有

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,\infty)} |X_{n+p}(t) - X_n(t)| = 0, (p \geqslant 0). \qquad (1.3.7)$$

(1.3.7) 表明：对于 $t \in [0,\infty)$，$\{X_n(t)\}$ 是Cauchy数列，因此，存在 $[0,\infty)$ 上有界函数 $X(t)$ 使.

$$\lim_{n\to\infty} X_n(t) = X(t),$$

而且由(1.3.7)知，上述收敛关于 $t\in[0,\infty)$ 是一致的. 因此，$X(t)$ 在$[0,\infty)$上连续；由(1.3.4)及控制收敛定理知，

$$X(t) = 1 - \int_0^t X(s)h(t-s)ds.$$

于是(1.3.3)存在有界连续函数解 $X(t)$.

往证唯一性. 假若(1.3.3)有两个有界连续函数解 $X(t)$ 和 $\widetilde{X}(t)$，则.

$$\begin{aligned}
|X(t) - \widetilde{X}(t)| &\leqslant \int_0^t |X(s) - \widetilde{X}(s)| h(t-s)ds \\
&\leqslant \int_0^t h(t-s)ds \sup_{s\in[0,\infty)} |X(s) - \widetilde{X}(s)| \\
&\leqslant a \sup_{s\in[0,\infty)} |X(s) - \widetilde{X}(s)|.
\end{aligned}$$

故

$$\sup_{t\in[0,\infty)} |X(t) - \widetilde{X}(t)| \leqslant a \sup_{s\in[0,\infty)} |X(s) - \widetilde{X}(s)|.$$

因 $0 < a < 1$，故有

$$\sup_{t\in[0,\infty)} |X(t) - \widetilde{X}(t)| = 0.$$

因此，$X(t)=\tilde{X}(t)$，$(t\geqslant 0)$. 唯一性得证.

其次，假设 $X(t)$ 是(1.3.3)的有界连续函数解，我们将证明 $0\leqslant X(t)\leqslant 1$，$(t\geqslant 0)$. 由(1.3.3)，只需证 $X(t)\geqslant 0$，$(t\geqslant 0)$.

假若有某一 $t\in[0,\infty)$ 使 $X(t)<0$. 令

$$t_0=\inf\{t\geqslant 0;X(t)<0\}.$$

因 $X(t)$ 连续，我们有 $X(t_0)=0$. 由(1.3.3)知，对 $0\leqslant t\leqslant t_0$，

$$0\leqslant X(t)=1-\int_0^t X(s)h(t-s)ds\leqslant 1. \tag{1.3.8}$$

又

$$0=X(t_0)=1-\int_0^{t_0}X(s)h(t-s)ds.$$

所以

$$\int_0^{t_0}X(s)h(t-s)ds=1. \tag{1.3.9}$$

但由(1.3.8)知

$$\int_0^{t_0}X(s)h(t-s)ds\leqslant\int_0^{t_0}h(t-s)ds<\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{q_i}<1. \tag{1.3.10}$$

由(1.3.9)与(1.3.10)的矛盾，知 $X(t)\geqslant 0$，$(t\geqslant 0)$. 令

$$p_{00}(t)=X(t); \tag{1.3.11}$$

$$p_{ij}(t)=\int_0^t p_{i0}(s)e^{-q_j(t-s)}ds+\delta_{ij}e^{-q_jt},(i\geqslant 0,j\geqslant 1); \tag{1.3.12}$$

$$p_{i0}(t)=q_ip_{0i}(t)\quad,(i\geqslant 1). \tag{1.3.13}$$

下面证明由(1.3.11)～(1.3.13)定义的$(p_{ij}(t))$是一个标准马氏过程.

显然有

$$p_{ij}(t)\geqslant 0,(i,j\in E;t\geqslant 0); \tag{1.3.14}$$

根据(1.3.3)及 $p_{00}(t)$ 和 $p_{0j}(t)$ 的定义得

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{0j}(t) = p_{00}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} p_{0j}(t)$$

$$= p_{00}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t p_{00}(s) e^{-q_j(t-s)} ds$$

$$= p_{00}(t) + \int_0^t p_{00}(s) h(t-s) ds = 1. \qquad (1.3.15)$$

如记

$$(f \circ g)(t) = \int_0^t f(t-s) g(s) ds, e_q(t) = 1 - e^{-qt},$$

则对 $i \geqslant 1$,有

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(t) = p_{i0}(t) + \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}(t)$$

$$= p_{i0}(t) + (p_{i0} \circ h)(t) + e^{-q_i t}$$

$$= (p_{00} \circ e'_{q_i})(t) + (p_{00} \circ h \circ e'_{q_i})(t) + e^{-q_i t}$$

$$= [(p_{00} + p_{00} \circ h) \circ e'_{q_i}](t) + e^{-q_i t}$$

$$= (1 \circ e'_{q_i})(t) + e^{-q_i t}$$

$$= 1 - e^{-q_i t} + e^{-q_i t} = 1. \qquad (1.3.16)$$

由(1.3.12)得

$$p'_{ij}(t) = p_{i0}(t) - q_j \int_0^t p_{i0}(s) e^{-q_j(t-s)} ds - q_j \delta_{ij} e^{-q_j t}$$

$$= p_{i0}(t) - p_{ij}(t) q_j, (i \geqslant 0, j \geqslant 1). \qquad (1.3.17)$$

考虑下列二元函数:

$$p_{ij}(s,t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(s) p_{kj}(t).$$

根据(1.3.2)、(1.3.17)以及控制收敛定理知

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) p_{ij}(s,t)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(s) p'_{kj}(t)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(s) [p_{k0}(t) - p_{kj}(t) q_j]$$

$$= p_{i0}(s,t) - p_{ij}(s,t)q_j.$$

于是对每一 s 和 i, $\{p_{ij}(s,t), 0 \leqslant j < \infty\}$ 及 $\{p_{ij}(s+t), 0 \leqslant j < \infty\}$ 都是方程组

$$Z'_{ij}(t) = Z_{i0}(t) - Z_{ij}(t)q_j \quad (0 \leqslant j < \infty) \tag{1.3.18}$$

的解. 但是,显然方程组(1.3.18)的解唯一,故

$$p_{ij}(s+t) = p_{ij}(s,t).$$

从而

$$p_{ij}(s+t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(s)p_{kj}(t), (i \geqslant 0, j \geqslant 1). \tag{1.3.19}$$

根据(1.3.15)和(1.3.19)得

$$\begin{aligned} p_{00}(s+t) &= 1 - \sum_{j=1}^{\infty} p_{0j}(s+t) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p_{0k}(s) - \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} p_{0k}(s)p_{kj}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p_{0k}(s)[1 - \sum_{j=1}^{\infty} p_{kj}(t)] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p_{0k}(s)p_{k0}(t). \end{aligned} \tag{1.3.20}$$

根据(1.3.16)和(1.3.19)得

$$\begin{aligned} p_{i0}(s+t) &= 1 - \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}(s+t) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(s) - \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(s)p_{kj}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(s)[1 - \sum_{j=1}^{\infty} p_{kj}(t)] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(s)p_{k0}(t). \end{aligned} \tag{1.3.21}$$

由(1.3.14) ~ (1.3.16)及(1.3.19) ~ (1.3.21)知$(p_{ij}(t))$是一个马氏过程.

由$(p_{ij}(t))$的定义易知

$$\lim_{t\to 0} p_{ij}(t) = \delta_{ij}.$$

故由定理 1.2.1 知，$(p_{ij}(t))$ 是标准马氏过程. 并且

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-p_{00}(t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t p_{00}(s)h(t-s)ds$$

$$=\lim_{t\to 0} h(t) = \infty.$$

§ 4 $p_{ij}(t)$ 的连续性

定理 1.4.1 对任意马氏过程 $(p_{ij}(t))$ 下列条件等价

(i) $(p_{ij}(t))$ 是标准的；

(ii) 每一 $p_{ij}(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上一致连续，而且该一致性对 j 也成立；

(iii) $(p_{ij}(t))$ 可测，且 E 按定理 1.2.3 的分解

$$E = F\cup I\cup J\cup\cdots\cdots$$

中，$F=\Phi$，I、J…… 等各只含一点.

证明 (i) → (ii)：设 $(p_{ij}(t))$ 标准. 为证明(ii)，只需证对任意 $t\geqslant 0, h>0, i,j\in E$ 有

$$|p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)|\leqslant 1-p_{ii}(h). \tag{1.4.1}$$

但这由下式得到

$$|p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)|$$

$$=|\sum_{k\in E} p_{ik}(h)p_{kj}(t)-p_{ij}(t)|$$

$$=|(p_{ii}(h)-1)p_{ij}(t)+\sum_{k\neq i} p_{ik}(h)p_{kj}(t)|$$

$$=|\sum_{k\neq i} p_{ik}(h)p_{kj}(t)-(1-p_{ii}(h))p_{ij}(t)|$$

$$\leqslant\max\{\sum_{k\neq i} p_{ik}(h)p_{kj}(t),(1-p_{ii}(h))p_{ij}(t)\}$$

$$\leqslant\max\{\sum_{k\neq i} p_{ik}(h),1-p_{ii}(h)\}$$

$$= 1 - p_{ii}(h).$$

(ii) → (iii)

由连续性得可测性．因 $p_{jj}(t) \to p_{jj}(0) = 1,(t \to 0)$，由定理 1.2.4(i) 知 $F = \varnothing$，又由(1.2.17) 知 I、J 等各只含一点．

(iii) → (i)

由(1.2.30)，$p_{ij}(t) = \Pi_{ij}(t)u_j$，而 I，J 等各只含一点，故 $u_j = 1$．因此，$p_{ij}(t) = \Pi_{ij}(t)$．但由(1.2.29) $\lim\limits_{t\to 0}\Pi_{ij}(t) = \delta_{ij}$，从而$\lim\limits_{t\to 0}p_{ij}(t) = \delta_{ij}$．故$(p_{ij}(t))$标准．

§ 5 $p'_{ij}(0)$ 的存在性

定理 1.5.1 设$(p_{ij}(t))$为标准马氏过程，则对于任意 $i \in E$，极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{1 - p_{ii}(t)}{t} = -p'_{ii}(0) \tag{1.5.1}$$

存在(但可能为 $+\infty$)．

证明 由(1.1.1)与(1.1.2)得

$$p_{ii}(s + t) \geqslant p_{ii}(s)p_{ii}(t). \tag{1.5.2}$$

由标准性条件及(1.5.2)知

$$0 < p_{ii}(t) \leqslant 1,(t \geqslant 0). \tag{1.5.3}$$

令

$$\varphi(t) = -\ln(p_{ii}(t)). \tag{1.5.4}$$

由(1.5.3)知，$\varphi(t)$取有限值，由标准性条件和(1.5.2)得

$$\lim_{t\to 0}\varphi(t) = 0; \tag{1.5.5}$$

$$\varphi(s + t) \leqslant \varphi(s) + \varphi(t). \tag{1.5.6}$$

令

$$q_i = \sup_{0<t<\infty}\frac{\varphi(t)}{t} \leqslant +\infty. \tag{1.5.7}$$

如 $q_i < +\infty$，则存在 t_0 使

$$\frac{\varphi(t_0)}{t_0} > q_i - \varepsilon,$$

其中 $\varepsilon > 0$. 又对任意的 $t > 0$,存在非负整数 n 及 δ 使

$$t_0 = nt + \delta, \quad 0 \leqslant \delta < t. \tag{1.5.8}$$

于是由(1.5.6)得

$$\begin{aligned} q_i - \varepsilon &< \frac{\varphi(t_0)}{t_0} \\ &\leqslant \frac{n\varphi(t) + \varphi(\delta)}{t_0} \\ &= \frac{nt}{t_0} \cdot \frac{\varphi(t)}{t} + \frac{\varphi(\delta)}{t_0}. \end{aligned} \tag{1.5.9}$$

由(1.5.5)和(1.5.8)得

$$\lim_{t \to 0} \delta = \lim_{t \to 0} \varphi(\delta) = 0 \tag{1.5.10}$$

及

$$\lim_{t \to 0} \frac{nt}{t_0} = 1. \tag{1.5.11}$$

由(1.5.9)、(1.5.10)和(1.5.11)得

$$q_i - \delta \leqslant \varliminf_{t \to 0} \varphi(t)/t \leqslant \varlimsup_{t \to 0} \varphi(t)/t \leqslant q_i. \tag{1.5.12}$$

由 ε 的任意性得

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t)}{t} = q_i. \tag{1.5.13}$$

如 $q_i = +\infty$,那么为了得到这个结果,以任给的任意大的正数 M 代替 $q_i - \varepsilon$ 进行讨论就可以了. 再由标准性及微积分中一个简单事实

$$\lim_{x \to 0} \frac{ln(1-x)}{x} = -1,$$

得

$$\begin{aligned} q_i &= \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{-ln[1-(1-p_{ii}(t))]}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{-ln[1-(1-p_{ii}(t))]}{1-p_{ii}(t)} \cdot \lim_{t \to 0} \frac{1-p_{ii}(t)}{t} \end{aligned}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1-p_{ii}(t)}{t}.$$

定理 1.5.2 对任意 $i,j\in E, i\neq j$,

$$p'_{ij}(0)=\lim_{t\to 0}\frac{p_{ij}(t)}{t} \tag{1.5.14}$$

存在且有限.

证明 任意固定 $h>0$, 那么 $(p_{ij}(h))$ 是离散时间马氏链 $\{x(nh), n\geqslant 0\}$ 的转移概率矩阵. 固定 $i\neq j, i,j\in E$, 定义

$${}_jp_{ii}^{(0)}(h)=1;$$

$${}_jp_{ii}^{(n)}(h)=\sum_{k_1\neq j}\sum_{k_2\neq j}\cdots\sum_{k_{n-1}\neq j}p_{ik_1}(h)p_{k_1k_2}(h)\cdots p_{k_{n-1}i}(h), \qquad n\geqslant 1;$$

$$f_{ij}^{(n)}(h)=\sum_{k_1\neq j}\sum_{k_2\neq j}\cdots\sum_{k_{n-1}\neq j}p_{ik_1}(h)p_{k_1k_2}(h)\cdots p_{k_{n-1}j}(h), \qquad n\geqslant 1.$$

则由离散马氏链的性质可得(若读者不熟悉离散时间马氏链,只要跳过本定理的证明,不影响本书的阅读)

$$p_{ij}(nh)\geqslant\sum_{m=0}^{n-1}{}_jp_{ii}^{(m)}(h)p_{ij}(h)p_{jj}((n-m-1)h), \tag{1.5.15}$$

$$p_{ii}(mh)={}_jp_{ii}^{(m)}(h)+\sum_{a=1}^{m-1}f_{ij}^{(a)}(h)p_{ji}((m-a)h), \tag{1.5.16}$$

$$p_{ij}(mh)=\sum_{a=1}^{m}f_{ij}^{(a)}(h)p_{jj}((m-a)h). \tag{1.5.17}$$

因 $\lim_{t\to 0}p_{ij}(t)=\delta_{ij}$, 故对 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$, 存在 $t_0>0$, 使对给定的 i,j

$$\begin{cases}\max\limits_{0\leqslant t\leqslant t_0}p_{ij}(t)<\varepsilon, & \max\limits_{0\leqslant t\leqslant t_0}p_{ji}(t)<\varepsilon,\\ \min\limits_{0\leqslant t\leqslant t_0}p_{ii}(t)>1-\varepsilon, & \min\limits_{0\leqslant t\leqslant t_0}p_{jj}(t)>1-\varepsilon.\end{cases} \tag{1.5.18}$$

对于 $0<t\leqslant t_0$, 及已给的 h, 令 $n=[\frac{t}{h}]$, 则当 $m\leqslant n$ 时,

$$\begin{aligned}\varepsilon\geqslant p_{ij}(mh)&=\sum_{a=1}^{m}f_{ij}^{(a)}(h)p_{jj}((m-a)h)\\&>\sum_{a=1}^{m}f_{ij}^{(a)}(h)(1-\varepsilon)\end{aligned}$$

$$\sum_{a=1}^{m} f_{ij}^{(a)}(h) \leqslant 1. \tag{1.5.19}$$

由(1.5.16)及(1.5.19)得

$$p_{ii}(mh) \leqslant {}_j p_{ii}^{(m)}(h) + \sum_{a=1}^{m-1} f_{ij}^{(a)}(h) \max_{0\leqslant t\leqslant t_0} p_{ji}(t)$$

$$< {}_j p_{ii}^{(m)}(h) + \varepsilon.$$

故有

$${}_j p_{ii}^{(m)}(h) > p_{ii}(mh) - \varepsilon \geqslant \min_{0\leqslant t\leqslant t_0} p_{ii}(t) - \varepsilon > 1 - 2\varepsilon.$$

再由(1.5.15)得

$$p_{ij}(nh) \geqslant (1 - 2\varepsilon) \sum_{m=1}^{n-1} p_{ij}(h)(1 - \varepsilon)$$

$$= n(1 - \varepsilon)(1 - 2\varepsilon) p_{ij}(h)$$

$$\geqslant (1 - 3\varepsilon) n p_{ij}(h),$$

从而

$$\frac{p_{ij}(nh)}{nh} \geqslant (1 - 3\varepsilon) \frac{p_{ij}(h)}{h}. \tag{1.5.20}$$

令

$$q_{ij} = \overline{\lim_{t\to 0}} \frac{p_{ij}(t)}{t}.$$

在(1.5.20)中,令 $h \to 0$,则 $nh \to t$. 因 $p_{ij}(t)$ 关于 t 连续,故

$$\frac{p_{ij}(t)}{t} \geqslant (1 - 3\varepsilon) q_{ij}. \tag{1.5.21}$$

在上式中又令 $t \to 0$ 得

$$\underline{\lim_{t\to 0}} \left(\frac{p_{ij}(t)}{t}\right) \geqslant (1 - 3\varepsilon) q_{ij}.$$

由 ε 的任意性得

$$\underline{\lim_{t\to 0}} \frac{p_{ij}(t)}{t} \geqslant q_{ij}$$

$$= \overline{\lim_{t\to 0}} \frac{p_{ij}(t)}{t}.$$

故

$$q_{ij} = \lim_{t\to 0}\frac{p_{ij}(t)}{t}.$$

由(1.5.21)知，$q_{ij} < \infty$.

今后我们用 q_{ij} 表示 $p'_{ij}(0)$，常以 q_i 表示 $-p'_{ii}(0)$，即 $q_i = -q_{ii}$.

定义 1.5.1 设$(p_{ij}(t))$是标准马氏过程，$(q_{ij}) = (p'_{ij}(0))$. $\forall i \in E$；若 $q_i < \infty$，则称 i 为 $P(t)$ 的稳定状态；若 $q_i = \infty$ 则称 i 为 $P(t)$ 的瞬时状态. 如果对任意 $i \in E$，i 均为 $P(t)$ 的稳定状态，则称 $P(t)$ 是全稳定的；否则称 $P(t)$ 为带瞬时态的.

注意：作为带瞬时态的标准马氏过程的例子见例 1.3.3.

定理 1.5.3 设$(p_{ij}(t))$为标准马氏过程，则对任意 $i \in E$，有

$$0 \leqslant \sum_{j\neq i} q_{ij} \leqslant q_i \leqslant \infty. \tag{1.5.22}$$

证明 由于 $\sum_{j\in E} p_{ij}(t) \leqslant 1$，故

$$\sum_{j\neq i}\frac{p_{ij}(t)}{t} \leqslant \frac{1-p_{ii}(t)}{t}.$$

令 $t \to 0$，由 Fatou 引理得

$$0 \leqslant \sum_{j\neq i} q_{ij} \leqslant q_i \leqslant \infty.$$

§6 $p'_{ij}(t)$ 在$(0,\infty)$上的存在性及连续性

引理 1.6.1 设$(p_{ij}(t))$为标准马氏过程，则对一切 $i \in E$，$p_{ii}(t)$ 在某区间$[0,t_i]$中具有有界变差.

证明 固定 $i \in E$，因 $p_{ii}(t)$ 在任一有限区间中一致连续，故只需证明存在 $t > 0$ 使得

$$\sum_{r=1}^{N}\left|p_{ii}\left(\frac{r-1}{N}t\right) - p_{ii}\left(\frac{r}{N}t\right)\right| \leqslant M < +\infty, \tag{1.6.1}$$

其中上界 M 与 N 无关(可能与 i 有关)，从而 $p_{ii}(t)$ 在$[0,t]$中的变差也不会超过 M.

设 $s > 0$，令

$$G_{ij}^{(1)}(s) = 1 - p_{ij}(s),(i,j\in E); \tag{1.6.2}$$

$$G_{ij}^{(n)}(s) = 1 - p_{ij}(s) - \sum_{k_1 \neq j} p_{ik_1}(s) p_{k_1 j}(s) -$$

$$- \sum_{k_1 \neq j} \sum_{k_2 \neq j} p_{ik_1}(s) p_{k_1 k_2}(s) p_{k_2 j}(s) - \cdots - \sum_{k_1 \neq j} \sum_{k_2 \neq j} \cdots$$

$$\sum_{k_{n-1} \neq j} p_{ik_1}(s) p_{k_1 k_2}(s) \cdots p_{k_{n-1} j}(s), (i, j \in E), n \geqslant 1. \quad (1.6.3)$$

往证对任意 $i, j \in E$，任意正整数 n，$G_{ij}^{(n)}(s) \geqslant 0$.

当 $n = 1$ 时，结论显然成立；设对 n 结论成立，则

$$G_{ij}^{(n+1)}(s) \geqslant \sum_{k \in E} p_{ik}(s) - p_{ij}(s) - \sum_{k_1 \neq j} p_{ik_1}(s) p_{k_1 j}(s) - \cdots -$$

$$\sum_{k_1 \neq j} \sum_{k_2 \neq j} \cdots \sum_{k_n \neq j} p_{ik_1}(s) p_{k_1 k_2}(s) \cdots p_{k_n j}(s)$$

$$= \sum_{k_1 \neq j} p_{ik_1}(s) [1 - p_{k_1 j}(s) - \sum_{k_2 \neq j} p_{k_1 k_2}(s) p_{k_2 j}(s) - \cdots -$$

$$\sum_{k_2 \neq j} \sum_{k_3 \neq j} \cdots \sum_{k_n \neq j} p_{k_1 k_2}(s) p_{k_2 k_3}(s) \cdots p_{k_n j}(s)] \geqslant 0.$$

故由归纳法知

$$G_{ij}^{(n)}(s) \geqslant 0, (i, j \in E), n \geqslant 1. \quad (1.6.4)$$

记

$$u_n = p_{ii}(ns), n = 0, 1, 2, \cdots; \quad (1.6.5)$$

$$W_n = \min\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}, n \geqslant 1; W_0 = 1. \quad (1.6.6)$$

今定义

$$f_1 = u_1; \quad (1.6.7)$$

$$f_{n+1} = \sum_{k_1 \neq i} \sum_{k_2 \neq i} \cdots \sum_{k_n \neq i} p_{ik_1}(s) p_{k_1 k_2}(s) \cdots p_{k_n i}(s), (n \geqslant 1); \quad (1.6.8)$$

$$g_n = G_{ii}^{(n)}(s) = 1 - \sum_{r=1}^{n} f_r, (n \geqslant 1). \quad (1.6.9)$$

则

$$u_n \geqslant W_n > 0, \quad (n \geqslant 0); \quad (1.6.10)$$

$$f_n \geqslant 0, \quad (n \geqslant 1). \quad (1.6.11)$$

由(1.6.4)知

$$g_n \geqslant 0, \quad (n \geqslant 1); \tag{1.6.12}$$

$$\sum_{r=1}^{n} f_r \geqslant 1, \quad (n \geqslant 1). \tag{1.6.13}$$

由

$$\begin{aligned} u_n &= p_{ii}(ns) \\ &= \sum_{k_1 \in E} \cdots \sum_{k_{n-1} \in E} p_{ik_1}(s) p_{k_1 k_2}(s) \cdots p_{k_{n-1} i}(s) \end{aligned}$$

可得

$$u_n = \sum_{r=1}^{n} f_r u_{n-r}, \quad (n \geqslant 1). \tag{1.6.14}$$

往证

$$1 - u_n = \sum_{r=1}^{n} g_r u_{n-r}, \quad (n \geqslant 1). \tag{1.6.15}$$

因 $1 - u_1 = 1 - f_1 = g_1 = g_1 u_0$,故(1.6.15)当 $n = 1$ 时成立.

设对 $k \leqslant n$,(1.6.15)成立.则由(1.6.14)得

$$\begin{aligned} 1 - u_{n+1} &= g_{n+1} + \sum_{r=1}^{n+1} f_r - \sum_{r=1}^{n+1} f_r u_{n+1-r} \\ &= g_{n+1} + \sum_{r=1}^{n+1} f_r (1 - u_{n+1-r}) \\ &= g_{n+1} + \sum_{r=1}^{n} f_r \sum_{s=1}^{n+1-r} g_s u_{n+1-r-s} \\ &= g_{n+1} + \sum_{s=1}^{n} g_s \sum_{r=1}^{n+1-s} f_r u_{n+1-r-s} \\ &= g_{n+1} + \sum_{s=1}^{n} g_s u_{n+1-s} \\ &= \sum_{s=1}^{n+1} g_s u_{n+1-s}. \end{aligned}$$

由归纳法,(1.6.15)得证.

因此,我们有

$$1-W_N\geqslant 1-u_N=\sum_{r=1}^{N}g_r u_{N-r}$$

$$\geqslant W_{N-1}\sum_{r=1}^{N}g_r\geqslant W_N\sum_{r=1}^{N}g_r.$$

从而

$$\sum_{r=1}^{N}g_r\leqslant\frac{1-W_N}{W_N}.\tag{1.6.16}$$

又

$$\sum_{s=1}^{N}(s-1)f_s=\sum_{S=1}^{N}(s-1)(g_{s-1}-g_s)$$

$$=\sum_{S=1}^{N}g_s-Ng_N\leqslant\sum_{S=1}^{N}g_s$$

$$\leqslant\frac{1-W_N}{W_N}.\tag{1.6.17}$$

当 $r\geqslant 1$ 时，

$$u_{r-1}-u_r=u_{r-1}(g_r+\sum_{s=1}^{r}f_s)-\sum_{s=1}^{r}f_s u_{r-s}$$

$$=u_{r-1}g_r+\sum_{s=1}^{r}f_s(u_{r-1}-u_{r-s}).$$

故

$$\sum_{r=1}^{N}|u_{r-1}-u_r|\leqslant\sum_{r=1}^{N}u_{r-1}g_r+\sum_{r=1}^{N}\sum_{s=1}^{r}f_s|u_{r-1}-u_{r-s}|.\tag{1.6.18}$$

由于 $|u_{r-1}-u_{r-s}|\leqslant|u_{r-1}-u_{r-2}|+\cdots+|u_{r-(s-1)}-u_{r-s}|$，故(1.6.18) 式右边第二项为

$$\sum_{S=1}^{N}f_s\sum_{r=s}^{N}|u_{r-1}-u_{r-s}|$$

$$\leqslant\sum_{S=1}^{N}f_s(s-1)\sum_{r=1}^{N-1}|u_{r-1}-u_r|$$

$$\leqslant\frac{1-W_N}{W_N}\sum_{r=1}^{N}|u_{r-1}-u_r|.$$

(1.6.18) 式右边第一项

$$\sum_{r=1}^{N} u_{r-1} g_r \leqslant \sum_{r=1}^{N} g_r \leqslant \frac{1-W_N}{W_N}.$$

故

$$\sum_{r=1}^{N} |u_{r-1} - u_r| \leqslant \{1 + \sum_{r=1}^{N} |u_{r-1} - u_r|\} \frac{1-W_N}{W_N}.$$

从而，如果 $W_N > 1/2$，则

$$\sum_{r=1}^{N} |u_{r-1} - u_r| \leqslant \frac{1-W_N}{2W_N - 1},$$

因 $\lim_{t\to 0} p_{ii}(t) = 1$，故存在 $t > 0$，使当 $s \in [0,t]$ 时，$p_{ii}(s) > 1/2$. 不妨设

$$D_i \triangleq \min_{0\leqslant s\leqslant t} p_{ii}(s) \geqslant 3/4.$$

令 $s = t/N$，则

$$u_r = p_{ii}(rs) = p_{ii}(\frac{r}{N}t); W_N \geqslant D_i \geqslant 3/4. \qquad (1.6.19)$$

注意到函数 $f(x) = \dfrac{1-x}{2x-1}$ 是单调减的，故有

$$\begin{aligned} &\sum_{r=1}^{N} |p_{ii}(\frac{r-1}{N}t) - p_{ii}(\frac{r}{N}t)| \\ \leqslant &\frac{1-W_N}{2W_N - 1} \\ \leqslant &\frac{1-D_i}{2D_i - 1} \\ \leqslant &1/2 . \end{aligned} \qquad (1.6.20)$$

引理 1.6.2 设 $(p_{ij}(t))$ 为标准马氏过程，则 $p_{ij}(t)$ 在 $[0,t_i]$ 中具有有界变差，这里 t_i 与引理 1.6.1 中的相同.

证明 设 $t = t_i$ 为引理 1.6.1 中所确定，只需证明对任意 N

$$\sum_{r=1}^{N} \sum_{j\in E} |p_{ij}(\frac{r-1}{N}t) - p_{ij}(\frac{r}{N}t)| \leqslant M < \infty, \quad (1.6.21)$$

其中上界 M 与 N 无关(可能与 i 有关). 记

$$u_r = p_{ii}(\frac{r}{N}t); \qquad (1.6.22)$$

$$P^{(r)} = (p_{i0}(\frac{r}{N}t), p_{i1}(\frac{r}{N}t), \cdots), (r \geqslant 0). \qquad (1.6.23)$$

对 $r = 0,1,2,\cdots$,归纳定义一序列 $g^{(r)} = (g_0^{(r)}, g_1^{(r)}, \cdots)$ 如下:

$$\begin{aligned} &g^{(1)} = P^{(1)}; \\ &g_j^{(r+1)} = \sum_{k \neq i} g_k^{(r)} p_{kj}(\frac{t}{N}), (r \geqslant 1). \end{aligned} \qquad (1.6.24)$$

先证

$$P^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} u_{n-i} g^{(i)}. \qquad (1.6.25)$$

事实上,当 $n = 1$ 时,(1.6.25) 显然成立. 设(1.6.25) 对某 n 成立,而欲证

$$P^{(n+1)} = \sum_{i=1}^{n+1} u_{n+1-i} g^{(i)}. \qquad (1.6.26)$$

由(1.6.25) 得

$$\begin{aligned} \sum_{k \neq i} p_{ik}(\frac{r}{N}t) p_{kj}(\frac{t}{N}) &= \sum_{i=1}^{n} u_{n-i} \sum_{k \neq i} g_k^{(i)} p_{kj}(\frac{t}{N}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} u_{n-i} g_j^{(i+1)} = \sum_{i=2}^{n+1} u_{n+1-i} g_j^{(i)}. \end{aligned}$$

两边同加上 $u_n g_j^{(1)} = p_{ii}(\frac{n}{N}t) p_{ij}(\frac{t}{N})$ 得

$$\begin{aligned} P_j^{(n+1)} &= \sum_{k \in E} p_{ik}(\frac{n}{N}t) p_{kj}(\frac{t}{N}) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} u_{n+1-i} g_j^{(i)}. \end{aligned}$$

故(1.6.25) 对 $n + 1$ 成立. 由归纳法,(1.6.25) 得证.

令 $\| g \| = \sum_{j \in E} |g_j|$,则由(1.6.25) 得

$$\sum_{i=1}^{N} u_{N-i} \| g^{(i)} \| = \| P^{(N)} \| \leqslant 1.$$

又因为 $D_t \triangleq \min_{0 \leqslant s \leqslant t} p_{ii}(s) \geqslant 3/4$,故

$$u_{N-i} = p_{ii}(\frac{N-r}{N}t) > 1/2.$$

从而，

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\| g^{(i)}\| < \sum_{i=1}^{N} u_{N-i}\| g^{(i)}\| \leqslant 1.$$

故

$$\sum_{i=1}^{N}\| g^{(i)}\| \leqslant 2. \qquad (1.6.27)$$

其次，由(1.6.25)，我们有

$$P^{(r-1)} - P^{(r)} = \sum_{i=1}^{r}(u_{r-1-i} - u_{r-i})g^{(i)}, \quad (u_{-1} = 0),$$

$$\sum_{r=1}^{N}\| P^{(r-1)} - P^{(r)}\| \leqslant \sum_{r=1}^{N}\sum_{i=1}^{r}\|(u_{r-1-i} - u_{r-i})g^{(i)}\|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{N}\sum_{r=i}^{N}\|(u_{r-1-i} - u_{r-i})g^{(i)}\|.$$

利用(1.6.20)，并注意 $u_0 - u_{-1} = 1$ 及(1.6.27) 得

$$\sum_{r=1}^{N}\| P^{(r-1)} - P^{(r)}\| \leqslant 2\sum_{i=1}^{N}\| g^{(i)}\| \leqslant 4.$$

此即

$$\sum_{r=1}^{N}\sum_{j\in E}|p_{ij}(\frac{r-1}{N}t) - p_{ij}(\frac{r}{N}t)| \leqslant 4. \qquad (1.6.28)$$

下面以 $v_{ij}(s,t)$ 记 $p_{ij}(u)$ 在$[s,t]$中的全变差，其中 $0\leqslant s<t<\infty$。

引理 1.6.3 设$(p_{ij}(t))$为标准马氏过程，则每个 $p_{ij}(t)$ 在任意有限区间上有有界变差，且

$$\sum_{j\in E} v_{ij}(0,t) < \infty, (\forall\, t > 0). \qquad (1.6.29)$$

证明 若 $u > 0$，则

$$v_{ij}(s,s+u) = \lim_{N\to\infty}\sum_{r=1}^{N}|p_{ij}(s+\frac{r-1}{N}u) - p_{ij}(s+\frac{r}{N}u)|$$

$$\leqslant \lim_{N\to\infty}\sum_{r=1}^{N}\sum_{k\in E}|p_{ik}(\frac{r-1}{N}u) - p_{ik}(\frac{r}{N}u)| p_{kj}(s)$$

$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{k\in E}\sum_{r=1}^{N}|p_{ik}(\frac{r-1}{N}u) - p_{ik}(\frac{r}{N}u)| p_{kj}(s)$$

$$= \sum_{k\in E} \lim_{N\to\infty} \sum_{r=1}^{N} \left| p_{ik}\left(\frac{r-1}{N}u\right) - p_{ik}\left(\frac{r}{N}u\right)\right| p_{kj}(s)$$

$$= \sum_{k\in E} v_{ik}(0,u) p_{kj}(s).$$

从而

$$\sum_{j\in E} v_{ij}(s,s-u) = \sum_{k\in E} v_{ik}(0,u) \sum_{j\in E} p_{kj}(s)$$

$$\leqslant \sum_{k\in E} v_{ik}(0,u). \tag{1.6.30}$$

由(1.6.28)、(1.6.30) 知，$p_{ij}(t)$ 在每个有限区间上有有界变差，且(1.6.29) 成立.

引理 1.6.4 对任意 $j\in E$，存在一单调增函数 $\beta_j(t)$，使对任意 $t\geqslant 0$，

$$v_{ij}(0,t) \leqslant \beta_j(t) \quad ,(i\in E). \tag{1.6.31}$$

证明 不妨设 $i\neq j$，任意固定 $t>0$，令

$$s = t/N;$$

$$W_r = p_{ij}(rs), \qquad (r\geqslant 0); \tag{1.6.32}$$

$$u_r = p_{jj}(rs), \qquad (r\geqslant 0). \tag{1.6.33}$$

又定义序列$\{f_r\}$ 如下：

$$\begin{cases} f_1 = W_1 = p_{ij}(s), \\ f_{n+1} = \sum\limits_{k_1\neq j}\sum\limits_{k_2\neq j}\cdots\sum\limits_{k_n\neq j} p_{ik_1}(s)p_{k_1k_2}(s)\cdots p_{k_nj}(s). \end{cases} \tag{1.6.34}$$

则由(1.6.4) 知

$$f_r \geqslant 0,(r\geqslant 1); \sum_{r\geqslant 1} f_r \leqslant 1. \tag{1.6.35}$$

可以证明

$$W_n = \sum_{r=1}^{n} f_r W_{n-r},(n\geqslant 1). \tag{1.6.36}$$

此外，我们有

$$W_{r-1} - W_r = \sum_{s=1}^{r} f_s(u_{r-1-s} - u_{r-s}), \quad u_{-1} = 0. \tag{1.6.37}$$

从而

$$\sum_{r=1}^{N}|W_{r-1}-W_r| \leqslant \sum_{r=1}^{N}\sum_{s=1}^{r} f_s|u_{r-1-s}-u_{r-s}|$$
$$=\sum_{s=1}^{N} f_s\Big(\sum_{r=s}^{N}|u_{r-1-s}-u_{r-s}|\Big)$$
$$\leqslant \sum_{s=1}^{N} f_s \sum_{r=1}^{N}|u_{r-2}-u_{r-1}|$$
$$\leqslant \sum_{s=1}^{N} f_s v_{jj}(0,t). \qquad (1.6.38)$$

因此

$$v_{ij}(0,t) \leqslant v_{jj}(0,t),\ (i\in E). \qquad (1.6.39)$$

取

$$\beta_j(t) = v_{jj}(0,t), \qquad (1.6.40)$$

$\beta_j(t)$ 即为所求.

定理 1.6.1 标准马氏过程 $(p_{ij}(t))$ 的每一元 $p_{ij}(t)$ 在 $(0,\infty)$ 中都有有穷导数 $p'_{ij}(t)$，而且满足方程

$$p'_{ij}(s+t) = \sum_{k\in E} p'_{ik}(s)p_{kj}(t),(s>0,t\geqslant 0,i,j\in E). \qquad (1.6.41)$$

又 $\sum_{j\in E}|p'_{ij}(t)|$ 有穷 $(t>0)$，对 t 不上升.

证明 不妨设 $E=\{0,1,2,\cdots\}$ 且只对 $i=0$ 证. 由引理 1.6.3, $p_{0j}(t)$ 在任意有限区间具有有界变差. 因而对 $t>0$ 几乎处处存在有穷导数. 由于 E 为可列集，故对任意 $\eta>0$，总存在 t_1，$0<t_1<\eta$，使一切 $p_{ij}(t)$ 在 t_1 有有穷导数. 以下分为三步：

(i) 先证对任意 $\varepsilon>0$，存在整数 k，使对一切 α，$0<\alpha<t_1/4$，有

$$\sum_{j=k}^{\infty}\frac{|p_{0j}(t_1)-p_{0j}(t_1+\alpha)|}{\alpha}<\varepsilon. \qquad (1.6.42)$$

事实上，对已给 $0<\alpha<t_1/4$，可取 $t'_0\in(t_1/2,t_1)$ 及正偶数 N，使 $\frac{t'_0}{N}\leqslant\alpha$. 然后以 t'_0 代替 t_0 来定义 $g^{(i)}$. 由定理 1.2.3 的系，对 $0<\varepsilon_1<\frac{\varepsilon}{8}$

$\cdot \frac{t_1}{2} \cdot \frac{1}{2}$,存在 k_1,使

$$\sum_{j \geqslant k_1} p_{0j}(t) < \varepsilon_1, (\forall\ t < t_1). \tag{1.6.43}$$

记 $\| g \|_k = \sum_{j \geqslant k} |g_j|$,我们有

$$\sum_{i=1}^{N} \| g^{(i)} \|_{k_1} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \geqslant k_1} |g_j^{(i)}| = \sum_{j \geqslant k_1} \sum_{i=1}^{N} |g_j^{(i)}|$$

$$\leqslant \frac{4}{3} \sum_{j \geqslant k_1} \sum_{i=0}^{N} u_{N-i} |g_j^{(i)}|$$

$$= \frac{4}{3} \sum_{j \geqslant k_1} p_{0j}(t_0) < 2\varepsilon_1.$$

故

$$\sum_{S=0}^{N-1} \| P^{s+1} - P^s \|_{k_1}$$

$$= \sum_{S=0}^{N-1} \| \sum_{i=0}^{s+1} (u_{s+1-i} - u_{s-i}) g^{(i)} \|_{k_1}$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{N} \sum_{s=i-1}^{N-1} | u_{s+1-i} - u_{s-i} | \, \| g^{(i)} \|_{k_1}$$

$$\leqslant 2 \sum_{i=1}^{N} \| g^{(i)} \|_{k_1} < 4\varepsilon_1.$$

由此即有

$$\sum_{S=0}^{N-1} \sum_{j=k_1}^{\infty} | p_{0j}((s+1)\alpha) - p_{0j}(s\alpha) | < 4\varepsilon_1. \tag{1.6.44}$$

于是至少有 $N/2$ 个整数 s,使

$$\sum_{j=k_1}^{\infty} | p_{0j}((s+1)\alpha) - p_{0j}(s\alpha) | < 8\varepsilon_1 / N. \tag{1.6.45}$$

且由(1.6.27)可见,对其中之一,如 r,有

$$\sum_{j=0}^{k_1} | p_{0j}((r+1)\alpha) - p_{0j}(r\alpha) | < 8/N. \tag{1.6.46}$$

今对正数 $\varepsilon_2 < \frac{\varepsilon_1}{8} \cdot \frac{t_1}{2} \cdot \frac{1}{2}$,存在 $k > k_1$,使

$$\sum_{j=k}^{\infty} p_{ij}(t) < \varepsilon_2, (\forall\, t < t_1, i \leqslant k_1). \qquad (1.6.47)$$

于是

$$\sum_{j=k}^{\infty} |p_{0j}(t_1) - p_{0j}(t_1 + \alpha)|$$

$$\leqslant \sum_{m=k}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |p_{0j}((r-1)\alpha) - p_{0j}(r\alpha)| p_{jm}(t_1 - r\alpha)$$

$$\leqslant \Big(\sum_{m=k}^{\infty} \sum_{j=k_1+1}^{\infty} + \sum_{m=k}^{\infty} \sum_{j=0}^{k_1}\Big)(|p_{0j}((r+1)\alpha) - p_{0j}(r\alpha)| p_{jm}(t_1 - r\alpha)).$$

右方第一项由(1.6.45)小于 $8\varepsilon_1/N$，又由(1.6.46)

$$\sum_{j=0}^{k_1} |p_{0j}((r+1)\alpha) - p_{0j}(r\alpha)| < 8/N.$$

再利用(1.6.47)，即知右方第二项也小于 $8\varepsilon_2/N$，因此，

$$\sum_{j=k}^{\infty} \frac{|p_{0j}(t_1) - p_{0j}(t_1 + \alpha)|}{\alpha} \leqslant \frac{8(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{N\alpha} \leqslant \frac{t_1 \varepsilon}{2N\alpha}.$$

回忆 $\alpha \geqslant \frac{t_0'}{N}$ 及 $t_1 < 2t_0'$，即得证(1.6.42).

(ii) 对任意 $t_2 > 0, \alpha > 0$，有

$$\frac{p_{0j}(t_1 + t_2) - p_{0j}(t_1 + t_2 + \alpha)}{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_{0k}(t_1) - p_{0k}(t_1 + \alpha)}{\alpha} p_{kj}(t_2).$$

由(1.6.42)，当 $\alpha \to 0$ 时有

$$p_{0j}^{+}(t_1 + t_2) = \sum_{k \in E} p_{0k}'(t_1) p_{kj}(t_2). \qquad (1.6.48)$$

其中 $p_{0j}^{+}(t)$ 表 $p_{0j}(t)$ 的右导数，由(1.6.42)还知

$$\sum_{k \in E} |p_{0k}'(t_1)| < \infty. \qquad (1.6.49)$$

故可在求和号下对 t_2 取极限，回忆 $p_{kj}(t_2)$ 对 $t_2 \geqslant 0$ 连续，故由(1.6.48)知，$p_{0j}^{+}(t_1 + t_2)$ 是 t_2 的连续函数. 利用以下事实：一连续函数如有连续右导数，则必有导数，而且导数与右导数一致，故由(1.6.48)得

$$p_{0j}'(t_1 + t_2) = \sum_{k \in E} p_{0k}'(t_1) p_{kj}(t_2). \qquad (1.6.50)$$

由于 t_1 可任意小，故 $p_{ij}'(t)$ 在 $(0, \infty)$ 中存在，有穷且连续. 对任意的

$s>0,t>0$,总可找到 $t_1<s$,使(1.6.50)成立,于是

$$
\begin{aligned}
p'_{0j}(s+t) &= p'_{0j}(t_1+(s-t_1+t)) \\
&= \sum_{k\in E} p'_{0k}(t_1)p_{kj}(s-t_1+t) \\
&= \sum_{k\in E} p'_{0k}(t_1)\sum_{l\in E} p_{kl}(s-t_1)p_{lj}(t) \\
&= \sum_{l\in E} p'_{0l}(s)p_{lj}(t).
\end{aligned} \tag{1.6.51}
$$

此得证(1.6.41).

(iii) 对 $t>0$,取 $t_1<t$ 使其满足(1.6.49),由(1.6.41)得

$$
p'_{0j}(t) = \sum_{k\in E} p'_{0k}(t_1)p_{kj}(t-t_1),
$$

$$
\sum_{j\in E} |p'_{0j}(t)| \leqslant \sum_{k\in E} |p'_{0k}(t_1)| < \infty,(t>0). \tag{1.6.52}
$$

仿(1.6.52)之证,即知 $\sum_{j\in E} |p'_{0j}(t)|$ 对 t 不上升.

定理 1.6.2 设 $(p_{ij}(t))$ 为标准马氏过程,则

$$
p'_{ij}(s+t) = \sum_{k\in E} p_{ik}(s)p'_{kj}(t),
$$

$$
(s\geqslant 0,t>0;i,j\in E). \tag{1.6.53}
$$

证明 令 $M_{ij}(t)=\max\limits_{0\leqslant s\leqslant t} p_{ij}(s)$,则

$$
M_{ij}(t)\leqslant v_{ij}(0,t),(i\neq j).
$$

由引理 1.6.4,对每个 $s,t>0$,有

$$
\sum_{k\in E} v_{ik}(0,s)v_{kj}(0,t) \leqslant \sum_{k\in E} v_{ik}(0,s)\beta_j(t) < \infty.
$$

又因 $v_{kj}(0,t)=\int_0^t |p'_{kj}(u)|du$,故

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k\in E} M_{ik}(s)\int_0^t |p'_{kj}(u)|du \\
&\leqslant \sum_{k\in E} v_{ik}(0,s)v_{kj}(0,t) < \infty.
\end{aligned} \tag{1.6.54}
$$

从而对每一 s 和几乎所有的 t(依赖于 s)有

$$
\sum_{k\in E} M_{ik}(s)|p'_{kj}(t)| < \infty. \tag{1.6.55}
$$

由 Fubini 定理知,如果 $t\bar{\in} Z,s\bar{\in} Z_t$,则(1.6.55)式成立,这里 Z 和

Z_t 是零测度集. 但因为 $M_{ik}(s)$ 关于 s 非减，故(1.6.55) 对 $t \notin Z$ 及所有的 s 成立. 特别地，如 $t \notin Z$，级数 $\sum_{k\in E} p_{ik}(s)p'_{kj}(t)$ 关于 s 在每个有限区间一致收敛，故为 s 的连续的函数. 其次，由于 $p'_{ij}(t)$ 连续，故对每一 s，我们有

$$p_{ij}(s+t)-p_{ij}(s)=\sum_{k\in E} p_{ik}(s)\int_0^t p'_{kj}(u)du$$

$$=\int_0^t \sum_{k\in E} p_{ik}(s)p'_{kj}(u)du. \qquad (1.6.56)$$

此处第二个等号成立是由于(1.6.54) 的结果，因此，对几乎所有的 t(依赖于 s) 有

$$p'_{ij}(s+t)=\sum_{k\in E} p_{ik}(s)p'_{kj}(t). \qquad (1.6.57)$$

又由 Fubini 定理，如 $t \notin Z$，$s \notin Z_t$，则(1.6.57) 也成立，此处 Z 和 Z_t 是零测度集，不妨假定它们与前述的 Z 及 Z_t 一致，否则取它们之并. 对于固定的 $t>0$，$t \notin Z$，(1.6.57) 的左边是 s 的连续函数，由前述，右边亦是 s 的连续函数，故(1.6.57) 对所有的 s 成立，Z_t 为空集. 对任意 $s, t>0$，因 Z 是零测度集，故可选 $t_1<t$，使之满足(1.6.57)，于是有

$$p'_{ij}(s+t)=\sum_{k\in E} p_{ik}(s+t-t_1)p'_{kj}(t_1)$$

$$=\sum_{k\in E}\sum_{l\in E} p_{il}(s)p_{lk}(t-t_1)p'_{kj}(t_1)$$

$$=\sum_{l\in E} p_{il}(s)p'_{lj}(t).$$

从而 Z 也为空集，亦即(1.6.53) 对所有 $s>0$，$t>0$ 成立. 注意到 $p_{ij}(0)=\delta_{ij}$. 则它对 $s=0$ 也成立.

系 设 $(p_{ij}(t))$ 为可测马氏过程，又若

$$\lim_{t\to 0} p_{ii}(t)=u_i>0, (i\in E). \qquad (1.6.58)$$

则每个 $p_{ij}(t)$ 在 $(0,\infty)$ 有连续有穷导数.

证明 由定理 1.2.3 并利用那里的符号，由(1.6.58) 知 $F=\varnothing$. 根据 $p_{ij}(t)=\Pi_{IJ}(t)u_j$ 及 $(\Pi_{IJ}(t))$ 的标准性，$0<u_j\leqslant 1$，知 $p'_{ij}(t)$

$= \Pi_{ij}(t)u_j$ 具有所要的性质.

注 从现在起，若无特别声明，以后提到的马氏过程均为标准马氏过程.

§7 Q 过程、Q − 矩阵和拟 Q − 矩阵的定义

上面我们证明了，对任一马氏过程 $P(t) = (p_{ij}(t))$，导数

$$\lim_{t\to 0}\frac{p_{ij}(t)-\delta_{ij}}{t} = q_{ij} \tag{1.7.1}$$

存在，并且

$$\begin{cases} 0 \leqslant q_{ij} < +\infty, \ (i \neq j). \\ \sum\limits_{j\neq i} q_{ij} \leqslant q_i = -q_{ii} \leqslant +\infty, \ (i \in E). \end{cases} \tag{1.7.2}$$

我们称 $Q = (q_{ij})$ 为过程的密度矩阵，而过程 $(p_{ij}(t))$ 则简称为 Q 过程，以表示它与 Q 有(1.7.1) 的关系.

定义 1.7.1 设 $Q = (q_{ij})$ 是 $E \times E$ 上的矩阵；称 Q 为 Q − 矩阵，如果它是某个马氏过程 $P(t)$ 的密度矩阵，即 $Q = P'(0)$；称 Q 为拟 Q − 矩阵，如果它满足(1.7.2).

由定义可知，一个 Q − 矩阵必定是一个拟 Q − 矩阵.

设 Q 是一个 Q − 矩阵或拟 Q − 矩阵，$i \in E$，若

$$\sum_{j\neq i} q_{ij} = q_i < +\infty. \tag{1.7.3}$$

则称 i 是保守的；若 Q 的每一状态均保守，则称 Q 是保守的。

§8 两个微分方程组

本节中恒设 Q 过程为全稳定的.

定理 1.8.1 若 $P(t) = (p_{ij}(t))$ 为全稳定 Q 过程，则

$$p'_{ij}(t) \geqslant \sum_{k\in E} q_{ik}p_{kj}(t), \quad (i, j \in E). \tag{1.8.1}$$

证明 由(1.1.3) 得

$$p_{ij}(t+h)=\sum_{k\in E}p_{ik}(h)p_{kj}(t),$$

于是

$$\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h}$$

$$=\frac{p_{ii}(h)-1}{h}p_{ij}(t)+\sum_{k\neq i}\frac{p_{ik}(h)}{h}p_{kj}(t).$$

在上式中令 $h\to 0$,由法都引理立得(1.8.1).

同理可证得下列定理.

定理 1.8.2 若 $P(t)=(p_{ij}(t))$ 为全稳定 Q 过程,则

$$p'_{ij}(t)\geqslant\sum_{k\in E}p_{ik}(t)q_{kj},\quad(i,j\in E).\tag{1.8.2}$$

在一切 Q 过程中,往往有些能使(1.8.1)或(1.8.2)中的"$\geqslant$"号成为"$=$"号,所以我们引入下列定义.

定义 1.8.1 方程组

$$p'_{ij}(t)=\sum_{k\in E}q_{ik}p_{kj}(t),\quad(i,j\in E)\tag{1.8.3}$$

和

$$p'_{ij}(t)=\sum_{k\in E}p_{ik}(t)q_{kj},\quad(i,j\in E)\tag{1.8.4}$$

分别叫做柯氏(柯尔莫哥洛夫)向后微分方程组和柯氏向前微分方程组.我们把满足(1.8.3)和(1.8.4)的 Q 过程分别叫做 B 型 Q 过程和 F 型 Q 过程.

定理 1.8.3 若 Q 保守,则任一 Q 过程 $P(t)=(p_{ij}(t))$ 满足柯氏向后微分方程组,即 $P(t)$ 是 B 型 Q 过程.

证明 不妨设 $E=\{0,1,2,\cdots\}$.我们分两种情况来证明定理.

(i) 设 $P(t)$ 是诚实的.在定理 1.6.1 的证明第一步中曾指出:对任意的 $t>0,i\in E$;任给 $\varepsilon>0$,存在正整数 k(可能与 t、i 和 ε 有关),使对一切 $0<a<t/4$,有

$$\sum_{j=k}^{\infty}\frac{|p_{ij}(t+a)-p_{ij}(t)|}{a}<\varepsilon.\tag{1.8.5}$$

注意 $P(t)$ 诚实，从而

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{p_{ij}(t+\alpha)-p_{ij}(t)}{\alpha}=0.$$

由(1.8.5)及上式可知，对一切 $n \geqslant k$，均有

$$\begin{aligned} -\varepsilon < & -\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{p_{ij}(t+\alpha)-p_{ij}(t)}{\alpha} \\ & =\sum_{j=0}^{n} \frac{p_{ij}(t+\alpha)-p_{ij}(t)}{\alpha}<\varepsilon. \end{aligned} \quad (1.8.6)$$

在(1.8.6)中让 $\alpha \rightarrow 0$，再注意到 ε 的任意性，得

$$\sum_{j \in E} p_{ij}^{\prime}(t)=0. \quad (1.8.7)$$

由 $i \in E, t>0$ 的任意性，得(1.8.7)对一切 $i \in E, t>0$ 均成立. 由定理 1.8.1 有

$$p_{ij}^{\prime}(t) \geqslant \sum_{k \in E} q_{ik} p_{kj}(t), \quad (i, j \in E). \quad (1.8.8)$$

若(1.8.8)式对某个 i_0 和 j_0 成立严格不等号，则由

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in E} \sum_{k \in E}\left|q_{ik} p_{kj}(t)\right| \\ \leqslant & \sum_{k \in E}\left|q_{ik}\right| \cdot \sum_{j \in E} p_{kj}(t) \\ \leqslant & \sum_{k \in E}\left|q_{ik}\right| \\ \leqslant & 2 q_i<+\infty \end{aligned}$$

及 Q 保守，得

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in E} p_{ij}^{\prime}(t) \\ > & \sum_{k \in E} q_{ik} \sum_{j \in E} p_{kj}(t) \\ = & \sum_{k \in E} q_{ik} \\ = & 0. \end{aligned}$$

这与(1.8.7)矛盾. 所以必有 $p_{ij}^{\prime}(t)=\sum_{k \in E} q_{ik} p_{kj}(t)$，即 $P(t)$ 为 B 型 Q 过程.

(ii) 设 $P(t)=(p_{ij}(t);\ i,j\in E)$ 不是诚实的. 我们按定理 1.1.1 中的办法作一个诚实的马氏过程 $\hat{P}(t)$，以 $\hat{Q}=(\hat{q}_{i,j};i,j\in\hat{E})$ 表示 $\hat{P}(t)$ 的 $Q-$ 矩阵. 显然有

$$\hat{q}_{ij}=\begin{cases}q_{ij}, & i,j\in E;\\ 0, & i=\Delta,j\in\hat{E}.\end{cases}\tag{1.8.9}$$

所以 $\hat{P}(t)$ 是一个全稳定马氏过程. 关于 $\hat{q}_{i\Delta}(i\in E)$，我们也可以计算出来. 事实上，由(1.8.2) 得

$$-\hat{q}_{ii}\geqslant\sum_{j\in\hat{E}\setminus\{i\}}\hat{q}_{ij},(i\in E),$$

即

$$-q_{ii}\geqslant\sum_{j\in E\setminus\{i\}}q_{ij}+\hat{q}_{i\Delta},(i\in E).\tag{1.8.10}$$

由(1.8.10) 和 Q 保守得 $\hat{q}_{i\Delta}\leqslant 0$. 于是由 $\hat{q}_{i\Delta}\geqslant 0$ 得

$$\hat{q}_{i\Delta}=0,(i\in E).$$

故

$$\begin{aligned}-\hat{q}_{ii}=-q_{ii}&=\sum_{j\in E\setminus\{i\}}q_{ij}\\&=\sum_{j\in\hat{E}\setminus\{i\}}\hat{q}_{ij},(i\in E);\\ \hat{q}_{\Delta\Delta}=0&=\sum_{j\in E}\hat{q}_{\Delta j}\\&=\sum_{j\in\hat{E}\setminus\{\Delta\}}\hat{q}_{\Delta j}.\end{aligned}$$

所以，由 $\hat{Q}$ 保守再注意 $\hat{P}(t)$ 是诚实的，使用(i) 中已证明的结果，得

$$\begin{aligned}p'_{ij}(t+s)&=\hat{p}'_{ij}(t+s)\\&=\sum_{k\in\hat{E}}\hat{q}_{ik}\hat{p}_{kj}(t)\\&=\sum_{k\in E}q_{ik}p_{kj}(t),\quad(i,j\in E).\end{aligned}$$

故 $P(t)$ 是 B 型 Q 过程，定理证毕.

注 对于带瞬时态的 Q 过程，其 B 型 Q 过程的定义是此处全稳定情况的一般化. 其定义见本书后面.

§9 讨论的核心问题

上面已经指出，任一马氏过程的密度矩阵是Q－矩阵.现在我们提出相反的问题，对任给的一个矩阵Q：

(1) 在什么条件下，Q成为Q－矩阵，即何时Q过程存在?

(2) 若已知Q过程存在，何时Q过程唯一?

(3) 若已知Q过程存在，如何实际求出Q过程?特别当Q过程不唯一时，如何实际构造出全部Q过程?

对于不中断、B型和F型Q过程也可提出上述类似的三个基本问题.

这三个基本问题就称为Q过程的构造论问题(前两个问题也称为Q－矩阵问题).此问题是Kolmogorov[1]于1931年提出来的，距今已有60多年的历史.在此期间，各国概率论工作者作了大量的工作，取得很大的进展，但也留下了一批尚未解决的问题.本书紧紧围绕上述三个基本问题，特别是前两个定性的基本问题来进行讨论，其中大部分成果是首次发表.

2 Q过程的拉氏变换

前面提出了 Q 过程构造理论的三大基本问题，但直接对 $(p_{ij}(t))$ 讨论往往不方便．在这一章里，我们给出 Q 过程，B 型 Q 过程和 F 型 Q 过程的拉氏变换．将 $(p_{ij}(t))$ 的研究归结为研究它的拉氏变换 $(r_{ij}(\lambda))$．

§1 可测马氏过程的拉氏变换

定义 2.1.1 设 $\Phi(t)$ 为定义于 $[0,\infty)$ 的可测函数．如果积分

$$f(\lambda) \triangleq \int_0^\infty e^{-\lambda t}\Phi(t)dt, \qquad (\lambda > 0).$$

存在且有限，则说 $\Phi(t)$ 的拉普拉斯(Laplace)变换存在，并称 $f(\lambda)(\lambda > 0)$ 为 $\Phi(t)$ 的拉普拉斯变换，简称为拉氏变换．

对于可测马氏过程 $P(t) = (p_{ij}(t))$，令

$$r_{ij}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}p_{ij}(t)dt, \qquad (\lambda > 0).$$

因 $0 \leqslant p_{ij}(t) \leqslant 1$，故上述积分存在且有限．记 $R(\lambda) = (r_{ij}(\lambda))$，并称 $R(\lambda)$ 为过程 $P(t)$ 的拉氏变换．

定理 2.1.1 一个可测马氏过程由它的拉氏变换相互唯一决定．

证明 由定理 1.2.1，(1.1.1) 和 (1.1.2) 知，对于可测马氏过程 $(p_{ij}(t))$，任一 $p_{ij}(t)$ 是有界函数；且在 $(0,\infty)$ 上连续．由有界连续函数由其拉氏变换唯一确定立得本定理．

由于上述定理，我们今后也把过程 $P(t)$ 的拉氏变换 $R(\lambda)$ 叫做一个马氏过程．

定义 2.1.2 矩阵族 $R(\lambda)=(r_{ij}(\lambda);i,j\in E),\lambda>0$,称为一个马氏预解式,如果它们满足下列条件:

(i) $R(\lambda)\geqslant \mathbf{0}, \quad (\lambda>0);$ (2.1.1)

$\lambda R(\lambda)\mathbf{1}\leqslant \mathbf{1}, \quad (\lambda>0);$ (2.1.2)

(ii) $R(\lambda)-R(\mu)+(\lambda-\mu)R(\lambda)R(\mu)=\mathbf{0}. \quad (\lambda,\mu>0).$ (2.1.3)

我们常称(i)为马氏预解式的范条件,(ii)为预解方程.

定义 2.1.3 称函数 $f(\lambda)(\lambda>0)$ 为完全单调函数,如果 $f(\lambda)$ 在 $(0,\infty)$ 内有各阶导数,且

$$(-1)^n\frac{d^nf(\lambda)}{d\lambda^n}\geqslant 0,\quad (n=0,1,2,\cdots). \tag{2.1.4}$$

定理 2.1.2 设 $R(\lambda)$ 是一个马氏预解式,则

(i) $\dfrac{d^nR(\lambda)}{d\lambda^n}=(-1)^nn!R^{n+1}(\lambda), \quad (n\geqslant 0);$ (2.1.5)

(ii) $0\leqslant(-1)^n\dfrac{d^nr_{ij}(\lambda)}{d\lambda^n}\leqslant\dfrac{n!}{\lambda^{n+1}}(i,j\in E;n\geqslant 0);$ (2.1.6)

(iii) $0\leqslant(-1)^n\dfrac{d^n}{d\lambda^n}\Big(\sum\limits_{j\in E}r_{ij}(\lambda)\Big)\leqslant\dfrac{n!}{\lambda^{n+1}}, \quad (i\in E,n\geqslant 0).$ (2.1.7)

证明 (i) 由(2.1.2)得

$$\frac{R(\lambda)-R(\mu)}{\lambda-\mu}=-R(\lambda)R(\mu). \tag{2.1.8}$$

在上式中令 $\mu\to\lambda$,并注意(2.1.1)、(2.1.2)和 $r_{ij}(\mu)$ 关于 $\mu>0$ 连续,立得

$$\frac{dR(\lambda)}{d\lambda}=-R^2(\lambda). \tag{2.1.9}$$

又由(2.1.3)得 $R(\lambda)R(\mu)=R(\mu)R(\lambda)$.故

$$\begin{aligned}&\frac{R^n(\lambda)-R^n(\mu)}{\lambda-\mu}\\&=\frac{R(\lambda)-R(\mu)}{\lambda-\mu}[R^{n-1}(\lambda)+R^{n-2}(\lambda)R(\mu)\\&\quad+\cdots+R^{n-1}(\mu)].\end{aligned} \tag{2.1.10}$$

在上式中令 $\mu\to\lambda$，并注意(2.1.1)、(2.1.2) 和(2.1.9)，得

$$\frac{dR^n(\lambda)}{d\lambda}=-nR^{n+1}(\lambda). \tag{2.1.11}$$

由(2.1.9)、(2.1.11) 和归纳法立得(2.1.5).

(ii) 由(2.1.2) 及归纳法得

$$R^n(\lambda)1=\frac{\lambda^{n-1}R^{n-1}(\lambda)\lambda R(\lambda)1}{\lambda^n}\leqslant\frac{\lambda^{n-1}R^{n-1}(\lambda)1}{\lambda^n}\leqslant\frac{1}{\lambda^n}.$$

若记 $R^n(\lambda)$ 的元素为 $r_{ij}^{(n)}(\lambda)$，上式即

$$0\leqslant\sum_{j\in E}r_{ij}^{(n)}(\lambda)\leqslant\frac{1}{\lambda^n},\quad (i\in E). \tag{2.1.12}$$

更有

$$0\leqslant r_{ij}^{(n)}(\lambda)\leqslant\frac{1}{\lambda^n}. \tag{2.1.13}$$

由(2.1.5) 及(2.1.13) 得

$$0\leqslant(-1)^n\frac{d^n}{d\lambda^n}r_{ij}(\lambda)\leqslant\frac{n!}{\lambda^{n+1}}.$$

(2.1.6) 得证.

(iii) 由(2.1.8) 和(2.1.10) 知 $R^n(\lambda)\downarrow(\lambda\uparrow),n=1,2,\cdots$. 从而对每一 n，$\sum\limits_{j\in E}r_{ij}^{(n)}(\lambda)$ 是 $\lambda\in(0,\infty)$ 的连续函数. 由 Dini 定理，对任意 t、T，$0<t<T<\infty$，$\sum\limits_{j\in E}r_{ij}^{(n)}(\lambda)$ 在$[t,T]$ 中一致收敛. 由(2.1.5) 知，在$[t,T]$ 中，$\sum\limits_{j\in E}\frac{d^n}{d\lambda^n}r_{ij}(\lambda)=(-1)^n n!\sum\limits_{j\in E}r_{ij}^{(n+1)}(\lambda)$ 一致收敛. 故对任意 n 有

$$(-1)^n\frac{d^n}{d\lambda^n}\Big(\sum_{j\in E}r_{ij}(\lambda)\Big)=\sum_{j\in E}(-1)^n\frac{d^n}{d\lambda^n}r_{ij}(\lambda)=\sum_{j\in E}n!\,r_{ij}^{(n+1)}(\lambda).$$

再由(2.1.12) 得

$$0\leqslant(-1)^n\frac{d^n}{d\lambda^n}\Big(\sum_{j\in E}r_{ij}(\lambda)\Big)\leqslant\frac{n!}{\lambda^{n+1}}.$$

从而(2.1.7) 获证.

定理 2.1.3 $R(\lambda)=(r_{ij}(\lambda))$ 为某个可测马氏过程 $P(t)=(p_{ij}(t))$ 的拉氏变换当且仅当 $R(\lambda)$ 是一个马氏预解式. 此外

$\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda r_{ij}(\lambda)=\lim\limits_{t\to 0}p_{ij}(t)$，过程 $P(t)$ 为诚实的当且仅当 $\lambda R(\lambda)1=1$.

证明 先证必要性.

设 $R(\lambda)$ 为可测过程 $P(t)$ 的拉氏变换，由 $P(t)$ 的范条件得(2.1.1)和(2.1.2). 我们有

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty e^{-\mu s}p_{ij}(t+s)ds\\&=\int_t^\infty e^{-\mu(s-t)}p_{ij}(s)ds\\&=e^{\mu t}r_{ij}(\mu)-\int_0^t e^{\mu(t-s)}p_{ij}(s)ds.\end{aligned}$$

如 $\lambda>\mu$，则

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty e^{-\lambda t}dt\int_0^\infty e^{-\mu s}p_{ij}(t+s)ds\\&=\int_0^\infty e^{-(\lambda-\mu)t}r_{ij}(\mu)dt-\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\mu(t-s)}p_{ij}(s)dsdt\\&=\frac{1}{\lambda-\mu}(r_{ij}(\mu)-r_{ij}(\lambda)).\end{aligned}$$

但是

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\mu s}p_{ij}(t+s)dsdt\\&=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\mu s}\sum_{k\in E}p_{ik}(t)p_{kj}(s)dsdt\\&=\sum_{k\in E}r_{ik}(\lambda)r_{kj}(\mu).\end{aligned}$$

故

$$\frac{1}{\lambda-\mu}(r_{ij}(\mu)-r_{ij}(\lambda))=\sum_{k\in E}r_{ik}(\lambda)r_{kj}(\mu).\qquad(2.1.14)$$

此即

$$R(\lambda)-R(\mu)+(\lambda-\mu)R(\lambda)R(\mu)=0,\qquad(\lambda,\mu>0).$$

(2.1.3)得证.

再证充分性.

设 $R(\lambda)$ 为一马氏预解式. 由定理 2.1.2 及“有界连续函数的拉氏变换是完全单调的可导出此函数非负”知，存在可测函数

$f_{ij}(t)(t>0;i,j\in E)$，满足条件

$$0\leqslant f_{ij}(t)\leqslant 1; \tag{2.1.15}$$

$$0\leqslant \sum_{j\in E} f_{ij}(t)\leqslant 1; \tag{2.1.16}$$

使得 $r_{ij}(\lambda)$ 是 $f_{ij}(t)$ 的拉氏变换. 由预解方程得

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda s-\mu t} f_{ij}(s+t)dsdt\\&=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda s-\mu t}\sum_{k\in E} f_{ik}(s)f_{kj}(t)dsdt.\end{aligned} \tag{2.1.17}$$

从而，除去一个 (s,t) 零测集外，下式成立

$$f_{ij}(s+t)=\sum_{k\in E} f_{ik}(s)f_{kj}(t). \tag{2.1.18}$$

对 $t>0$，定义

$$\begin{aligned}p_{ij}(t)&=\frac{1}{t}\sum_{k\in E}\int_0^t f_{ik}(u)f_{kj}(t-u)du\\&=\frac{1}{t}\int_0^t\Big(\sum_{k\in E} f_{ik}(u)f_{kj}(t-u)\Big)du.\end{aligned} \tag{2.1.19}$$

因 (2.1.18) 对几乎处处 (s,t) 成立，故对几乎所有 $t>0$，(2.1.19) 中的被积函数对几乎所有的 $u\in(0,t)$ 等于 $f_{ij}(t)$. 从而几乎处处有

$$p_{ij}(t)=f_{ij}(t). \tag{2.1.20}$$

同时，由(2.1.16) 知

$$p_{ij}(t)=\frac{1}{t}\sum_{k\in E} g_k(t), \tag{2.1.21}$$

其中 $g_k(t)=\int_0^t f_{ik}(u)f_{kj}(t-u)du$ 为连续函数.

由于级数 $\sum_{k\in E} g_k(t)$ 被 $\sum_{k\in E}\int_0^t f_{ik}(u)du$ 所控制，而后者的每项均为非负连续函数，且其和 $\sum_{k\in E}\int_0^t f_{ik}(u)du=\int_0^t\Big(\sum_{k\in E} f_{ik}(u)\Big)du$ 为连续函数. 由 Dini 定理，在每一有限区间$[0,T]$中，级数 $\sum_{k\in E}\int_0^t f_{ik}(u)du$ 一致收敛，从而 $\sum_{k\in E} g_k(t)$ 一致收敛，由(2.1.19) 知 $p_{ij}(t)$ 在$(0,\infty)$ 连续，

再由(2.1.15)和(2.1.20)知

$$0 \leqslant p_{ij}(t) \leqslant 1, \qquad (t>0). \tag{2.1.22}$$

由(2.1.16)和(2.1.20)知，对几乎所有 $t>0$，有

$$0 \leqslant \sum_{j \in E} p_{ij}(t) \leqslant 1. \tag{2.1.23}$$

由(2.1.18)与(2.1.20)知，对几乎所有的(s,t)，有

$$p_{ij}(s+t) = \sum_{k \in E} p_{ik}(s) p_{kj}(t). \tag{2.1.24}$$

往证(2.1.23)对所有 $t>0$ 成立，(2.1.24)对所有 $s,t>0$ 成立.

$\forall\, i \in E$，若取 E 的有限子集 $E_n \uparrow E(n \to \infty)$，那么由(2.1.23)，对几乎所有 $t>0$，$0 \leqslant \sum\limits_{j \in E_n} p_{ij}(t) \leqslant 1$ 成立. 注意 E_n 为有限集，从而 $\sum\limits_{j \in E_n} p_{ij}(t)$ 为 $t>0$ 的连续函数. 故 $0 \leqslant \sum\limits_{j \in E_n} p_{ij}(t) \leqslant 1$ 对一切 $t>0$ 成立. 由于 $\sum\limits_{j \in E} p_{ij}(t) = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{j \in E_n} p_{ij}(t)$，因此，我们证明了对所有 $t>0$ 有

$$0 \leqslant \sum_{j \in E} p_{ij}(t) \leqslant 1. \tag{2.1.25}$$

由(2.1.25)，$\sum\limits_{k \in E} p_{ik}(s) p_{kj}(t) \leqslant \sum\limits_{k \in E} p_{ik}(s) \leqslant 1$ 对所有 $s>0, t>0$ 成立. 从而 $\forall\, s>0$，$p_{ij}(s+t)$，$\sum\limits_{k \in E} p_{ik}(s) p_{kj}(t)$ 均是 $t>0$ 的连续函数. 由(2.1.24)知，存在$(0,\infty)$的零测子集 Z，使得对 $s \overline{\in} Z, s>0$ 以及一切 $t>0$，有

$$p_{ij}(s+t) = \sum_{k \in E} p_{ik}(s) p_{kj}(t). \tag{2.1.26}$$

注意 Z 是零测集，从而 $\forall\, s \in Z$，必存在 $0<s'<s$ 使 $s' \overline{\in} Z$，$s-s' \overline{\in} Z$. 因此，对所有 $t>0$，由(2.1.26)，有

$$\begin{aligned}
&\sum_{k \in E} p_{ik}(s) p_{kj}(t) \\
&= \sum_{k \in E} \Big(\sum_{l \in E} p_{il}(s') p_{lk}(s-s') \Big) p_{kj}(t) \\
&= \sum_{l \in E} p_{il}(s') \Big(\sum_{k \in E} p_{lk}(s-s') p_{kj}(t) \Big)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{l \in E} p_{il}(s')p_{lj}(s - s' + t)$$

$$= p_{ij}(s + t).$$

从而证明了对所有 $s > 0, t > 0$ 有

$$p_{ij}(s + t) = \sum_{k \in E} p_{ik}(s)p_{kj}(t).$$

定义 $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$. 由(2.1.22)、(2.1.25) 和(2.1.26) 知$(p_{ij}(t))$ 是一个可测马氏过程. 且由(2.1.20) 有

$$r_{ij}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f_{ij}(t)dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} p_{ij}(t)dt.$$

故$(p_{ij}(t))$ 以 $R(\lambda)$ 为其拉氏变换.

设 $R(\lambda)$ 为 $P(t)$ 的拉氏变换,则

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda \to \infty} \lambda r_{ij}(\lambda) &= \lim_{\lambda \to \infty} \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} p_{ij}(t)dt \\
&= \lim_{\lambda \to \infty} \int_0^\infty e^{-s} p_{ij}\left(\frac{s}{\lambda}\right)ds \\
&= \int_0^\infty e^{-s} \lim_{\lambda \to \infty} p_{ij}\left(\frac{s}{\lambda}\right)ds \\
&= \int_0^\infty e^{-s} \lim_{t \to 0} p_{ij}(t)ds \\
&= \lim_{t \to 0} p_{ij}(t).
\end{aligned}$$

最后,证明 $P(t)$ 诚实当且仅当 $\lambda R(\lambda)1 = 1, (\lambda > 0)$. 必要性是显然的. 往证充分性. 设 $\lambda R(\lambda)1 = 1, (\lambda > 0)$,即对任意 $i \in E$ 有 $\lambda \sum_{j \in E} r_{ij}(\lambda) = 1, (\lambda > 0)$,则

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} \sum_{j \in E} p_{ij}(t)dt = 1.$$

由上式知,对几乎一切 $t > 0$,有

$$\sum_{j \in E} p_{ij}(t) = 1.$$

但由定理 1.2.3 的系, $\sum_{j \in E} p_{ij}(t)$ 是$(0, \infty)$ 上连续函数,故

$$\sum_{j \in E} p_{ij}(t) = 1, (t > 0).$$

注意到 $p_{ij}(0)=\delta_{ij}$，我们有

$$\sum_{j\in E} p_{ij}(t)=1,(t\geqslant 0).$$

从而 $P(t)$ 为诚实过程.

§2　Q 预解式

定义 2.2.1　一个马氏预解式称为标准的，如果它还满足下列条件

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda R(\lambda)=I, \tag{2.2.1}$$

其中 I 为 $E\times E$ 上的单位矩阵.

由定理 2.1.3 立得下列定理.

定理 2.2.1　一个马氏预解式 $R(\lambda)$ 是一个标准马氏过程的拉氏变换当且仅当 $R(\lambda)$ 是标准的.

定义 2.2.2　任给一个 $Q-$ 矩阵 Q，一个标准马氏预解式 $R(\lambda)$ 叫做一个 Q 预解式，如果它还满足下列条件

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(\lambda R(\lambda)-I)=Q. \tag{2.2.2}$$

以后我们称条件(2.2.2)为 Q 条件.

定义 2.2.3　设 Q 为全稳定 $Q-$ 矩阵. 马氏预解式 $R(\lambda)=(r_{ij}(\lambda))$ 叫做一个 B 型 Q 预解式，如果它满足下列条件

$$(\lambda I-Q)R(\lambda)=I. \tag{2.2.3}$$

引理 2.2.1　B 型 Q 预解式必是 Q 预解式.

证明　设 $R(\lambda)$ 是一个 B 型 Q 预解式. 由预解方程知，$r_{ij}(\lambda)\downarrow(\lambda\uparrow\infty)$. 由范条件知

$$0\leqslant r_{ij}(\lambda)\leqslant\frac{1}{\lambda}.$$

于是

$$r_{ij}(\lambda)\downarrow 0,(\lambda\uparrow\infty).$$

故由(2.2.3)得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda r_{ij}(\lambda)$$

$$=\lim_{\lambda\to\infty}(\delta_{ij}-q_i r_{ij}(\lambda)+\sum_{k\neq i}q_{ik}r_{kj}(\lambda))$$

$$=\delta_{ij}. \tag{2.2.4}$$

由(2.2.3)又有

$$\lambda(\lambda r_{ij}(\lambda)-\delta_{ij})=\sum_{k\in E}q_{ik}\lambda r_{kj}(\lambda).$$

但

$$\sum_{k\in E}|q_{ik}\lambda r_{kj}(\lambda)|=\sum_{k\in E}|q_{ik}|\lambda r_{kj}(\lambda)$$

$$\leqslant\sum_{k\in E}|q_{ik}|$$

$$\leqslant 2q_i<+\infty.$$

所以由(2.2.4)和控制收敛定理得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(\lambda r_{ij}(\lambda)-\delta_{ij})$$

$$=\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{k\in E}q_{ik}\lambda r_{kj}(\lambda)$$

$$=\sum_{k\in E}q_{ik}\lim_{\lambda\to\infty}\lambda r_{kj}(\lambda)$$

$$=\sum_{k\in E}q_{ik}\delta_{kj}$$

$$=q_{ij}.$$

从而条件(2.2.2)成立. 所以 $R(\lambda)$ 是一个 Q 预解式.

定义 2.2.4 设 Q 为全稳定 Q－矩阵. 一个马氏预解式 $R(\lambda)=(r_{ij}(\lambda))$ 叫做一个 F 型 Q 预解式，如果它还满足下列条件

$$R(\lambda)(\lambda I-Q)=I. \tag{2.2.5}$$

引理 2.2.2 F 型 Q 预解式必是 Q 预解式.

证明 设 $R(\lambda)$ 是一个 F 型 Q 预解式. 仍由预解方程和范条件知

$$r_{ij}(\lambda)\downarrow 0,(\lambda\uparrow\infty). \tag{2.2.6}$$

由(2.2.5)，(2.2.6)和单调收敛定理得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda r_{ij}(\lambda)=\delta_{ij}$$

$$=\lim_{\lambda\to\infty}(-r_{ij}(\lambda)q_j)+\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{k\neq j}r_{ik}(\lambda)q_{kj}$$

$$=0.$$

又由预解方程得

$$r_{ik}(\lambda)=r_{ik}(\mu)+(\mu-\lambda)\sum_{s\in E}r_{is}(\mu)r_{sk}(\lambda).$$

所以

$$\sum_{k\neq j}r_{ik}(\lambda)q_{kj}$$

$$=\sum_{k\neq j}r_{ik}(\mu)q_{kj}+(\mu-\lambda)\sum_{s\in E}r_{is}(\mu)\sum_{k\neq j}r_{sk}(\lambda)q_{kj},$$

即

$$\sum_{k\neq j}r_{ik}(\lambda)q_{kj}+\sum_{s\in E}r_{is}(\mu)\sum_{k\in E}\lambda r_{sk}(\lambda)q_{kj}$$

$$=\sum_{k\neq j}r_{ik}(\mu)q_{kj}+\mu\sum_{s\in E}r_{is}(\mu)\sum_{k\in E}r_{sk}(\lambda)q_{kj}. \qquad (2.2.7)$$

由(2.2.6)及单调收敛定理得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{k\neq j}r_{ik}(\lambda)q_{kj}=\sum_{k\neq j}\lim_{\lambda\to\infty}r_{ik}(\lambda)q_{kj}$$

$$=0 \qquad (2.2.8)$$

及

$$\lim_{\lambda\to\infty}\mu\sum_{s\in E}r_{is}(\mu)\sum_{k\in E}r_{sk}(\lambda)q_{kj}$$

$$=\mu\sum_{s\in E}r_{is}(\mu)\sum_{k\in E}\lim_{\lambda\to\infty}r_{sk}(\lambda)q_{kj}$$

$$=0. \qquad (2.2.9)$$

根据(2.2.7)－(2.2.9)

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{s\in E}r_{is}(\mu)\sum_{k\neq j}\lambda r_{sk}(\lambda)q_{kj}=\sum_{s\neq j}r_{is}(\mu)q_{sj}. \qquad (2.2.10)$$

固定 $s_0, j\in E$，选 $\lambda_n\to\infty$，使 $\lim\limits_{\lambda_n\to\infty}\sum\limits_{k\neq j}\lambda_n r_{s_0k}(\lambda_n)q_{kj}=a_{s_0j}$ 存在. 于是

$$a_{s_0j}=\lim_{\lambda_n\to\infty}\sum_{k\neq j}\lambda_n r_{s_0k}(\lambda_n)q_{kj}$$

$$\geqslant\sum_{k\neq j}\lim_{\lambda_n\to\infty}\lambda_n r_{s_0k}(\lambda_n)q_{kj}$$

$$=\begin{cases}0, & s_0=j;\\ q_{s_0j}, & s_0\neq j.\end{cases} \tag{2.2.11}$$

由(2.2.10)得

$$\sum_{s\neq j} r_{is}(\mu)q_{sj}=\lim_{\lambda_n\to\infty}\sum_{s\in E} r_{is}(\mu)\sum_{k\neq j}\lambda_n r_{sk}(\lambda_n)q_{kj}$$

$$\geqslant \lim_{\lambda_n\to\infty} r_{is_0}(\mu)\sum_{k\neq j}\lambda_n r_{s_0k}(\lambda_n)q_{kj}$$

$$+\lim_{\lambda_n\to\infty}\sum_{s\neq s_0} r_{is}(\mu)\sum_{k\neq j}\lambda_n r_{sk}(\lambda_n)q_{kj}$$

$$\geqslant r_{is_0}(\mu)q_{s_0j}+\sum_{s\neq s_0} r_{is}(\mu)\sum_{k\neq j}\lim_{\lambda_n\to\infty}\lambda_n r_{sk}(\lambda_n)q_{kj}$$

$$=r_{is_0}(\mu)q_{s_0j}+\sum_{s\neq s_0,j} r_{is}(\mu)q_{sj}, \tag{2.2.12}$$

若 $s_0\neq j$,则由上式得

$$r_{is_0}(\mu)q_{s_0j}\geqslant r_{is_0}(\mu)a_{s_0j}\quad (i\in E). \tag{2.2.13}$$

特别,

$$r_{s_0s_0}(\mu)q_{s_0j}\geqslant r_{s_0s_0}(\mu)a_{s_0j}.$$

因为

$$\mu r_{s_0s_0}(\mu)\to 1,\quad (\mu\to\infty). \tag{2.2.14}$$

所以可选一个 μ_0,使 $r_{s_0s_0}(\mu_0)>0$,从而有

$$q_{s_0j}\geqslant a_{s_0j}. \tag{2.2.15}$$

由(2.2.11)和(2.2.15)得

$$a_{s_0j}=q_{s_0j}.$$

从而 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\sum\limits_{k\neq j}\lambda r_{s_0k}(\lambda)q_{kj}$ 存在且满足

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{k\neq j}\lambda r_{s_0k}(\lambda)q_{kj}$$

$$=q_{s_0j}$$

$$=\sum_{k\neq j}\lim_{\lambda\to\infty}\lambda r_{s_0k}(\lambda)q_{kj},\quad (s_0\neq j). \tag{2.2.16}$$

若 $s_0=j$,由(2.2.12)得

$$r_{jj}(\mu)a_{jj}\leqslant 0.$$

再由(2.2.14)及 $a_{jj} \geqslant 0$ 得

$$a_{jj} = 0,$$

所以 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\sum\limits_{k\neq j}\lambda r_{jk}(\lambda)q_{kj}$ 存在且满足

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{k\neq j}\lambda r_{jk}(\lambda)q_{kj} = 0 = \sum_{k\neq j}\lim_{\lambda\to\infty}\lambda r_{jk}(\lambda)q_{kj}. \quad (2.2.17)$$

综合(2.2.16)和(2.2.17)得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{k\neq j}\lambda r_{ik}(\lambda)q_{kj} = \sum_{k\neq j}\lim_{\lambda\to\infty}\lambda r_{ik}(\lambda)q_{kj}, (i,j\in E). \quad (2.2.18)$$

由(2.2.5)和(2.2.18)得

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(\lambda r_{ij}(\lambda) - \delta_{ij}) &= \lim_{\lambda\to\infty} q_{jj}\lambda r_{ij}(\lambda) + \lim_{\lambda\to\infty}\sum_{k\neq j}\lambda r_{ik}(\lambda)q_{kj} \\ &= \lim_{\lambda\to\infty} q_{jj}\lambda r_{ij}(\lambda) + \sum_{k\neq j}\lim_{\lambda\to\infty}\lambda r_{ik}(\lambda)q_{kj} \\ &= \sum_{k\in E}\lim_{\lambda\to\infty}\lambda r_{ik}(\lambda)q_{kj} \\ &= q_{ij}.\end{aligned}$$

所以 Q 条件成立. 故 $R(\lambda)$ 是一个 Q 预解式.

§3 Q 过程的拉氏变换的判别准则

定理 2.3.1 设 Q 为一个 $Q-$ 矩阵. 一族矩阵 $R(\lambda) = (r_{ij}(\lambda))(\lambda > 0)$ 为某个 Q 过程 $P(t) = (p_{ij}(t))$ 的拉氏变换的充要条件是 $R(\lambda)$ 为一个 Q 预解式.

证明 先证必要性.

设 $P(t) = (p_{ij}(t))$ 为一个 Q 过程, $R(\lambda)$ 表示它的拉氏变换. 由定理 2.2.1, $R(\lambda)$ 是一个标准马氏预解式. 由 $|p_{ij}(t) - \delta_{ij}| \leqslant 2$ 及 $p'_{ij}(0) = q_{ij}$ 知, 当 $i\neq j$, 或者 $i = j$ 且 i 为稳定状态时, 必存在 $M > 0$, 使

$$\frac{|p_{ij}(t) - \delta_{ij}|}{t} \leqslant M \quad (t > 0).$$

于是由控制收敛定理得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(\lambda r_{ij}(\lambda)-\delta_{ij})=\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\infty\lambda^2e^{-\lambda t}(p_{ij}(t)-\delta_{ij})dt$$

$$=\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\infty\frac{t\lambda}{t}e^{-t}(p_{ij}(\frac{t}{\lambda})-\delta_{ij})dt$$

$$=\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\infty te^{-t}\frac{p_{ij}(\frac{t}{\lambda})-\delta_{ij}}{\frac{t}{\lambda}}dt$$

$$=\int_0^\infty te^{-t}\lim_{\lambda\to\infty}\frac{p_{ij}(\frac{t}{\lambda})-\delta_{ij}}{\frac{t}{\lambda}}dt$$

$$=\int_0^\infty te^{-t}\lim_{s\to 0}\frac{p_{ij}(s)-\delta_{ij}}{s}dt$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{p_{ij}(s)-\delta_{ij}}{s}$$

$$=q_{ij}. \qquad (2.3.1)$$

当 i 为瞬时态时，对任意充分大的 $K>0$，均存在 $t_K>0$，使

$$\frac{p_{ii}(t)-1}{t}<-K,(0<t\leqslant t_K).$$

从而对于充分大的 $T>0$，当 $0<t\leqslant T,\lambda>\frac{T}{t_K}$ 时，有

$$\frac{p_{ii}(\frac{t}{\lambda})-1}{\frac{t}{\lambda}}<-K.$$

从而由(2.3.1)中前三个等式同样可以导出(2.3.1)中最后的等式.

因此，$R(\lambda)$ 为一个 Q 预解式.

往证充分性.

设 $R(\lambda)$ 为一个 Q 预解式，则 $R(\lambda)$ 是一个标准马氏预解式. 由定理 2.2.1，存在一个标准马氏过程 $P(t)=(p_{ij}(t))$，使得 $R(\lambda)$ 是 $P(t)$ 的拉氏变换，逆转(2.3.1)式的证明，得

$$\lim_{t\to 0}\frac{p_{ij}(t)-\delta_{ij}}{t}=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(\lambda r_{ij}(\lambda)-\delta_{ij})=q_{ij}.$$

故 $P(t)$ 是一个 Q 过程. 充分性证毕.

§4　B 型 Q 过程的拉氏变换的判别准则

本节中恒设 Q — 矩阵 Q 是全稳定的.

定理 2.4.1　设 Q 为一个 Q — 矩阵. 一族矩阵 $R(\lambda)=(r_{ij}(\lambda))(\lambda>0)$ 为某个 B 型 Q 过程的拉氏变换的充要条件是 $R(\lambda)$ 为一个 B 型 Q 预解式.

证明　先证必要性.

设 $P(t)$ 为一个 B 型 Q 过程, $R(\lambda)$ 表示其拉氏变换. 由定理 2.3.1 和(1.8.3) 知 $R(\lambda)$ 是一个 B 型 Q 预解式.

再证充分性.

设 $R(\lambda)$ 是一个 B 型 Q 预解式. 由引理 2.2.1 知, $R(\lambda)$ 是一个 Q 预解式. 于是由定理 2.3.1 知, 存在唯一的过程 $P(t)$, 它以 $R(\lambda)$ 为其拉氏变换. 由(2.2.3) 得

$$\lambda r_{ij}(\lambda)-\delta_{ij}=\sum_{k\in E}q_{ik}r_{kj}(\lambda).$$

但

$$\lambda r_{ij}(\lambda)-\delta_{ij}=\int_0^\infty e^{-\lambda t}p'_{ij}(t)dt.$$

于是由 $p_{ij}(t)\geqslant 0, q_{ij}\geqslant 0, (i\neq j)$ 及单调收敛定理得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\lambda t}p'_{ij}(t)dt&=\sum_{k\in E}q_{ik}\int_0^\infty e^{-\lambda t}p_{kj}(t)dt\\&=\int_0^\infty e^{-\lambda t}q_{ii}p_{ij}(t)dt+\sum_{k\neq i}\int_0^\infty e^{-\lambda t}q_{ik}p_{kj}(t)dt\\&=\int_0^\infty e^{-\lambda t}q_{ii}p_{ij}(t)dt+\int_0^\infty e^{-\lambda t}\sum_{k\neq i}q_{ik}p_{kj}(t)dt\\&=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\sum_{k\in E}q_{ik}p_{kj}(t)dt.\end{aligned}$$

由 $|\sum_{k\in E}q_{ik}p_{kj}(t)|\leqslant\sum_{k\in E}|q_{ik}|\leqslant 2q_i<\infty$ 知，$\sum_{k\in E}q_{ik}p_{kj}(t)$ 是 t 的有界连续函数. 由(1.4.1)知，$|p'_{ij}(t)|\leqslant q_i(j\in E,t\geqslant 0)$. 故 $p'_{ij}(t)$ 也是 t 的有界连续函数. 于是

$$p'_{ij}(t)=\sum_{k\in E}q_{ik}p_{kj}(t).$$

从而 $P(t)$ 是一个 B 型 Q 过程，它以 $R(\lambda)$ 为其拉氏变换.

§5 F 型 Q 过程的拉氏变换的判别准则

本节中同样恒设 Q - 矩阵 Q 是全稳定的.

定理 2.5.1 设 Q 为一个 Q - 矩阵. 一族矩阵 $R(\lambda)=(r_{ij}(\lambda))(\lambda>0)$ 为某个 F 型 Q 过程的拉氏变换的充要条件是 $R(\lambda)$ 是一个 F 型 Q 预解式.

证明 先证必要性. 设 $P(t)$ 为一个 F 型 Q 过程，以 $R(\lambda)$ 表示 $P(t)$ 的拉氏变换. 由定理 2.3.1 和(1.8.4)知 $R(\lambda)$ 是一个 F 型 Q 预解式.

往证充分性 设 $R(\lambda)(\lambda>0)$ 是一个 F 型 Q 预解式. 由引理 2.2.2 知，$R(\lambda)$ 是一个 Q 预解式. 于是由定理 2.3.1，存在唯一的 Q 过程 $P(t)$，以 $R(\lambda)$ 为其拉氏变换. 由(2.2.5)得

$$r_{ij}(\lambda)=\frac{\delta_{ij}}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}r_{ij}(\lambda)q_j+\frac{1}{\lambda}\sum_{k\neq j}r_{ik}(\lambda)q_{kj}. \qquad (2.5.1)$$

于是，由 $p_{ij}(t)\geqslant 0,q_{ij}\geqslant 0(i\neq j)$ 及单调收敛定理得

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}p_{ij}(t)dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-\lambda t}[\delta_{ij}-q_j\int_0^t p_{ij}(s)ds+\int_0^t\sum_{k\neq j}p_{ik}(s)q_{kj}ds]dt, \quad (2.5.2)$$

即

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}[p_{ij}(t)-\delta_{ij}+q_j\int_0^t p_{ij}(s)ds-\int_0^t\sum_{k\neq j}p_{ik}(s)q_{kj}ds]dt=0.$$

$$(2.5.3)$$

由定理 1.8.2 知

$$p_{ij}'(t) \geqslant - p_{ij}(t)q_j + \sum_{k\neq j} p_{ik}(t)q_{kj}. \tag{2.5.4}$$

于是

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \sum_{k\neq j} p_{ik}(t)q_{kj} \\ &\leqslant p_{ij}'(t) + q_j p_{ij}(t) \\ &\leqslant q_i + q_j < \infty. \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

从而

$$0 \leqslant \int_0^t \sum_{k\neq j} p_{ik}(s)q_{kj}ds \leqslant (q_i + q_j)t < \infty. \tag{2.5.6}$$

于是由(2.5.5),(2.5.6)和数学分析中的定理知

$$p_{ij}(t) - \delta_{ij} + q_j \int_0^t p_{ij}(s)ds - \int_0^t \sum_{k\neq j} p_{ik}(s)q_{kj}ds$$

是连续函数. 由(2.5.4)知它还是非负的. 故由(2.5.3)得

$$p_{ij}(t) - \delta_{ij} + q_j \int_0^t p_{ij}(s)ds - \int_0^t \sum_{k\neq j} p_{ik}(s)q_{kj}ds = 0,$$

即

$$p_{ij}(t) = \delta_{ij} - q_j \int_0^t p_{ij}(s)ds + \int_0^t \sum_{k\neq j} p_{ik}(s)q_{kj}ds. \tag{2.5.7}$$

由(2.5.6),(2.5.7)和数学分析中的定理,存在零测集 $A \subset [0, \infty)$,使

$$p_{ij}'(t) = \sum_{k\in E} p_{ik}(t)q_{kj}, (t \overline{\in} A). \tag{2.5.8}$$

取 $0 < t \overline{\in} A$,对于 $h > 0$,由(2.5.5)及定理1.6.2得

$$\begin{aligned} &\sum_{k\in E} p_{ik}(t+h)q_{kj} \\ =& \sum_{k\neq j} p_{ik}(t+h)q_{kj} + p_{ij}(t+h)q_{jj} \\ =& \sum_{k\neq j}\Big(\sum_{s\in E} p_{is}(h)p_{sk}(t)\Big)q_{kj} + \sum_{s\in E} p_{is}(h)p_{sj}(t)q_{jj} \\ =& \sum_{s\in E} p_{is}(h)\sum_{k\neq j} p_{sk}(t)q_{kj} + \sum_{s\in E} p_{is}(h)p_{sj}(t)q_{jj} \\ =& \sum_{s\in E} p_{is}(h)\sum_{k\in E} p_{sk}(t)q_{kj} \end{aligned}$$

$$= \sum_{s \in E} p_{is}(h) p'_{sk}(t)$$

$$= p'_{ik}(t + h).$$

所以$t + h \in A$. 由于A是零测集，故t可取得任意小. 所以对于一切$t > 0$，(2.5.8) 成立. 由于$P(t)$是Q过程，故(2.5.8) 对$t = 0$也成立. 所以(2.5.8) 对一切$t \geqslant 0$成立. 从而$P(t)$为F型Q过程，且以$R(\lambda)$为其拉氏变换.

3 分解定理

本章给出 Q 过程的禁止概率分解定理及其逆定理(统称为分解定理). 它们是 Q 过程构造论中非常重要而且有效的工具之一,本书将经常用到.

§1 中先陈述广义协调族的概念及有关的性质和结果,作为介绍分解定理的准备. §2 中给出一维分解定理. §3、§4 中给出多维(有限维)分解定理. §5 中介绍 Q 过程的某些性质.

§1 广义协调族

设 E 为可列集,在本书中,M_E 表示定义在 E 上的有界列向量的全体,L_E 表示定义在 E 上的可和行向量的全体,m_E 表示定义于 $E \times E$ 上的矩阵(其元素为实数或 $\pm\infty$)的全体. 如果 $f \in M_E, g \in L_E$,定义内积为 $[g,f] = \sum_{j\in E} g_j f_j$,有时也用 gf 表示,即 $gf = [g,f]$. 向量或矩阵的极限、等号以及不等号都是逐元意义下的. 另外,用 $\mathbf{0}$ 表示元素全为 0 的向量或矩阵,用 $\mathbf{1}$ 表示元素为 1 的列向量,用 I 表示单位矩阵.

设 Q 是给定的一个定义于 E 上的 Q — 矩阵,$\Psi(\lambda)$ 是一个相应的 Q 过程.

定义 3.1.1 称定义在 E 上的行向量 $\eta(\lambda)(\lambda > 0)$ 是关于 $\Psi(\lambda)$ 的一个广义行协调族(简称广行族),如果下列两条满足

$$\mathbf{0} \leqslant \eta(\lambda) \in L_E, (\lambda > 0);$$

$$\eta(\lambda) - \eta(\mu) = (\mu - \lambda)\eta(\lambda)\Psi(\mu), (\lambda, \mu > 0).$$

关于 $\Psi(\lambda)$ 的广义行协调族的全体记作 $L_{\Psi(\lambda)}$. 特别,当 Q 全稳定,$\Psi(\lambda)$ 为最小 Q 过程 $\Phi(\lambda)$ 时(称 $\Phi(\lambda)$ 为最小 Q 过程,如果对任

意 Q 过程 $\Psi(\lambda)$，均有 $\Phi(\lambda) \leqslant \Psi(\lambda)$，见第四章）. 相应的广义行协调族称为标准行协调族，简称为行协调族.

定义 3.1.2 称定义在 E 上的列向量 $\xi(\lambda)(\lambda > 0)$ 是关于 $\Psi(\lambda)$ 的一个广义列协调族（简称广列族），如果下列两条件满足

$$0 \leqslant \xi(\lambda) \in M_E, (\lambda > 0);$$

$$\xi(\lambda) - \xi(\mu) = (\mu - \lambda)\Psi(\lambda)\xi(\mu), (\lambda, \mu > 0).$$

关于 $\Psi(\lambda)$ 的广义列协调族的全体记作 $M_{\Psi(\lambda)}$. 特别，当 Q 全稳定且 $\Psi(\lambda)$ 为最小 Q 过程时相应的广义列协调族称为标准列协调族，简称为列协调族.

从定义可知，广义协调族与 $\Psi(\lambda)$ 关于参数 λ 可交换，即恒有

$$\eta(\lambda)\Psi(\mu) = \eta(\mu)\Psi(\lambda)$$

及

$$\Psi(\lambda)\xi(\mu) = \Psi(\mu)\xi(\lambda).$$

定义 3.1.3 称 $\eta(\lambda)$ 及 $\xi(\lambda)$ 是关于 $\Psi(\lambda)$ 的广义共轭协调对，如果下列两条件满足

$$\eta(\lambda) \in L_{\Psi(\lambda)}, \xi(\lambda) \in M_{\Psi(\lambda)}; \tag{3.1.1}$$

$$\xi(\lambda) \leqslant 1 - \lambda\Psi(\lambda)1. \tag{3.1.2}$$

关于 $\Psi(\lambda)$ 的广义共轭协调对全体记作 $D_{\Psi(\lambda)}$. 同样可理解标准共轭协调对 $D_{\Phi(\lambda)}$.

对于广义共轭协调对，今后将记之为 $(\eta(\lambda), \xi(\lambda))_{\Psi(\lambda)}$，在不致混淆时，可简记为 $(\eta(\lambda), \xi(\lambda))$. 用此记法，可视 $\eta(\lambda)$ 及 $\xi(\lambda)$ 为 $(\eta(\lambda), \xi(\lambda))$ 的两个"分量"，不过要将此记号与 $\eta(\lambda)$ 及 $\xi(\lambda)$ 的内积 $[\eta(\lambda), \xi(\lambda)]$ 严格区别开. 理解成"分量"后，符号 $(\eta(\lambda), \circ)_{\Psi(\lambda)}$ 可认为是 $\eta(\lambda)$ 固定，而 $\xi(\lambda)$ 为活动"坐标". 同理，可理解 $(\circ, \xi(\lambda))_{\Psi(\lambda)}$.

$$\lim_{\lambda \to 0}(\eta(\lambda), \xi(\lambda)) = (\eta, \xi)$$

表示 $\lim\limits_{\lambda \to 0}\eta(\lambda) = \eta$ 且 $\lim\limits_{\lambda \to 0}\xi(\lambda) = \xi$. 进而

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda(\eta(\lambda), \xi(\lambda)) \triangleq \lim_{\lambda \to +\infty} (\lambda\eta(\lambda), \lambda\xi(\lambda)) = (\alpha, \beta)$$

表示 $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda\eta(\lambda) = \alpha$ 且 $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda\xi(\lambda) = \beta$.

广行族及广列族的一般性质见下面引理.

引理 3.1.1 设 $\eta(\lambda)\in L_{\Psi(\lambda)}$,则有

(i) $\eta(\lambda)\equiv 0(\forall\ \lambda>0)$ 当且仅当对某个 $\lambda_0>0$ 有 $\eta(\lambda_0)=0$.

(ii) $\eta(\lambda)\downarrow\quad(\lambda\uparrow+\infty)$. 从而极限 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\eta(\lambda)$ 及 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\eta(\lambda)$ 均存在. 进一步有:

$$\eta(\lambda)\downarrow \mathbf{0}\quad(\lambda\uparrow+\infty);\eta(\lambda)\mathbf{1}\downarrow 0\quad(\lambda\uparrow+\infty).\quad(3.1.3)$$

(iii) $\lambda\eta(\lambda)\mathbf{1}\uparrow\quad(\lambda\uparrow+\infty)$. 从而极限 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda\eta(\lambda)\mathbf{1}$ 存在,但可能为 $+\infty$.

(iv) $$\eta=\eta(\mu)+\mu\eta(\mu)\Psi\quad(\mu>0).\quad(3.1.4)$$

$$\eta=\eta(\lambda)+\lambda\eta\Psi(\lambda)\quad(\lambda>0).\quad(3.1.5)$$

$\eta=\lim\limits_{\lambda\to 0}\eta(\lambda)$ 及 $\Psi=\lim\limits_{\lambda\to 0}\Psi(\lambda)$ 均存在,但可能为 $+\infty$.

证明

(i) 由定义立得.

(ii) $\eta(\lambda)$ 的单调下降性亦由定义立得,注意到 $\eta(\lambda)$ 的每个分量均单调下降,从而 $\eta(\lambda)\mathbf{1}$ 亦随 λ 上升而单调下降,故极限 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\eta(\lambda)\mathbf{1}$ 存在. 由

$$\eta(\lambda)-\eta(\mu)=(\mu-\lambda)\eta(\mu)\Psi(\lambda),$$

有

$$\eta(\lambda)\mathbf{1}-\eta(\mu)\mathbf{1}=(\mu-\lambda)\eta(\mu)\Psi(\lambda)\mathbf{1}$$
$$=\frac{\mu-\lambda}{\lambda}\eta(\mu)\lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1}.\quad(3.1.6)$$

但

$$\lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1}\leqslant 1,\eta(\mu)\in L_E.$$

故由控制收敛定理及 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1}=\mathbf{1}$ 可得

$$\lim_{\lambda\to+\infty}(\eta(\lambda)\mathbf{1})-\eta(\mu)\mathbf{1}=-\eta(\mu)\mathbf{1}.$$

从而

$$\eta(\lambda)\mathbf{1}\downarrow 0\quad(\lambda\uparrow+\infty).$$

更有

$$\eta(\lambda)\downarrow\mathbf{0}\quad(\lambda\uparrow+\infty).$$

(iii) 由(3.1.6)式同乘 λ 可得

$$\begin{aligned}\lambda\eta(\lambda)1 &= \lambda\eta(\mu)1 + (\mu-\lambda)\eta(\mu)\lambda\Psi(\lambda)1 \\ &= \mu\eta(\mu)1 + (\lambda-\mu)\eta(\mu)1 + (\mu-\lambda)\eta(\mu)\lambda\Psi(\lambda)1 \\ &= \mu\eta(\mu)1 + (\lambda-\mu)\eta(\mu)(1-\lambda\Psi(\lambda)1).\end{aligned}$$

注意到 $1-\lambda\Psi(\lambda)1 \geqslant 0$ 立得

$$\lambda\eta(\lambda)1 \uparrow \quad (\lambda \uparrow +\infty).$$

(iv) 由 $\Psi(\lambda)$ 的预解方程知，当 $\lambda \to 0$ 时，$\Psi(\lambda)$ 上升，故

$$\Psi = \lim_{\lambda\to 0}\Psi(\lambda)$$

存在，另由(ii)知

$$\eta(\lambda) \uparrow \eta \quad (\lambda \downarrow 0)$$

亦存在，在关系式

$$\eta(\lambda) = \eta(\mu) + (\mu-\lambda)\eta(\mu)\Psi(\lambda)$$

中，令 $\lambda \to 0$，注意 $(\mu-\lambda) \to \mu > 0$，而由非负单调上升性知

$$\lim_{\lambda\to 0}\eta(\mu)\Psi(\lambda) = \eta(\mu)\Psi.$$

这得证(3.1.4)式.

同理，在 $\eta(\mu) = \eta(\lambda) + (\lambda-\mu)\eta(\mu)\Psi(\lambda)$ 中，令 $\mu \to 0$ 得(3.1.5).

引理 3.1.2 设 $\xi(\lambda) \in M_{\Psi(\lambda)}$，则有

(i) $\xi(\lambda) \equiv 0 \quad (\lambda > 0)$ 当且仅当对某个 $\lambda_0 > 0$，有 $\xi(\lambda_0) = 0$.

(ii) $\xi(\lambda)$ 是 $\lambda > 0$ 的单调下降函数，从而 $\xi(\lambda) \uparrow \xi \quad (\lambda \downarrow 0)$ 存在，进一步还有

$$\xi(\lambda) \downarrow 0 \quad (\lambda \uparrow +\infty). \tag{3.1.7}$$

(iii) $$\xi = \xi(\mu) + \mu\Psi\xi(\mu), \quad (\mu > 0); \tag{3.1.8}$$

$$\xi = \xi(\lambda) + \lambda\Psi(\lambda)\xi. \tag{3.1.9}$$

这里 $\Psi = \lim_{\lambda\to 0}\Psi(\lambda)$，$\xi = \lim_{\lambda\to 0}\xi(\lambda)$.

证明 只需证(3.1.7)，其它同引理 3.1.1 的证明. 由

$$\xi_i(\lambda) - \xi_i(\mu) = (\mu-\lambda)\sum_k \psi_{ik}(\lambda)\xi_k(\mu)$$

$$=\frac{(\mu-\lambda)}{\lambda}\sum_k \lambda\psi_{ik}(\lambda)\xi_k(\mu). \tag{3.1.10}$$

注意 $\xi(\lambda)\in M_E$. 故 $\xi_k(\mu)\leqslant C_\mu$ 为与 λ 无关的常数. 一方面

$$\varliminf_{\lambda\to+\infty}\sum_k \lambda\psi_{ik}(\lambda)\xi_k(\mu)\geqslant \varliminf_{\lambda\to+\infty}\lambda\psi_{ii}(\lambda)\xi_i(\mu)=\xi_i(\mu);$$

另一方面

$$\begin{aligned}\varlimsup_{\lambda\to+\infty}\sum_k \lambda\psi_{ik}(\lambda)\xi_k(\mu)&\leqslant \varlimsup_{\lambda\to+\infty}\lambda\psi_{ii}(\lambda)\xi_i(\mu)+\varlimsup_{\lambda\to+\infty}\sum_{k\neq i}\psi_{ik}(\lambda)\xi_k(\mu)\\&\leqslant \varlimsup_{\lambda\to+\infty}\lambda\psi_{ii}(\lambda)\xi_i(\mu)+(\varlimsup_{\lambda\to+\infty}\sum_{k\neq i}\lambda\psi_{ik}(\lambda))C_\mu\\&=\xi_i(\mu)+C_\mu\times 0=\xi_i(\mu).\end{aligned}$$

故

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\sum_k \lambda\psi_{ik}(\lambda)\xi_k(\mu)=\xi_i(\mu).$$

那么,在(3.1.10)式中令 $\lambda\uparrow+\infty$,并注意到极限的存在性得

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\xi_i(\lambda)-\xi_i(\mu)=-\xi_i(\mu).$$

从而 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\xi_i(\lambda)=0\quad(\forall\ i\in E)$,得证(3.1.7).

引理 3.1.3 设 $(\eta(\lambda),\xi(\lambda))\in D_{\Psi(\lambda)}$,则有

(i) $\eta(\lambda)\downarrow 0\quad(\lambda\uparrow+\infty)$; $\xi(\lambda)\downarrow 0\quad(\lambda\uparrow+\infty)$; $\eta(\lambda)1\downarrow 0\quad(\lambda\uparrow+\infty)$.

$$\xi(\lambda)\uparrow\xi\quad(\lambda\downarrow 0)\text{ 且 }0\leqslant\xi\leqslant 1.$$

$$\xi=\xi(\lambda)+\lambda\Psi(\lambda)\xi\quad(\lambda>0),$$

$$\xi=\xi(\lambda)+\lambda\Psi\xi(\lambda)\quad(\lambda>0).$$

这里 $\Psi(\lambda)\uparrow\Psi\quad(\lambda\downarrow 0)$.

(ii) $(\lambda-\mu)[\eta(\mu),\xi(\lambda)]=\lambda[\eta(\lambda),\xi]-\mu[\eta(\mu),\xi]$.

(iii) $\lambda[\eta(\lambda),1]$, $\lambda[\eta(\lambda),\xi]$ 及 $\lambda[\eta(\lambda),1-\xi]$ 均为 $\lambda>0$ 的单调上升函数,从而极限

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta(\lambda),1],\qquad \lim_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta(\lambda),\xi]$$

及

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta(\lambda),1-\xi]$$

均存在.

(iv) $\lim\limits_{\lambda\to 0}\lambda[\eta(\lambda),\xi] = 0$.

证明

(i) 结论可见引理 3.1.1 及引理 3.1.2. 而 $0\leqslant\xi\leqslant 1$ 源于条件

$$0 \leqslant \xi(\lambda) \leqslant 1 - \lambda\Psi(\lambda)1 \leqslant 1.$$

(ii) $\lambda[\eta(\lambda),\xi]$

$$\begin{aligned}
&= \lambda[\eta(\mu) + (\mu-\lambda)\eta(\mu)\Psi(\lambda),\xi] \\
&= \lambda[\eta(\mu)(I + (\mu-\lambda)\Psi(\lambda)),\xi] \\
&= \lambda[\eta(\mu),(I + (\mu-\lambda)\Psi(\lambda))\xi] \\
&= \lambda[\eta(\mu),\xi] + (\mu-\lambda)\lambda[\eta(\mu),\Psi(\lambda)\xi] \\
&= [\eta(\mu),\xi] + (\mu-\lambda)[\eta(\mu),\lambda\Psi(\lambda)\xi] \\
&= \lambda[\eta(\mu),\xi] + (\mu-\lambda)[\eta(\mu),\xi-\xi(\lambda)] \\
&= \lambda[\eta(\mu),\xi] + (\mu-\lambda)[\eta(\mu),\xi] - (\mu-\lambda)[\eta(\mu),\xi(\lambda)] \\
&= \mu[\eta(\mu),\xi] - (\mu-\lambda)[\eta(\mu),\xi(\lambda)],
\end{aligned}$$

故

$$(\lambda-\mu)[\eta(\mu),\xi(\lambda)] = \lambda[\eta(\lambda),\xi] - \mu[\eta(\mu),\xi].$$

在上述证明中曾利用了无穷维矩阵的结合律及分配律,由于

$$(\eta(\lambda),\xi(\lambda)) \in D_{\Psi(\lambda)}.$$

易知这是合理的.

(iii) $\lambda[\eta(\lambda),1]$ 的单调上升性见引理 3.1.1. $\lambda[\eta(\lambda),\xi]$ 随 λ 的单调上升性由已证明的(ii) 式得到,注意我们已分别证得

$$\lambda[\eta(\lambda),1] - \mu[\eta(\mu),1] = (\lambda-\mu)[\eta(\mu),1-\lambda\Psi(\lambda)1];$$

$$\lambda[\eta(\lambda),\xi] - \mu[\eta(\mu),\xi] = (\lambda-\mu)[\eta(\mu),\xi(\lambda)].$$

两式相减得

$$\begin{aligned}
&\lambda[\eta(\lambda),1-\xi] - \mu[\eta(\mu),1-\xi] \\
&= (\lambda-\mu)[\eta(\lambda),1-\lambda\Psi(\lambda)1-\xi(\lambda)].
\end{aligned}$$

由条件 $\xi(\lambda) \leqslant 1 - \lambda\Psi(\lambda)1$ 可知,当 $\lambda > \mu$ 时,右边 > 0,从而

$$\lambda[\eta(\lambda),1-\xi] - \mu[\eta(\mu),1-\xi] \geqslant 0.$$

得证 $\lambda[\eta(\lambda),1-\xi]$ 的单调上升性.

(iv) 由 $\lambda[\eta(\lambda),\xi] - \mu[\eta(\mu),\xi] = (\lambda-\mu)[\eta(\mu),\xi(\lambda)]$.

令 $\lambda \to 0$，由于

$$[\eta(\mu),\xi(\lambda)] \leqslant [\eta(\mu),1] < +\infty.$$

与 λ 无关，故

$$\lim_{\lambda\to 0}(\lambda - \mu)[\eta(\mu),\xi(\lambda)] = -\mu[\eta(\mu),\xi].$$

从而

$$\lim_{\lambda\to 0}\lambda[\eta(\lambda),\xi] - \mu[\eta(\mu),\xi] = -\mu[\eta(\mu),\xi],$$

故得

$$\lim_{\lambda\to 0}\lambda[\eta(\lambda),\xi] = 0.$$

引理 3.1.4 若 $\eta(\lambda) \in L_{\Psi(\lambda)}$，令 $\xi^0(\lambda) = 1 - \lambda\Psi(\lambda)1$，则

(i) $(\eta(\lambda),\xi^0(\lambda)) \in D_{\Psi(\lambda)}$.

(ii) $\lambda[\eta(\lambda),1-\xi^0] < +\infty$ 且与 λ 无关，此时 $\xi^0 = \lim\limits_{\lambda\to 0}\xi^0(\lambda)$.

证明

(i) 由 $\Psi(\lambda)$ 的预解方程

$$\Psi(\lambda) - \Psi(\mu) = (\mu - \lambda)\Psi(\mu)\Psi(\lambda).$$

可得

$$\lambda\Psi(\lambda)1 - \lambda\Psi(\mu)1 = (\mu - \lambda)\Psi(\mu)\lambda\Psi(\lambda)1.$$

即

$$\lambda\Psi(\lambda)1 - \mu\Psi(\mu)1 = (\lambda - \mu)\Psi(\mu)1 + (\mu - \lambda)\Psi(\mu)\lambda\Psi(\lambda)1.$$

或

$$(1 - \lambda\Psi(\lambda)1) - (1 - \mu\Psi(\mu)1) = (\mu - \lambda)\Psi(\mu)(1 - \lambda\Psi(\lambda)1).$$

即 $1 - \lambda\Psi(\lambda)1 \in M_{\Psi(\lambda)}$.

再注意到已知条件得 $(\eta(\lambda),\xi^0(\lambda)) \in D_{\Psi(\lambda)}$.

(ii) 由控制收敛定理知

$$\begin{aligned}\lim_{\mu\to 0}\lambda[\eta(\lambda),\mu\Psi(\mu)1] &= \lambda[\eta(\lambda),\lim_{\mu\to 0}\mu\Psi(\mu)1] \\ &= \lambda[\eta(\lambda),\lim_{\mu\to 0}(1 - \xi^0(\mu))] \\ &= \lambda[\eta(\lambda),1 - \xi^0];\end{aligned}$$

另一方面

$$\lim_{\mu\to 0}\lambda[\eta(\lambda),\mu\Psi(\mu)1] = \lim_{\mu\to 0}\lambda\mu[\eta(\lambda)\Psi(\mu),1]$$

$$= \lim_{\mu \to 0} \frac{\lambda\mu}{\mu - \lambda}[\eta(\lambda) - \eta(\mu), 1]$$

$$= \lim_{\mu \to 0} \frac{\lambda\mu}{\mu - \lambda}[\eta(\lambda), 1] - \lim_{\mu \to 0} \frac{\lambda\mu}{\mu - \lambda}[\eta(\mu), 1].$$

前一项由于$\lambda[\eta(\lambda),1]$为与μ无关的常数，从而趋于0. 后一项显然趋向$\lim\limits_{\mu\to 0}\mu[\eta(\mu),1]$为有限数. 因为由前面所证知$\lim\limits_{\mu\to 0}\mu[\eta(\mu),1]$存在，且当$\mu\downarrow 0$时单调下降，得所欲证.

在上面的讨论中，我们对过程未作任何要求，为了进一步得到协调族的表现，下面我们逐步附加一些条件.

本节中，对下面的结果，我们假定条件：$\Psi(\lambda)$是全稳定Q过程.

引理 3.1.5 存在满足条件$\lim\limits_{\lambda\to +\infty}\lambda\eta(\lambda)=\alpha$的关于$\Psi(\lambda)$的非零广义行协调族的必要条件是不等式组

$$\begin{cases} V(\lambda I - Q) \geqslant \alpha, \\ 0 \leqslant V \in L_E. \end{cases}$$

有非零解，特别应有

$$\sum_j \frac{\alpha_j}{1 + q_j} < +\infty.$$

证明 由条件$\eta(\lambda)-\eta(\mu)=(\mu-\lambda)\eta(\lambda)\Psi(\mu)$可得

$$\eta(\lambda) = \eta(\mu)(I - \lambda\Psi(\lambda)) + \mu\eta(\mu)\Psi(\lambda).$$

两边同乘λ，并写成分量形式就是：

$$\lambda\eta_j(\lambda) = \eta_j(\mu)\lambda(1 - \lambda\psi_{jj}(\lambda))$$
$$- \sum_{k\neq j}\eta_k(\mu)\lambda^2\psi_{kj}(\lambda) + \sum_k \eta_k(\mu)\mu\lambda\psi_{kj}(\lambda).$$

令$\lambda\to\infty$，对上式右边第二项用法都引理，第三项用控制收敛定理得

$$\alpha_j = q_j\eta_j(\mu) - \sum_{k\neq j}\eta_k(\mu)q_{kj} + \mu\eta_j(\mu).$$

即$\eta(\mu)(\mu I - Q) \geqslant \alpha$.

由前式特别有$\eta_j(\mu) \geqslant \dfrac{\alpha_j}{\mu + q_j}$.

从而由条件$\eta(\mu)\in L_E$可知

$$\sum_j \frac{a_j}{\mu + q_j} < +\infty \quad (\mu > 0).$$

引理 3.1.6 存在满足条件 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda\xi(\lambda) = \beta$ 的关于 $\Psi(\lambda)$ 的非零广义列协调族的必要条件是不等式组

$$\begin{cases}(\lambda I - Q)U \geqslant \beta, \\ 0 \leqslant U \leqslant 1.\end{cases}$$

有非零解.

证明 与引理 3.1.5 的证明大同小异，只是注意由等式

$$\lambda\xi_j(\lambda) = \lambda(1 - \lambda\psi_{jj}(\lambda))\xi_j(\mu) - \sum_{k\neq j} \lambda^2\psi_{jk}(\lambda)\xi_k(\mu) + \mu\sum_k \psi_{jk}(\lambda)\xi_k(\mu).$$

令 $\lambda\to\infty$ 时，对右边第三项不能再用控制收敛定理，而是如下处理

$$\mu\sum_k \lambda\psi_{jk}(\lambda)\xi_k(\mu) = \mu\lambda\psi_{jj}(\lambda)\xi_j(\mu) + \sum_{k\neq j} \lambda\mu\psi_{jk}(\lambda)\xi_k(\mu).$$

当 $\lambda\to\infty$ 时，上式右边第一项趋向 $\mu\xi_j(\mu)$. 记 $m_\mu = \sup\limits_k \xi_k(\mu)$ 则后项小于

$$m_\mu \sum_{k\neq j} \lambda\mu\psi_{jk}(\lambda) = \mu m_\mu \sum_{k\neq j} \lambda\psi_{jk}(\lambda) \leqslant \mu m_\mu(1 - \lambda\psi_{jj}(\lambda)) \to 0.$$

引理 3.1.7 设 $\Psi(\lambda)$ 是 F 型 Q 过程，则 $\eta(\lambda)$ 是关于 $\Psi(\lambda)$ 的广义行协调族的充要条件是必有表现

$$\eta(\lambda) = \alpha\Psi(\lambda) + \bar{\eta}(\lambda)$$

其中 $\alpha = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda\eta(\lambda)$ 且 $\alpha\Psi(\lambda) \in L_E$，而 $\bar{\eta}(\lambda)$ 满足

$$\begin{cases}\bar{\eta}(\lambda)(\lambda I - Q) = 0; \\ 0 \leqslant \bar{\eta}(\lambda) \in L_E; \\ \bar{\eta}(\lambda) - \bar{\eta}(\mu) = (\mu - \lambda)\bar{\eta}(\lambda)\Psi(\mu); \\ \lim\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda\bar{\eta}(\lambda) = 0.\end{cases}$$

证明 充分性明显，故只证必要性.

由于 $\eta(\lambda)$ 是广义行协调族，$\Psi(\lambda)$ 满足 F 条件，从而

$$\begin{aligned}\eta(\mu)(\mu I - Q) &= \eta(\lambda)(I + (\lambda - \mu)\Psi(\mu))(\mu I - Q)\\ &= \eta(\lambda)(\mu I - Q + (\lambda - \mu)\Psi(\mu)(\mu I - Q))\\ &= \eta(\lambda)(\mu I - Q + (\lambda - \mu)I)\\ &= \eta(\lambda)(\lambda I - Q),\end{aligned}$$

其中第一个等号成立利用了 $\eta(\lambda)$ 是广义行协调族,第三个等号成立利用了 $\Psi(\lambda)$ 满足 F 条件.

注意以上结果,由单调收敛定理及引理 3.1.1 得

$$\begin{aligned}\eta(\mu)(\mu I - Q) &= \lim_{\lambda\to+\infty}\eta(\lambda)(\lambda I - Q)\\ &= \lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\eta(\lambda) = \alpha. \qquad (3.1.11)\end{aligned}$$

在 $\eta(\mu) - \eta(\lambda) = (\lambda - \mu)\eta(\lambda)\Psi(\mu)$ 中,令 $\lambda\to+\infty$,由 Fatou 引理及引理 3.1.1 得

$$\eta(\mu) \geqslant \alpha\Psi(\mu). \qquad (3.1.12)$$

令

$$\bar{\eta}(\mu) = \eta(\mu) - \alpha\Psi(\mu).$$

则

$$\eta(\mu) = \alpha\Psi(\lambda) + \bar{\eta}(\mu).$$

由(3.1.12),$\bar{\eta}(\mu) \geqslant \mathbf{0}$,显然 $\bar{\eta}(\mu) \in L_E$,$\lim\limits_{\mu\to\infty}\mu\bar{\eta}(\mu) = \mathbf{0}$,$\bar{\eta}(\lambda) - \bar{\eta}(\mu) = (\mu - \lambda)\bar{\eta}(\lambda)\Psi(\mu)$. 由(3.1.11)及 $\Psi(\lambda)$ 满足 F 条件得

$$\bar{\eta}(\mu)(\mu I - Q) = \mathbf{0}.$$

引理 3.1.8 设 $\Psi(\lambda)$ 是 B 型 Q 过程,则 $\xi(\lambda)$ 是关于 $\Psi(\lambda)$ 的广义列协调族的充要条件是必有表现

$$\xi(\lambda) = \Psi(\lambda)\beta + \bar{\xi}(\lambda),$$

其中 $\beta = \lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda\xi(\lambda)$ 且 $\Psi(\lambda)\beta \in M_E$,而 $\bar{\xi}(\lambda)$ 满足

$$\begin{cases}(\lambda I - Q)\bar{\xi}(\lambda) = \mathbf{0};\\ \mathbf{0} \leqslant \bar{\xi}(\lambda) \in M_E;\\ \bar{\xi}(\lambda) - \bar{\xi}(\mu) = (\mu - \lambda)\Psi(\lambda)\bar{\xi}(\mu);\\ \lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda\bar{\xi}(\lambda) = \mathbf{0}.\end{cases}$$

证明 类似于引理 3.1.7 的证明可以证得本引理.

§ 2　一维分解定理

引理 3.2.1　对任意马氏过程 $P(t)$，必有

(i)　$p_{ij}(t) \geqslant \int_0^t f_{ik}(s) p_{kj}(t-s) ds, \quad (i,j,k \in E; t > 0)$;

(ii)　$p_{ij}(t) = \int_0^t f_{ij}(s) p_{jj}(t-s) ds, \quad (i,j \in E; t > 0)$.

这里 $f_{ij}(t)$ 为 $F_{ij}(t) \triangleq P\{\alpha_{ij}(\omega) \leqslant t | X_0(\omega) = i\}$ 的连续导数，而 $\alpha_{ij}(\omega)$ 为从 i 出发首达 j 的时刻. 有关定义详见 Chung K. L. [1, Ⅱ, § 11].

证明　当 $P(t)$ 不中断时，这是周知的首达分解，其证明可在 Chung[1, Ⅱ, § 11] 的定理 8 中取 $H = \varnothing$，并注意 $_jp_{ij}(t) \equiv 0$ 而得到.

当 $P(t)$ 中断时，按常规方法扩大状态空间为 $E \cup \{\Delta\}$，然后利用不中断时结果即可.

本引理的正确性，从概率意义上讲是非常显然的.

引理 3.2.2　对任意马氏过程 $R(\lambda)$，均有

$$r_{ij}(\lambda) r_{kk}(\lambda) \geqslant r_{ik}(\lambda) r_{kj}(\lambda), \quad (i,j,k \in E; \lambda > 0).$$

证明　由引理 3.2.1，若以 $h_{ij}(\lambda)$ 表 $f_{ij}(t)$ 的拉氏变换，则有

$$r_{ij}(\lambda) \geqslant h_{ik}(\lambda) r_{kj}(\lambda),$$

故

$$r_{ij}(\lambda) r_{kk}(\lambda) \geqslant h_{ik}(\lambda) r_{kk}(\lambda) r_{kj}(\lambda).$$

但由引理 3.2.1 还有 $h_{ik}(\lambda) r_{kk}(\lambda) = r_{ik}(\lambda)$. 故得 $r_{ij}(\lambda) r_{kk}(\lambda) \geqslant r_{ik}(\lambda) r_{kj}(\lambda)$.

注　$f_{ij}(t)$ 之拉氏变换 $h_{ij}(\lambda)$ 的存在性是显然的.

推论 3.2.1　对任意马氏过程 $R(\lambda)$，恒有

$$r_{kk}(\lambda) d_i(\lambda) \geqslant r_{ik}(\lambda) d_k(\lambda), \quad (i,k \in E; \lambda > 0).$$

这里 $d_i(\lambda) = 1 - \lambda \sum_{j \in E} r_{ij}(\lambda)$.

证明　当 $R(\lambda)$ 不中断时，推论显然. 若 $R(\lambda)$ 中断，仍用常规方法扩大状态空间，引用引理 3.2.2 的结果，再两边同乘 λ 即得.

定理 3.2.1 设 $R(\lambda)=(r_{ij}(\lambda);i,j\in E)$ 是 E 上的 Q 过程,任取 $b\in E$,令 $E_1=E\setminus\{b\}$,$Q_{E_1}=\{q_{ij};i,j\in E_1\}$ 是 Q 在 E_1 上的限制.则 $R(\lambda)$ 必可表为

$$R(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \Psi(\lambda)\end{pmatrix}+r_{bb}(\lambda)\begin{pmatrix}1\\ \xi(\lambda)\end{pmatrix}(1,\eta(\lambda)). \quad (3.2.1)$$

其中

(i) $\Psi(\lambda)$ 是 Q_{E_1} 过程.

(ii) $$(\eta(\lambda),\xi(\lambda))\in D_{\Psi(\lambda)}, \quad (3.2.2)$$

且

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda(\eta(\lambda),\xi(\lambda))=(e,\varepsilon), \quad (3.2.3)$$

其中

$$e=(q_{bj};j\in E_1),\varepsilon=(q_{jb};j\in E_1)^T. \quad (3.2.4)$$

(iii) $$r_{bb}(\lambda)=(c+\lambda[\eta(\lambda),\xi])^{-1} \quad (3.2.5)$$

这里 $\xi=\lim\limits_{\lambda\to 0}\xi(\lambda)$.从而 $\mathbf{0}\leqslant\xi\leqslant\mathbf{1}$.而 c 为与 λ 无关的常数,满足

$$c\geqslant\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta(\lambda),\mathbf{1}-\xi], \quad (3.2.6)$$

故 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta(\lambda),\mathbf{1}-\xi]$ 必有限.

(iv) 若 b 为稳定态,则

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta(\lambda),\xi]=q_b-c \quad (3.2.7)$$

为有限数.

若 b 为瞬时态,则

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta(\lambda),\xi]=+\infty. \quad (3.2.8)$$

或等价地

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta(\lambda),\mathbf{1}]=+\infty. \quad (3.2.9)$$

(v) 若 $R(\lambda)$ 不中断,则 $\xi(\lambda)=\mathbf{1}-\lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1}$.而 $\lambda[\eta(\lambda),\mathbf{1}-\xi]$ 为与 λ 无关的常数.且还有 $c=\lambda[\eta(\lambda),\mathbf{1}-\xi]$,从而

$$r_{bb}(\lambda)=(\lambda+\lambda[\eta(\lambda),\mathbf{1}])^{-1}. \quad (3.2.10)$$

最后,形如(3.2.1)的分解形式是唯一的.

证明 由已知 $R(\lambda)=(r_{ij}(\lambda);i,j\in E)$ 为密度矩阵为 Q 的马氏过程,现取 $b\in E$.令 $E_1=E\setminus\{b\}$.由于 $r_{bb}(\lambda)>0$,可令

$$\xi_{ib}(\lambda) \triangleq \frac{r_{ib}(\lambda)}{r_{bb}(\lambda)}, \eta_{bj}(\lambda) \triangleq \frac{r_{bj}(\lambda)}{r_{bb}(\lambda)}.$$

$$\xi(\lambda) \triangleq (\xi_{ib}(\lambda); i \in E_1)^T, \quad \eta(\lambda) \triangleq (\eta_{bj}(\lambda); j \in E_1).$$

显然

$$\eta(\lambda) \geqslant \mathbf{0}, \quad \xi(\lambda) \geqslant \mathbf{0}. \tag{3.2.11}$$

再令

$$\psi_{ij}(\lambda) = r_{ij}(\lambda) - \xi_{ib}(\lambda) r_{bb}(\lambda) \eta_{bj}(\lambda), \quad (i,j \in E_1, \lambda > 0).$$

$$\Psi(\lambda) = (\psi_{ij}(\lambda); i,j \in E_1).$$

由引理 3.2.2 知

$$\Psi(\lambda) \geqslant \mathbf{0}, \tag{3.2.12}$$

故 $R(\lambda)$ 可表为

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} r_{bb}(\lambda) & r_{bb}(\lambda)\eta(\lambda) \\ \xi(\lambda) r_{bb}(\lambda) & \Psi(\lambda) + \xi(\lambda) r_{bb}(\lambda)\eta(\lambda) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Psi(\lambda) \end{pmatrix} + r_{bb}(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ \xi(\lambda) \end{pmatrix} (1, \eta(\lambda)). \tag{3.2.13}$$

将 (3.2.13) 代入 $R(\lambda)$ 应满足的预解方程 $R(\lambda) - R(\mu) = (\mu - \lambda) R(\lambda) R(\mu)$. 易知预解方程等价于如下四式同时成立：

$$\begin{aligned}
& r_{bb}(\lambda) - r_{bb}(\mu) \\
&= (\mu - \lambda) r_{bb}(\lambda) r_{bb}(\mu) + (\mu - \lambda) r_{bb}(\lambda) r_{bb}(\mu) \eta(\lambda) \xi(\mu); \\
& r_{bb}(\lambda)\eta(\lambda) - r_{bb}(\mu)\eta(\mu) \\
&= (\mu - \lambda) r_{bb}(\lambda) \eta(\lambda) \Psi(\mu) + (\mu - \lambda) r_{bb}(\lambda) r_{bb}(\mu) \eta(\mu) \\
&\quad + (\mu - \lambda) r_{bb}(\lambda) \eta(\lambda) \xi(\mu) r_{bb}(\mu) \eta(\mu); \\
& r_{bb}(\lambda)\xi(\lambda) - r_{bb}(\mu)\xi(\mu) \\
&= (\mu - \lambda) \Psi(\lambda) \xi(\mu) r_{bb}(\mu) + (\mu - \lambda) \xi(\mu) r_{bb}(\lambda) r_{bb}(\mu) \\
&\quad + (\mu - \lambda) r_{bb}(\lambda) r_{bb}(\mu) \xi(\lambda) \eta(\lambda) \xi(\mu); \\
& r_{bb}(\lambda)\xi(\lambda)\eta(\lambda) - r_{bb}(\mu)\xi(\mu)\eta(\mu) + \Psi(\lambda) - \Psi(\mu) \\
&= (\mu - \lambda) \Psi(\lambda) \Psi(\mu) + (\mu - \lambda) \Psi(\lambda) \xi(\mu) \eta(\mu) r_{bb}(\mu) + \\
&\quad (\mu - \lambda) r_{bb}(\lambda) \xi(\lambda) \eta(\lambda) \Psi(\mu) + (\mu - \lambda) r_{bb}(\lambda) r_{bb}(\mu) \xi(\lambda) \eta(\mu) \\
&\quad + (\mu - \lambda) r_{bb}(\lambda) r_{bb}(\mu) \xi(\lambda) \eta(\lambda) \xi(\mu) \eta(\mu).
\end{aligned}$$

将第一式代入其它三式，并由(3.2.11) 和(3.2.12) 知用结合律合

理. 从而 $R(\lambda)$ 满足预解方程等价于如下四式同时成立:

$$r_{bb}(\lambda) - r_{bb}(\mu) = (\mu - \lambda) r_{bb}(\lambda) r_{bb}(\mu) + (\mu - \lambda) r_{bb}(\lambda) r_{bb}(\mu) \eta(\lambda) \xi(\mu), \tag{3.2.14}$$

$$\eta(\lambda) - \eta(\mu) = (\mu - \lambda) \eta(\lambda) \Psi(\mu), \tag{3.2.15}$$

$$\xi(\lambda) - \xi(\mu) = (\mu - \lambda) \Psi(\lambda) \xi(\mu), \tag{3.2.16}$$

$$\Psi(\lambda) - \Psi(\mu) = (\mu - \lambda) \Psi(\lambda) \Psi(\mu). \tag{3.2.17}$$

再由 $R(\lambda)$ 满足范条件 $\lambda R(\lambda) \mathbf{1} \leqslant \mathbf{1}$ 及(3.2.13)知

$$\lambda r_{bb}(\lambda) + \lambda r_{bb}(\lambda) \eta(\lambda) \mathbf{1} \leqslant 1. \tag{3.2.18}$$

$$\lambda \Psi(\lambda) \mathbf{1} + \lambda r_{bb}(\lambda) \xi(\lambda) + \lambda r_{bb}(\lambda) \xi(\lambda) \eta(\lambda) \mathbf{1} \leqslant \mathbf{1}. \tag{3.2.19}$$

引入

$$d_i(\lambda) = 1 - \lambda \sum_{j \in E} r_{ij}(\lambda), \quad (i \in E_1), D(\lambda) = \{d_i(\lambda); i \in E_1\}.$$

$$d_b(\lambda) = 1 - \lambda r_{bb}(\lambda) - \lambda r_{bb}(\lambda) \eta(\lambda) \mathbf{1}.$$

则由(3.2.18)和(3.2.19)有等式

$$\lambda r_{bb}(\lambda) + \lambda r_{bb}(\lambda) \eta(\lambda) \mathbf{1} + d_b(\lambda) = 1,$$

$$\lambda \Psi(\lambda) \mathbf{1} + \lambda r_{bb}(\lambda) \xi(\lambda) + \lambda r_{bb}(\lambda) \xi(\lambda) \eta(\lambda) \mathbf{1} + D(\lambda) = \mathbf{1}.$$

将前式代入后式,并用推论 3.2.1 可得

$$\xi(\lambda) + \lambda \Psi(\lambda) \mathbf{1} \leqslant \mathbf{1}. \tag{3.2.20}$$

由(3.2.18)式知

$$\lambda \eta(\lambda) \mathbf{1} < +\infty, (\lambda > 0). \tag{3.2.21}$$

即

$$\eta(\lambda) \in L_E, (\lambda > 0). \tag{3.2.22}$$

由于 $R(\lambda)$ 是 Q 过程,故

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda) = I. \tag{3.2.23}$$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda(\lambda R(\lambda) - I) = Q. \tag{3.2.24}$$

特别有 $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda r_{bj}(\lambda) = 0$ 及 $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda^2 r_{bj}(\lambda) = q_{bj}, (j \in E_1)$.

但 $r_{bj}(\lambda) = r_{bb}(\lambda) \eta_{bj}(\lambda) (j \in E_1)$, 且 $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \lambda r_{bb}(\lambda) = 1$, 立得

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda \eta(\lambda) = e, \tag{3.2.25}$$

其中 $e=(q_{bj};j\in E_1)$.
同理得

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\xi(\lambda)=\varepsilon, \tag{3.2.26}$$

其中 $\varepsilon=(q_{jb};j\in E_1)^T$. 再注意到 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\eta(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\xi(\lambda)=0$ 立得

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\psi_{ij}(\lambda)=\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda r_{ij}(\lambda)=\delta_{ij},(i,j\in E_1); \tag{3.2.27}$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda(\lambda\psi_{ij}(\lambda)-\delta_{ij})=\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda(\lambda r_{ij}(\lambda)-\delta_{ij})$$
$$=q_{ij},(i,j\in E_1). \tag{3.2.28}$$

(3.2.12),(3.2.17),(3.2.20),(3.2.28) 和(3.2.27) 说明 $\Psi(\lambda)$ 是 Q_{E_1} 过程. (i) 已得证. 再注意(3.2.11),(3.2.15),(3.2.16),(3.2.20),(3.2.22),(3.2.25) 及(3.2.26) 可知 $(\eta(\lambda),\xi(\lambda))\in D_{\Psi(\lambda)}$ 且 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda(\eta(\lambda),\xi(\lambda))=(e,\varepsilon)$ 其中

$$e=(q_{bj};j\in E_1),\qquad \varepsilon=(q_{jb};j\in E_1)^T.$$

(ii) 也得证.

由于已证得 $(\eta(\lambda),\xi(\lambda))\in D_{\Psi(\lambda)}$, 故由引理 3.1.3 知

$$(\mu-\lambda)[\eta(\lambda),\xi(\mu)]=\mu[\eta(\mu),\xi]-\lambda[\eta(\lambda),\xi].$$

故由(3.2.14) 并注意 $r_{bb}(\lambda)r_{bb}(\mu)>0$ 得

$$r_{bb}^{-1}(\mu)-r_{bb}^{-1}(\lambda)=(\mu-\lambda)+\mu[\eta(\mu),\xi]-\lambda[\eta(\lambda),\xi].$$

因而

$$r_{bb}^{-1}(\lambda)-\lambda-\lambda[\eta(\lambda),\xi]=r_{bb}^{-1}(\mu)-\mu-\mu[\eta(\mu),\xi].$$

为有限常数, 设为 c. 故

$$r_{bb}(\lambda)=(c+\lambda+\lambda[\eta(\lambda),\xi])^{-1}.$$

得证(3.2.5). 现在, 再由(3.2.18) 式得

$$c+\lambda+\lambda[\eta(\lambda),\xi]\geqslant\lambda+\lambda[\eta(\lambda),\mathbf{1}].$$

从而

$$c\geqslant\lambda[\eta(\lambda),\mathbf{1}-\xi],(\lambda>0).$$

上式对所有 $\lambda>0$ 成立, 而由引理 3.1.3 知 $\lambda[\eta(\lambda),\mathbf{1}-\xi]$ 随 λ 单调上升, 而 c 为常数, 故

$$c\geqslant\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta(\lambda),\mathbf{1}-\xi].$$

得证(3.2.6)从而(iii)得证.

又由(3.2.24)应有 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda(\lambda r_{bb}(\lambda)-1)=q_{bb}\equiv -q_b$.
注意到 $r_{bb}(\lambda)=(c+\lambda+\lambda[\eta(\lambda),\xi])^{-1}$ 知

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\frac{c+\lambda+\lambda[\eta(\lambda),\xi]-\lambda}{c+\lambda+\lambda[\eta(\lambda),\xi]}=q_b.$$

也就是 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{c+\lambda[\eta(\lambda),\xi]}{\dfrac{c}{\lambda}+1+[\eta(\lambda),\xi]}=q_b$. 由于 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\eta(\lambda)\mathbf{1}=0$,而 $\mathbf{0}\leqslant\xi\leqslant\mathbf{1}$. 更有 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}[\eta(\lambda),\mathbf{1}]=0$,故上式即为

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta(\lambda),\xi]=q_b-c.$$

故当 b 为稳定态时,$q_b<+\infty$,故 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta(\lambda),\xi]$ 有限,且(3.2.7)成立. 而当 b 为瞬时状态时,由于 $q_b=+\infty$ 必须要求

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta(\lambda),\xi]=+\infty.$$

此即(3.2.8). 注意到已证得的(3.2.6)知,它等价于

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta(\lambda),\mathbf{1}]=+\infty.$$

定理之(iv)已得证.

当 $R(\lambda)$ 不中断时,则(3.2.18)及(3.2.19)必成立等号. 从而(3.2.20)亦成立等号. 即得到

$$\xi(\lambda)+\lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1}=\mathbf{1}.$$

由引理 3.1.4 又知 $\lambda[\eta(\lambda),\mathbf{1}-\xi]$ 与 λ 无关且有限,由于(3.2.18)成立等号,再顾及到已证得的(3.2.5)式,必有

$$c=\lambda[\eta(\lambda),\mathbf{1}-\xi],$$

且

$$r_{bb}(\lambda)=(\lambda+\lambda[\eta(\lambda),\mathbf{1}])^{-1}.$$

从而得证(v).

最后证明分解形式的唯一性. 若 $R(\lambda)$ 有两种形式分解

$$R(\lambda)=\begin{pmatrix}0&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\Psi(\lambda)\end{pmatrix}+r_{bb}(\lambda)\begin{pmatrix}1\\\xi(\lambda)\end{pmatrix}(1,\eta(\lambda))$$
$$=\begin{pmatrix}0&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\widetilde{\Psi}(\lambda)\end{pmatrix}+r_{bb}(\lambda)\begin{pmatrix}1\\\tilde{\xi}(\lambda)\end{pmatrix}(1,\tilde{\eta}(\lambda)).$$

由于 $r_{bb}(\lambda) > 0$，故首先得 $\xi(\lambda) = \bar{\xi}(\lambda), \eta(\lambda) = \bar{\eta}(\lambda)$. 进而又有 $\Psi(\lambda) = \bar{\Psi}(\lambda)$. 说明分解形式唯一. 至此，定理全部得证.

根据定理 3.2.1 对固定的 $b \in E$，可定义 E 上的过程 $R(\lambda)$ 到 E_1 上的过程 $\Psi(\lambda)$ 的一个映射 $\chi_b: R(\lambda) \to \Psi(\lambda)$. 为强调这一点，可记 $\Psi(\lambda)$ 为 ${}_bR(\lambda)$，且不妨称 $\Psi(\lambda)$ 是 $R(\lambda)$ 的 E_1 上的投影过程. 反过来则称 $R(\lambda)$ 是 $\Psi(\lambda)$ 生成的过程.

注意到上述事实后，我们很自然地反过来考虑这样一个问题：若给定了 E 上的一个拟 Q — 矩阵 Q 及一个固定状态 $b \in E$，并进一步假定我们已有了一个 E_1 上的 Q_{E_1} 过程 $\Psi(\lambda)$. 令 $P_{\Psi(\lambda)}(Q) = \{R(\lambda); R(\lambda)$ 是 Q 过程且 ${}_bR(\lambda) = \Psi(\lambda)\}$，那么 $P_{\Psi(\lambda)}(Q)$ 何时非空？如何构造？这是我们十分关心的问题，因为由此可考虑 E 上的 Q 过程的存在性及构造. 这正是我们今后考虑问题的出发点. 为此，我们必须研究定理 3.2.1 在一定意义上的逆定理，它的证明事实已基本包含在定理 3.2.1 中.

定理 3.2.2 设给定了 E 上的一个拟 Q — 矩阵 Q，$b \in E$，令 $E_1 = E \backslash \{b\}$，如果存在一个 Q_{E_1} 过程 $\Psi(\lambda)$ 及一个关于 $\Psi(\lambda)$ 的共轭广义协调对

$$(\eta(\lambda), \xi(\lambda)) \in D_{\Psi(\lambda)}. \tag{3.2.29}$$

满足以下三条：

(i) $$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda(\eta(\lambda), \xi(\lambda)) = (e, \varepsilon); \tag{3.2.30}$$

这里 $e = (q_{bj}; j \in E_1), \varepsilon = (q_{jb}; j \in E_1)^T$.

(ii) $$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda[\eta(\lambda), 1 - \xi] < +\infty; \tag{3.2.31}$$

(iii) 当 $q_b < +\infty$ 时，要求

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda[\eta(\lambda), 1] \leqslant q_b; \tag{3.2.32}$$

当 $q_b = +\infty$ 时，要求

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda[\eta(\lambda), 1] = +\infty; \tag{3.2.33}$$

或等价地

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda[\eta(\lambda), \xi] = +\infty. \tag{3.2.34}$$

则 Q 是 E 上的 Q — 矩阵. 换言之，必存在 E 上的 Q 过程. 其 Q 过程

可如下构造：

如果 $q_b < +\infty$，取常数 $c = q_b - \lambda[\eta(\lambda), \xi]$. (3.2.35)

如果 $q_b = +\infty$，则任取常数 $c \geqslant \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda[\eta(\lambda), \mathbf{1} - \xi]$. (3.2.36)

然后，令

$$r_{bb}(\lambda) = (c + \lambda + \lambda[\eta(\lambda), \xi])^{-1}. \tag{3.2.37}$$

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Psi(\lambda) \end{pmatrix} + r_{bb}(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ \xi(\lambda) \end{pmatrix} (1, \eta(\lambda)). \tag{3.2.38}$$

则 $R(\lambda)$ 就是一个 Q 过程.

证明 只需证当定理的条件(i)，(ii)，(iii) 同时成立时，按(3.2.38) 构造的 $R(\lambda)$ 确为一个 Q 过程.

首先，条件(3.2.30) 保证了，当 $q_b < +\infty$ 时，按(3.2.35) 是可以取到常数 c，且 c 必定非负. 而条件(3.2.31) 保证了，当 $q_b = +\infty$ 时，按(3.2.36) 是可以取到常数 c，且 c 必定非负. 故在两种情形下，按(3.2.37) 及(3.2.38) 定义的 $R(\lambda)$ 合理，且显然满足

$$R(\lambda) \geqslant \mathbf{0}. \tag{3.2.39}$$

其次，条件(3.2.32)，(3.2.31) 及(3.2.36) 的取法保证了

$$c \geqslant \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda[\eta(\lambda), \mathbf{1} - \xi].$$

若再注意到条件(3.2.29) 及引理 3.1.3 知 $\lambda[\eta(\lambda), \mathbf{1} - \xi]$ 单调上升，故

$$c \geqslant \lambda[\eta(\lambda), \mathbf{1} - \xi], (\forall\ \lambda > 0).$$

故由(3.2.37) 的取法可知

$$r_{bb}(\lambda) \leqslant (\lambda + \lambda[\eta(\lambda), \mathbf{1}])^{-1}, (\lambda > 0).$$

或

$$\lambda r_{bb}(\lambda) + \lambda r_{bb}(\lambda)\eta(\lambda)\mathbf{1} = \mathbf{1}, (\lambda > 0). \tag{3.2.40}$$

另外注意$(\eta(\lambda), \xi(\lambda)) \in D_{\Psi(\lambda)}$ 知

$$\xi(\lambda) + \lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1} \leqslant \mathbf{1}. \tag{3.2.41}$$

(3.2.40) 及(3.2.41) 保证了按(3.2.38) 定义的 $R(\lambda)$ 满足条件

$$\lambda R(\lambda)\mathbf{1} \leqslant \mathbf{1}. \tag{3.2.42}$$

第三，条件(3.2.29) 及(3.2.37) 的取法保证了下列四个关系

式同时成立：

$$\Psi(\lambda) - \Psi(\mu) = (\mu - \lambda)\Psi(\lambda)\Psi(\mu), (\lambda, \mu > 0);$$

$$\eta(\lambda) - \eta(\mu) = (\mu - \lambda)\eta(\lambda)\Psi(\mu), (\lambda, \mu > 0);$$

$$\xi(\lambda) - \xi(\mu) = (\mu - \lambda)\Psi(\lambda)\xi(\mu), (\lambda, \mu > 0);$$

$$r_{bb}(\lambda) - r_{bb}(\mu) = (\mu - \lambda)r_{bb}(\lambda)r_{bb}(\mu)$$

$$+ (\mu - \lambda)r_{bb}(\lambda)r_{bb}(\mu)\eta(\lambda)\xi(\mu), (\lambda, \mu > 0).$$

由定理 3.2.1 的证明过程可知，上述四条同时成立保证了 $R(\lambda)$ 满足预解方程

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\mu - \lambda)R(\lambda)R(\mu). \qquad (3.2.43)$$

第四，条件 $(\eta(\lambda), \xi(\lambda)) \in D_{\Psi(\lambda)}$ 及引理 3.1.3 保证了 $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \eta(\lambda)1 = 0$，

故更有 $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} [\eta(\lambda), \xi] = 0$. 由 $\xi \leqslant 1$，那么这保证了

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda r_{bb}(\lambda) = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\frac{c}{\lambda} + 1 + [\eta(\lambda), \xi]} = 1$$

及 $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} r_{bb}(\lambda) = 0$. 从而再由(3.2.29)我们依次得

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda r_{bj}(\lambda) = \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda r_{bb}(\lambda)\eta_{bj}(\lambda) = 0 \times q_{bj} = 0;$$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda r_{jb}(\lambda) = \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda r_{bb}(\lambda)\xi_{jb}(\lambda) = 0 \times q_{jb} = 0;$$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda r_{ij}(\lambda) = \lim_{\lambda \to +\infty} (\lambda\psi_{ij}(\lambda) + \xi_{ib}(\lambda)r_{bb}(\lambda)\eta_{bj}(\lambda))$$

$$= \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda\psi_{ij}(\lambda) = \delta_{ij}, (i, j \in E_1).$$

总之，按(3.2.38)定义的 $R(\lambda)$ 满足连续性条件

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda) = I. \qquad (3.2.44)$$

因此，(3.2.39)，(3.2.42)，(3.2.43)及(3.2.44)已说明 $R(\lambda)$ 确为一个马氏过程.

最后，说明 Q 条件成立. 实际上，由条件(3.2.30)知：

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^2 r_{bj}(\lambda)$$

$$= \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda r_{bb}(\lambda) \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda\eta_{bj}(\lambda) = q_{bj}, (j \in E_1);$$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^2 r_{jb}(\lambda)$$

$$= \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda r_{bb}(\lambda) \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\xi_{jb}(\lambda) = q_{jb}, (j \in E_1);$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda(\lambda r_{ij}(\lambda) - \delta_{ij})$$

$$= \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda(\lambda\psi_{ij}(\lambda) - \delta_{ij}) + 0 = q_{ij}, (i,j \in E_1).$$

而当 $q_b < +\infty$ 时，由(3.2.35)知

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda(1 - \lambda r_{bb}(\lambda)) = \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{c + \lambda[\eta(\lambda), \xi]}{\frac{c}{\lambda} + 1 + [\eta(\lambda), \xi]}$$

$$= c + \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda[\eta(\lambda), \xi] = q_b.$$

而当 $q_b = +\infty$ 时，由(3.2.34)知

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda(1 - \lambda r_{bb}(\lambda)) = \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{c + \lambda[\eta(\lambda), \xi]}{\frac{c}{\lambda} + 1 + [\eta(\lambda), \xi]} = +\infty.$$

从而按(3.2.38)定义的 $R(\lambda)$ 确实满足

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda(\lambda R(\lambda) - I) = Q.$$

而在条件(3.2.31)下，(3.2.33)及(3.2.34)的等价性是显然的.

由于我们常常讨论不中断过程的存在性问题，故将不中断过程的分解定理及其逆定理另行明确写出，将是有益的.

定理 3.2.3 设 $R(\lambda)$ 是 E 上的不中断 Q 过程，任取 $b \in E$，令 $E_1 = E\backslash\{b\}$，则 $R(\lambda)$ 可唯一的表为

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Psi(\lambda) \end{pmatrix} + r_{bb}(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \lambda\Psi(\lambda)1 \end{pmatrix} (1, \eta(\lambda)). \tag{3.2.45}$$

其中

$$\Psi(\lambda) \text{ 是 } Q_{E_1} \text{ 过程;} \tag{3.2.46}$$

$$\eta(\lambda) \in L_{\Psi(\lambda)}; \tag{3.2.47}$$

$$r_{bb}(\lambda) = \frac{1}{\lambda + \lambda\eta(\lambda)1}; \tag{3.2.48}$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\eta(\lambda) = e, e = (q_{bj}; j \in E_1); \tag{3.2.49}$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda(1 - \lambda\Psi(\lambda)1) = \varepsilon, \varepsilon = (q_{jb}; j \in E_1)^T; \tag{3.2.50}$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta(\lambda),\mathbf{1}]=q_b. \tag{3.2.51}$$

从而当 b 为瞬时状态时，必有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta(\lambda),\mathbf{1}]=+\infty. \tag{3.2.52}$$

反之，若存 Q_{E_1} 过程 $\Psi(\lambda)$ 及 $\eta(\lambda)\in L_{\Psi(\lambda)}$ 满足如下条件：

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\eta(\lambda)=e\triangleq(q_{bj};j\in E_1); \tag{3.2.53}$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda(\mathbf{1}-\lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1})=e\triangleq(q_{jb};j\in E_1)^T; \tag{3.2.54}$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta(\lambda),\mathbf{1}]=q_b. \tag{3.2.55}$$

则存在 E 上的不中断 Q 过程，此过程可如下构造. 令

$$r_{bb}(\lambda)=\frac{1}{\lambda+\lambda\eta(\lambda)\mathbf{1}}; \tag{3.2.56}$$

$$R(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \Psi(\lambda)\end{pmatrix}+r_{bb}(\lambda)\begin{pmatrix}1\\ \mathbf{1}-\lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1}\end{pmatrix}(1,\eta(\lambda)). \tag{3.2.57}$$

证明　定理的前半部分见定理 3.2.1. 后半部分易直接验证.

§3　二维分解定理

下面将把 §2 的分解定理推广到多维情况，我们首先较为详尽地给出二维的情况，这不仅是由于二维情况的形式较之一般多维情况简洁，便于表达和理解，而且更主要的是，从一维到二维出现了一些新的概念，从而得到一些新的结果，而从二维到多维则主要是形式上的变化，因而只要二维情况的证明清楚，那么多维情况基本上也就可以类推了.

为方便起见，设状态空间 $E=\{a\}\cup\{b\}\cup N$ 其中 $\{a\}$，$\{b\}$ 均为单点集，且 $\{a\}$，$\{b\}$ 及 N 均不相交，Q 为定义于 $E\times E$ 上的 Q－矩阵，$R(\lambda)$ 是任意一个 Q 过程.

对 $R(\lambda)$ 按一维分解定理，依 $\{a\}$ 进行分解得

$$R(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \widetilde{\Psi}(\lambda)\end{pmatrix}+r_{aa}(\lambda)\begin{pmatrix}1\\ \widetilde{\xi}(\lambda)\end{pmatrix}(1,\widetilde{\eta}(\lambda)). \tag{3.3.1}$$

其中 $\widetilde{\Psi}(\lambda)$ 是 $Q_{N\cup b}$ 过程，这里 $Q_{N\cup b}=(q_{ij};i,j\in N\cup\{b\})$ 是 Q 在 $N\cup\{b\}$ 上的限制，而

$$(\widetilde{\eta}(\lambda),\widetilde{\xi}(\lambda))\in D_{\widetilde{\Psi}(\lambda)}. \tag{3.3.2}$$

而 $\widetilde{\Psi}(\lambda)$ 又可按一维分解定理再依状态 $\{b\}$ 分解而得到

$$\widetilde{\Psi}(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \Psi(\lambda)\end{pmatrix}+\widetilde{\psi}_{bb}(\lambda)\begin{pmatrix}1\\ f(\lambda)\end{pmatrix}(1,g(\lambda)). \tag{3.3.3}$$

其中 $\Psi(\lambda)$ 是 Q_N 过程，这里 $Q_N=(q_{ij};i,j\in N)$ 是 Q 在 N 上的限制，而

$$(g(\lambda),f(\lambda))\in D_{\Psi(\lambda)}. \tag{3.3.4}$$

对上述诸量的关系作些分析如下：

引理 3.3.1 恒有：

(i) $r_{aj}(\lambda)\geqslant r_{ab}(\lambda)g_{bj}(\lambda),\qquad (j\in N,\lambda>0).$

(ii) $r_{ja}(\lambda)\geqslant f_{jb}(\lambda)r_{ba}(\lambda),\qquad (j\in N,\lambda>0).$

这里 $g(\lambda)=(g_{bj}(\lambda);j\in N)$ 及 $f(\lambda)=(f_{jb}(\lambda);j\in N)$ 由(3.3.3)式定义.

证明 由引理 3.2.2 知：

$$r_{aj}(\lambda)r_{bb}(\lambda)\geqslant r_{ab}(\lambda)r_{bj}(\lambda),\qquad (j\in N,\lambda>0).$$

从而

$$r_{aj}(\lambda)r_{bb}(\lambda)-r_{aj}(\lambda)\widetilde{\xi}_{ba}(\lambda)r_{ab}(\lambda)$$
$$\geqslant r_{ab}(\lambda)r_{bj}(\lambda)-r_{ab}(\lambda)\widetilde{\xi}_{ba}(\lambda)r_{aj}(\lambda).$$

即

$$r_{aj}(\lambda)(r_{bb}(\lambda)-\widetilde{\xi}_{ba}(\lambda)r_{ab}(\lambda))\geqslant r_{ab}(\lambda)(r_{bj}(\lambda)-\widetilde{\xi}_{ba}(\lambda)r_{aj}(\lambda)).$$

但由(3.3.1)式，上式即为：

$$r_{aj}(\lambda)\widetilde{\psi}_{bb}(\lambda)\geqslant r_{ab}(\lambda)\widetilde{\psi}_{bj}(\lambda).$$

由于 $\widetilde{\psi}_{bb}(\lambda)>0$ 及由(3.3.3)式知 $\widetilde{\psi}_{bj}(\lambda)=\widetilde{\psi}_{bb}(\lambda)g_{bj}(\lambda)$ 得

$$r_{aj}(\lambda)\geqslant r_{ab}(\lambda)g_{bj}(\lambda).$$

(i) 式得证.

同理，由 $r_{ja}(\lambda)r_{bb}(\lambda)\geqslant r_{jb}(\lambda)r_{ba}(\lambda)$ 得

$$r_{ja}(\lambda)(r_{bb}(\lambda)-r_{ba}(\lambda)\widetilde{\eta}_{ab}(\lambda))\geqslant r_{ba}(\lambda)(r_{jb}(\lambda)-r_{ja}(\lambda)\widetilde{\eta}_{ab}(\lambda)),$$

即

$$r_{ja}(\lambda)\tilde{\psi}_{bb}(\lambda) \geqslant r_{ba}(\lambda)\tilde{\psi}_{jb}(\lambda).$$

约去 $\tilde{\psi}_{bb}(\lambda) > 0$ 即得证(ii).

引理 3.3.2 若令:

$$\eta_{aj}(\lambda) = r_{aa}^{-1}(\lambda)(r_{aj}(\lambda) - r_{ab}(\lambda)g_{bj}(\lambda)), \quad (j \in N, \lambda > 0).$$

$$\eta_{bj}(\lambda) = g_{bj}(\lambda), \qquad (j \in N, \lambda > 0).$$

$$\eta^{(a)}(\lambda) = (\eta_{aj}(\lambda); j \in N), \eta^{(b)}(\lambda) = (\eta_{bj}(\lambda); j \in N),$$

则有:

(i) $0 \leqslant \eta^{(a)}(\lambda) \in L_N, 0 \leqslant \eta^{(b)}(\lambda) \in L_N$.

(ii) $r_{aj}(\lambda) = r_{aa}(\lambda)\eta_{aj}(\lambda) + r_{ab}(\lambda)\eta_{bj}(\lambda), \quad (j \in N, \lambda > 0).$

$$r_{bj}(\lambda) = r_{ba}(\lambda)\eta_{aj}(\lambda) + r_{bb}(\lambda)\eta_{bj}(\lambda), \qquad (j \in N, \lambda > 0).$$

证明 (i) 由引理 3.3.1 的(i) 式知 $\eta^{(a)}(\lambda) \geqslant 0$,再由 $\sum_{j \in N} r_{aj}(\lambda) < +\infty$ 知 $\eta^{(a)}(\lambda) \in L_N$. 而 $0 \leqslant \eta^{(b)}(\lambda) \in L_N$ 由定义式及定理 3.2.1 可得.

(ii) 前一式由 $\eta_{aj}(\lambda)$ 的定义式及 $g_{bj}(\lambda) = \eta_{bj}(\lambda)$ 立得,而后一式的右边等于

$$\begin{aligned} & r_{ba}(\lambda)r_{aa}^{-1}(\lambda)(r_{aj}(\lambda) - r_{ab}(\lambda)g_{bj}(\lambda)) + r_{bb}(\lambda)g_{bj}(\lambda) \\ =& r_{ba}(\lambda)r_{aa}^{-1}(\lambda)r_{aj}(\lambda) + (r_{bb}(\lambda) - r_{ba}(\lambda)r_{aa}^{-1}(\lambda)r_{ab}(\lambda))g_{bj}(\lambda) \\ =& \bar{\xi}_{ba}(\lambda)r_{aa}(\lambda)\eta_{aj}(\lambda) + \tilde{\psi}_{bb}(\lambda)g_{bj}(\lambda) \\ =& r_{bj}(\lambda). \end{aligned}$$

引理 3.3.3 若令

$$\xi_{ja}(\lambda) = r_{aa}^{-1}(\lambda)(r_{ja}(\lambda) - f_{jb}(\lambda)r_{ba}(\lambda)), \qquad (j \in N, \lambda > 0).$$

$$\xi_{jb}(\lambda) = f_{jb}(\lambda), \qquad (j \in N, \lambda > 0)$$

$$\xi^{(a)}(\lambda) = (\xi_{ja}(\lambda); j \in N)^T, \xi^{(b)}(\lambda) = (\xi_{jb}(\lambda); j \in N)^T.$$

则有

(i) $0 \leqslant \xi^{(a)}(\lambda) \in M_N, 0 \leqslant \xi^{(b)}(\lambda) \in M_N$;

(ii) $r_{ja}(\lambda) = \xi_{ja}(\lambda)r_{aa}(\lambda) + \xi_{jb}(\lambda)r_{ba}(\lambda),$

$$r_{jb}(\lambda) = \xi_{ja}(\lambda)r_{ab}(\lambda) + \xi_{jb}(\lambda)r_{bb}(\lambda).$$

证明 (i) 由引理 3.3.1 的(ii) 式知 $\xi^{(a)}(\lambda) \geqslant 0$. $\xi^{(a)}(\lambda) \in M_N$ 由 $r_{\cdot a}(\lambda) \in M_E$ 可得. $0 \leqslant \xi^{(b)}(\lambda) \in M_N$ 则由定义及定理 3.2.1 可

得.

(ii) 前一式由 $\xi_{ja}(\lambda)$ 的定义式及 $\xi_{jb}(\lambda)=f_{jb}(\lambda)$ 得到,而后一项的右边等于

$$\begin{aligned}
&r_{aa}^{-1}(\lambda)(r_{ja}(\lambda)-f_{jb}(\lambda)r_{ba}(\lambda))r_{ab}(\lambda)+f_{jb}(\lambda)r_{bb}(\lambda)\\
&=r_{ja}(\lambda)r_{aa}^{-1}(\lambda)r_{ab}(\lambda)+f_{jb}(\lambda)(r_{bb}(\lambda)-r_{ba}(\lambda)r_{aa}^{-1}(\lambda)r_{ab}(\lambda))\\
&=\bar{\xi}_{jb}(\lambda)r_{aa}(\lambda)\bar{\eta}_{ab}(\lambda)+f_{jb}(\lambda)\bar{\psi}_{bb}(\lambda)\\
&=\bar{\xi}_{jb}(\lambda)r_{aa}(\lambda)\bar{\eta}_{ab}(\lambda)+\bar{\psi}_{jb}(\lambda)\\
&=r_{jb}(\lambda).
\end{aligned}$$

为了叙述方便,引入记号:

$$\eta(\lambda)=\begin{pmatrix}\eta^{(a)}(\lambda)\\ \eta^{(b)}(\lambda)\end{pmatrix},\xi(\lambda)=(\xi^{(a)}(\lambda),\xi^{(a)}(\lambda)).$$

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}r_{aa}(\lambda) & r_{ab}(\lambda)\\ r_{ba}(\lambda) & r_{bb}(\lambda)\end{pmatrix}.$$

那么上述各引理可统一在下面一个定理中.

定理 3.3.1 设 $R(\lambda)$ 是定义于 $E=\{a\}\cup\{b\}\cup N$ 上的 Q 过程,则 $R(\lambda)$ 必可表示为

$$R(\lambda)=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \Psi(\lambda)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}A(\lambda) & A(\lambda)\eta(\lambda)\\ \xi(\lambda)A(\lambda) & \xi(\lambda)A(\lambda)\eta(\lambda)\end{pmatrix}. \tag{3.3.5}$$

其中

(i) $\Psi(\lambda)$ 是 Q_N 过程;

(ii) $\eta(\lambda)$ 是非负,可和的 N 上的二维行向量;

(iii) $\xi(\lambda)$ 是非负,有界的 N 上的二维列向量.

证明 只需证明 $\forall\, i,j\in N$ 有:

$$\begin{aligned}
r_{ij}(\lambda)=\psi_{ij}(\lambda)&+\xi_{ia}(\lambda)r_{aa}(\lambda)\eta_{aj}(\lambda)+\xi_{ia}(\lambda)r_{ab}(\lambda)\eta_{bj}(\lambda)\\
&+\xi_{ib}(\lambda)r_{ba}(\lambda)\eta_{aj}(\lambda)+\xi_{ib}(\lambda)r_{bb}(\lambda)\eta_{bj}(\lambda).
\end{aligned}$$

因为其它各项已在引理 3.3.2 及引理 3.3.3 及本节开头时的(3.3.1)式至(3.3.4)式而得到,而上式右边等于

$$\begin{aligned}
&\psi_{ij}(\lambda)+\xi_{ia}(\lambda)r_{aj}(\lambda)+\xi_{ib}(\lambda)r_{bj}(\lambda)\\
&=\psi_{ij}(\lambda)+\xi_{ia}(\lambda)r_{aj}(\lambda)+\xi_{ib}(\lambda)(\bar{\psi}_{bj}(\lambda)+r_{ba}(\lambda)r_{aa}^{-1}(\lambda)r_{aj}(\lambda))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \psi_{ij}(\lambda) + \xi_{ib}(\lambda)\tilde{\psi}_{bj}(\lambda) + (\xi_{ia}(\lambda) + \xi_{ib}(\lambda) r_{ba}(\lambda) r_{aa}^{-1}(\lambda)) r_{aj}(\lambda) \\
&= \psi_{ij}(\lambda) + f_{ib}(\lambda)\tilde{\psi}_{bj}(\lambda) + (\xi_{ia}(\lambda) + f_{ib}(\lambda) r_{ba}(\lambda) r_{aa}^{-1}(\lambda)) r_{aj}(\lambda) \\
&= \tilde{\psi}_{ij}(\lambda) + (\xi_{ia}(\lambda) + r_{ia}(\lambda) r_{aa}^{-1}(\lambda) - \xi_{ia}(\lambda)) r_{aj}(\lambda) \\
&= \tilde{\psi}_{ij}(\lambda) + r_{ia}(\lambda) r_{aa}^{-1}(\lambda) r_{aj}(\lambda) \\
&= r_{ij}(\lambda).
\end{aligned}
$$

在进一步分析 $R(\lambda)$ 的性质之前，首先注意一个简单事实：即上面引入的 $A(\lambda)$ 具有逆矩阵，其实我们有更强的事实：

$$|A(\lambda)| > 0 \quad (\forall\ \lambda > 0).$$

即

$$r_{aa}(\lambda) r_{bb}(\lambda) - r_{ab}(\lambda) r_{ba}(\lambda) > 0, \qquad (\forall\ \lambda > 0).$$

这可由一维分解定理而得到，按照(3.3.1)式可得

$$r_{bb}(\lambda) - r_{ba}(\lambda) r_{aa}^{-1}(\lambda) r_{ab}(\lambda) = \tilde{\psi}_{bb}(\lambda).$$

但 $\tilde{\psi}_{bb}(\lambda) > 0$ 再顾及到 $r_{aa}(\lambda) > 0$ 就得到 $|A(\lambda)| > 0$.

引理 3.3.4 设 $R(\lambda)$ 形如(3.3.5)，则 $R(\lambda)$ 满足预解方程：

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\mu - \lambda) R(\lambda) R(\mu), \quad (\lambda, \mu > 0). \tag{3.3.6}$$

的充分必要条件为如下四条同时成立：

$$
\begin{aligned}
A(\lambda) - A(\mu) &= (\mu - \lambda) A(\lambda) A(\mu) \\
&\quad + (\mu - \lambda) A(\lambda) \eta(\lambda) \xi(\mu) A(\mu), \quad (\lambda, \mu > 0),
\end{aligned} \tag{3.3.7}
$$

$$\eta(\lambda) - \eta(\mu) = (\mu - \lambda) \eta(\lambda) \Psi(\mu), \quad (\lambda, \mu > 0), \tag{3.3.8}$$

$$\xi(\lambda) - \xi(\mu) = (\mu - \lambda) \Psi(\lambda) \xi(\mu), \quad (\lambda, \mu > 0), \tag{3.3.9}$$

$$\Psi(\lambda) - \Psi(\mu) = (\mu - \lambda) \Psi(\lambda) \Psi(\mu), \quad (\lambda, \mu > 0). \tag{3.3.10}$$

证明 若(3.3.6)成立，将(3.3.5)代入可得它等价于如下四式同时成立

$$A(\lambda) - A(\mu) = (\mu - \lambda) A(\lambda) A(\mu) + (\mu - \lambda) A(\lambda) \eta(\lambda) \xi(\mu) A(\mu),$$

$$
\begin{aligned}
A(\lambda)\eta(\lambda) - A(\mu)\eta(\mu) &= (\mu - \lambda) A(\lambda) \eta(\lambda) \Psi(\mu) \\
&\quad + (\mu - \lambda) A(\lambda) A(\mu) \eta(\mu) + (\mu - \lambda) A(\lambda) \eta(\lambda) \xi(\mu) A(\mu) \eta(\mu),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\xi(\lambda) A(\lambda) - \xi(\mu) A(\mu) &= (\mu - \lambda) \Psi(\lambda) \xi(\mu) A(\mu) \\
&\quad + (\mu - \lambda) \xi(\lambda) A(\lambda) A(\mu) + (\mu - \lambda) \xi(\lambda) A(\lambda) \eta(\lambda) \xi(\mu) A(\mu),
\end{aligned}
$$

$$\Psi(\lambda) - \Psi(\mu) + \xi(\lambda) A(\lambda) \eta(\lambda) - \xi(\mu) A(\mu) \eta(\mu)$$

$$= (\mu-\lambda)\Psi(\lambda)\Psi(\mu) + (\mu-\lambda)\Psi(\lambda)\xi(\mu)A(\mu)\eta(\mu)$$
$$+ (\mu-\lambda)\xi(\lambda)A(\lambda)\eta(\lambda)\Psi(\mu) + (\mu-\lambda)\xi(\lambda)A(\lambda)A(\mu)\eta(\mu)$$
$$+ (\mu-\lambda)\xi(\lambda)A(\lambda)\eta(\lambda)\xi(\mu)A(\mu)\eta(\mu).$$

将第一式代入其它三式，知又等价于如下四式同时成立：

$$A(\lambda) - A(\mu) = (\mu-\lambda)A(\lambda)A(\mu) + (\mu-\lambda)A(\lambda)\eta(\lambda)\xi(\mu)A(\mu),$$

$$A(\lambda)\eta(\lambda) - A(\lambda)\eta(\mu) = (\mu-\lambda)A(\lambda)\eta(\lambda)\Psi(\mu), \tag{3.3.11}$$

$$\xi(\lambda)A(\mu) - \xi(\mu)A(\mu) = (\mu-\lambda)\Psi(\lambda)\xi(\mu)A(\mu), \tag{3.3.12}$$

$$\xi(\lambda)A(\lambda)\eta(\lambda) - \xi(\mu)A(\mu)\eta(\mu) + \Psi(\lambda) - \Psi(\mu)$$
$$= (\mu-\lambda)\Psi(\lambda)\Psi(\mu) +$$
$$+ \xi(\lambda)A(\lambda)(\eta(\mu) + (\mu-\lambda)\eta(\lambda)\Psi(\mu))$$
$$- (\xi(\lambda) + (\lambda-\mu)\Psi(\lambda)\xi(\mu))A(\mu)\eta(\mu).$$

注意到 $A^{-1}(\lambda)$ 的存在性，将(3.3.11) 左乘 $A^{-1}(\lambda)$，(3.3.12) 右乘 $A^{-1}(\mu)$，并将所得结果代入最后一式就得到(3.3.7)、(3.3.8)、(3.3.9) 及(3.3.10) 同时成立. 反之. 若(3.3.7) 至(3.3.10) 同时成立则逆转上述推证. 易证(3.3.6) 成立.

显然，引理3.3.4的证明仅仅用到 $A^{-1}(\lambda)$ 存在的事实，因而这个引理对一般多维情况的证明可以一字不改.

引理 3.3.5 设 $R(\lambda)$ 形如(3.3.5)，则 $R(\lambda)$ 满足范条件.

$$\lambda R(\lambda)1 \leqslant 1 \tag{3.3.13}$$

的充分必要条件为如下两条件同时成立：

$$\lambda A(\lambda)1 + \lambda A(\lambda)\eta(\lambda)1 \leqslant 1; \tag{3.3.14}$$

$$\xi(\lambda)1 + \lambda\Psi(\lambda)1 \leqslant 1. \tag{3.3.15}$$

且 $R(\lambda)$ 不中断当且仅当(3.3.14) 及(3.3.15) 成立等号.

证明 若(3.3.13) 式成立，则由(3.3.5) 式知必有：

$$\lambda A(\lambda)1 + \lambda A(\lambda)\eta(\lambda)1 \leqslant 1. \tag{3.3.16}$$

$$\lambda\xi(\lambda)A(\lambda)1 + \lambda\Psi(\lambda)1 + \lambda\xi(\lambda)A(\lambda)\eta(\lambda)1 \leqslant 1.$$

令

$$D_1(\lambda)=\begin{pmatrix}d_a(\lambda)\\ d_b(\lambda)\end{pmatrix},\qquad D_2(\lambda)=\begin{pmatrix}d_1(\lambda)\\ d_2(\lambda)\\ \cdots\end{pmatrix}.$$

这里

$$d_a(\lambda)=1-\lambda\sum_{j\in E}r_{aj}(\lambda),d_b(\lambda)=1-\lambda\sum_{j\in E}r_{bj}(\lambda).$$

$$d_i(\lambda)=1-\lambda\sum_{j\in E}r_{ij}(\lambda),\quad (i\in N).$$

则上面两式可写为等式形式

$$\lambda A(\lambda)\mathbf{1}+\lambda A(\lambda)\eta(\lambda)\mathbf{1}+D_1(\lambda)=\mathbf{1}.$$

$$\lambda\xi(\lambda)A(\lambda)\mathbf{1}+\lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1}+\lambda\xi(\lambda)A(\lambda)\eta(\lambda)\mathbf{1}+D_2(\lambda)=\mathbf{1}.$$

将前式代入后式得：

$$\lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1}+\xi(\lambda)\mathbf{1}=\mathbf{1}-D_2(\lambda)+\xi(\lambda)D_1(\lambda).\quad(3.3.17)$$

如果

$$D_2(\lambda)\geqslant\xi(\lambda)D_1(\lambda)\quad(3.3.18)$$

成立，则由(3.3.17)立得(3.3.15)．而(3.3.14)由(3.3.16)可得．但(3.3.18)式是一般关系式

$$\begin{vmatrix}r_{aa}(\lambda) & r_{ab}(\lambda) & r_{aj}(\lambda)\\ r_{ba}(\lambda) & r_{bb}(\lambda) & r_{bj}(\lambda)\\ r_{ia}(\lambda) & r_{ib}(\lambda) & r_{ij}(\lambda)\end{vmatrix}\geqslant 0,\qquad (i,j\in N,\lambda>0).$$

的推论，后者则可由定理3.3.1推得．不中断性的充要条件显然．

由上述几个引理看出，若$R(\lambda)$是Q过程，则在(3.3.5)式中定义的

$$\eta(\lambda)=\begin{pmatrix}\eta^{(a)}(\lambda)\\ \eta^{(b)}(\lambda)\end{pmatrix},\xi(\lambda)=(\xi^{(a)}(\lambda),\xi^{(b)}(\lambda))$$

满足以下条件：

$$\eta^{(a)}(\lambda)\in L_{\Psi(\lambda)},\eta^{(b)}(\lambda)\in L_{\Psi(\lambda)},$$

$$\xi^{(a)}(\lambda)\in M_{\Psi(\lambda)},\xi^{(b)}(\lambda)\in M_{\Psi(\lambda)}.\quad(3.3.19)$$

且

$$\xi^{(a)}(\lambda)+\xi^{(b)}(\lambda)\leqslant\mathbf{1}-\lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1}.\quad(3.3.20)$$

因而，$\eta(\lambda)$的每行都是关于$\Psi(\lambda)$的广义行协调族，$\xi(\lambda)$的每列都

是关于$\Psi(\lambda)$的广义列协调族，进而易知$\xi^{(a)}(\lambda)+\xi^{(b)}(\lambda)$也是关于$\Psi(\lambda)$的广列族，这样，由引理3.1.3知，对任意$\eta(\lambda)\in L_{\Psi(\lambda)}$有

$$\lambda[\eta(\lambda),\xi^{(a)}],\lambda[\eta(\lambda),\xi^{(a)}+\xi^{(b)}],$$
$$\lambda[\eta(\lambda),1-\xi^{(a)}],\lambda[\eta(\lambda),1-\xi^{(a)}-\xi^{(b)}].$$

等等都是λ的单调函数，故当$\lambda\to+\infty$时，上述诸极限都存在，这点事实马上要用到.

为方便起见，称满足(3.3.19)及(3.3.20)的二维广义协调族$\eta(\lambda)$及$\xi(\lambda)$为关于$\Psi(\lambda)$的广义共轭二维协调对. 将记之为

$$(\eta(\lambda),\xi(\lambda))\in D^2_{\Psi(\lambda)}. \tag{3.3.21}$$

以符号$\lambda[\eta(\lambda),\xi]$表示二阶内积方阵，即

$$\lambda[\eta(\lambda),\xi]\triangleq\begin{pmatrix}\lambda[\eta^{(a)}(\lambda),\xi^{(a)}] & \lambda[\eta^{(a)}(\lambda),\xi^{(b)}]\\ \lambda[\eta^{(b)}(\lambda),\xi^{(a)}] & \lambda[\eta^{(b)}(\lambda),\xi^{(b)}]\end{pmatrix}. \tag{3.3.22}$$

类似地，我们有：若$(\eta(\lambda),\xi(\lambda))\in D^2_{\Psi(\lambda)}$则：

$$(\mu-\lambda)\eta(\lambda)\xi(\mu)=$$
$$\begin{pmatrix}\mu[\eta^{(a)}(\mu),\xi^{(a)}]-\lambda[\eta^{(a)}(\lambda),\xi^{(a)}] & \mu[\eta^{(a)}(\mu),\xi^{(b)}]-\lambda[\eta^{(a)}(\lambda),\xi^{(b)}]\\ \mu[\eta^{(b)}(\mu),\xi^{(a)}]-\lambda[\eta^{(b)}(\lambda),\xi^{(a)}] & \mu[\eta^{(b)}(\mu),\xi^{(b)}]-\lambda[\eta^{(b)}(\lambda),\xi^{(b)}]\end{pmatrix}.$$

后者我们自然可记之为

$$\mu[\eta(\mu),\xi]-\lambda[\eta(\lambda),\xi]. \tag{3.3.23}$$

这种表示方法十分方便，它形式上与一维情况相同，但注意其意义不一样了.

引理 3.3.6 设$(\eta(\lambda),\xi(\lambda))\in D^2_{\Psi(\lambda)}$，则$A(\lambda)$满足(3.3.7)式，即满足：

$$A(\lambda)-A(\mu)=(\mu-\lambda)A(\lambda)A(\mu)+(\mu-\lambda)A(\lambda)\eta(\lambda)\xi(\mu)A(\mu)$$

的充要条件是：存在二阶常数方阵

$$C=\begin{pmatrix}c_{11} & -c_{12}\\ -c_{21} & c_{22}\end{pmatrix},$$

使$C+\lambda I+\lambda[\eta(\lambda),\xi]$存在逆矩阵. 且

$$A(\lambda)=(C+\lambda I+\lambda[\eta(\lambda),\xi])^{-1}. \tag{3.3.24}$$

这里 I 是二阶单位方阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

证明 由于 $A^{-1}(\lambda)$ 存在，在(3.3.7)式中左乘 $A^{-1}(\lambda)$，右乘 $A^{-1}(\mu)$，且注意到 $A^{-1}(\lambda)$ 为有限维矩阵，而 $\eta(\lambda)$，$\xi(\mu)$ 非负，故结合律成立，得到

$$A^{-1}(\mu) - A^{-1}(\lambda) = (\mu - \lambda)I + (\mu - \lambda)\eta(\lambda)\xi(\mu).$$

由(3.3.23)式可得：

$$A^{-1}(\mu) - \mu I - \mu[\eta(\mu), \xi] = A^{-1}(\lambda) - \lambda I - \lambda[\eta(\lambda), \xi],$$

与参数 λ 无关，故为常数矩阵，记之为

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & -c_{12} \\ -c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

那么 $C + \lambda I + \lambda[\eta(\lambda), \xi]$ 存在逆阵，且(3.3.24)式成立. 必要性证毕.

反方向推回去则得充分性.

引理 3.3.7 形如(3.3.5)式的 $R(\lambda)$ 满足连续性条件 $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda) = I$ 当且仅当如下四式同时成立：

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda A(\lambda) = I;\ \lim_{\lambda \to +\infty} \eta(\lambda) = 0;\ \lim_{\lambda \to +\infty} \xi(\lambda) = 0;\ \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda \Psi(\lambda) = I.$$

进一步，在上述条件下，$R(\lambda)$ 满足 Q 条件 $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda(\lambda R(\lambda) - I) = Q$ 当且仅当如下四式同时成立：

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda(\lambda A(\lambda) - I) = Q_u;\ \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda \eta(\lambda) = Q_l;$$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda \xi(\lambda) = Q_r;\ \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda(\lambda \Psi(\lambda) - I) = Q_d.$$

其中 Q_u, Q_l, Q_r, Q_d 分别是 Q 在四个子块上的限制. 即

$$Q = \begin{pmatrix} Q_u & Q_l \\ Q_r & Q_d \end{pmatrix}.$$

证明 显然.

引理 3.3.8

$$\lim_{\lambda \to +\infty} (\lambda I - A^{-1}(\lambda)) = Q_u \triangleq \begin{pmatrix} q_{aa} & q_{ab} \\ q_{ba} & q_{bb} \end{pmatrix}.$$

证明 易计算出

$$\lambda I - A^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - \dfrac{r_{bb}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} & \dfrac{r_{ab}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \\ \dfrac{r_{ba}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} & \lambda - \dfrac{r_{aa}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \end{pmatrix}.$$

其中 $\Delta(\lambda) = r_{aa}(\lambda)r_{bb}(\lambda) - r_{ab}(\lambda)r_{ba}(\lambda) = |A(\lambda)| > 0$，故

$$\begin{aligned} &\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{r_{ab}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \\ &= \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{\lambda^2 r_{ab}(\lambda)}{\lambda r_{aa}(\lambda)\lambda r_{bb}(\lambda) - \lambda r_{ab}(\lambda)\lambda r_{ba}(\lambda)} \\ &= \frac{q_{ab}}{1\times 1 - 0\times 0} = q_{ab}. \end{aligned}$$

同理得

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{r_{ba}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = q_{ba}.$$

再有

$$\begin{aligned} &\lim_{\lambda\to+\infty} \left(\lambda - \frac{r_{bb}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}\right) \\ &= \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{\lambda r_{aa}(\lambda)r_{bb}(\lambda) - \lambda r_{ab}(\lambda)r_{ba}(\lambda) - r_{bb}(\lambda)}{r_{aa}(\lambda)r_{bb}(\lambda) - r_{ab}(\lambda)r_{ba}(\lambda)} \\ &= \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{\lambda^3 r_{aa}(\lambda)r_{bb}(\lambda) - \lambda^3 r_{ab}(\lambda)r_{ba}(\lambda) - \lambda^2 r_{bb}(\lambda)}{\lambda^2 r_{aa}(\lambda)r_{bb}(\lambda) - \lambda^2 r_{ab}(\lambda)r_{ba}(\lambda)} \\ &= \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{\lambda^2 r_{bb}(\lambda)(\lambda r_{aa}(\lambda) - 1) - \lambda^2 r_{ab}(\lambda)\lambda r_{ba}(\lambda)}{\lambda r_{aa}(\lambda)\lambda r_{bb}(\lambda) - \lambda r_{ab}(\lambda)\lambda r_{ba}(\lambda)} \\ &= \lim_{\lambda\to-\infty} \frac{\lambda r_{bb}(\lambda)\lambda(\lambda r_{aa}(\lambda) - 1) - \lambda^2 r_{ab}(\lambda)\lambda r_{ba}(\lambda)}{\lambda r_{aa}(\lambda)\lambda r_{bb}(\lambda) - \lambda r_{ab}(\lambda)\lambda r_{ba}(\lambda)} \\ &= \frac{1\times q_{aa} - q_{ab}\times 0}{1\times 1 - 0\times 0} = q_{aa}. \end{aligned}$$

同理得

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \left(\lambda - \frac{r_{aa}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}\right) = q_{bb}.$$

下面再对引理 3.3.6 中得到的常数矩阵 C 作进一步刻划.

引理 3.3.9 设 $R(\lambda)$ 是 Q 过程，则由引理 3.3.6 中得到的常

数矩阵 $C = \begin{pmatrix} c_{11} & -c_{12} \\ -c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ 有如下性质：

(i) $c_{ij} \geqslant 0, \qquad (i, j = 1, 2).$

(ii) $c_{12} = q_{ab} + \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda[\eta^{(a)}(\lambda), \xi^{(b)}] \geqslant \lambda[\eta^{(a)}(\lambda), \xi^{(b)}],$

$(\lambda > 0).$

$$c_{21} = q_{ba} + \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda[\eta^{(b)}(\lambda), \xi^{(a)}] \geqslant \lambda[\eta^{(b)}(\lambda), \xi^{(a)}],$$

$(\lambda > 0).$

(iii) $c_{11} \geqslant c_{12} + \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda[\eta^{(a)}(\lambda), 1 - \xi^{(a)} - \xi^{(b)}]$

$$= q_{ab} + \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda[\eta^{(a)}(\lambda), 1 - \xi^{(a)}].$$

$$c_{22} \geqslant c_{21} + \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda[\eta^{(b)}(\lambda), 1 - \xi^{(a)} - \xi^{(b)}]$$

$$= q_{ba} + \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda[\eta^{(b)}(\lambda), 1 - \xi^{(b)}].$$

从而 $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \lambda[\eta^{(a)}(\lambda), 1 - \xi^{(a)}]$ 及 $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \lambda[\eta^{(b)}(\lambda), 1 - \xi^{(b)}]$ 均应为有限数.

(iv) $c_{11} + \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda[\eta^{(a)}(\lambda), \xi^{(a)}] = q_a.$

$$c_{22} + \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda[\eta^{(b)}(\lambda), \xi^{(b)}] = q_b.$$

从而，若 a 为瞬时状态，应有：

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda[\eta^{(a)}(\lambda), \xi^{(a)}] = +\infty.$$

或等价地

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda\eta^{(a)}(\lambda)1 = +\infty.$$

若 a 为稳定态，应有：

$$\lim_{\lambda \to -\infty} \lambda[\eta^{(a)}(\lambda), \xi^{(a)}] \leqslant q_a < \infty.$$

同样对状态 b 有相同的结论.

最后，若 $R(\lambda)$ 不中断，则(iii)中的不等式应改为等式.

证明 由于 $R(\lambda)$ 是 Q 过程，必满足范条件，故由引理 3.3.5 有

$$\lambda A(\lambda)1 + \lambda A(\lambda)\eta(\lambda)1 - D_1(\lambda) = 1,$$

同乘 $A^{-1}(\lambda)$ 后得

$$\lambda 1 + \lambda\eta(\lambda)1 = A^{-1}(\lambda)1 - A^{-1}(\lambda)D_1(\lambda). \qquad (3.3.25)$$

易证明

$$A^{-1}(\lambda)D_1(\lambda) \geqslant 0. \qquad (3.3.26)$$

事实上，它就是

$$\frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{pmatrix} r_{bb}(\lambda) & -r_{ab}(\lambda) \\ -r_{ba}(\lambda) & r_{aa}(\lambda) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_a(\lambda) \\ d_b(\lambda) \end{pmatrix} \geqslant \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

而由于 $\Delta(\lambda) = |A(\lambda)| > 0$，故它等价于：

$$r_{bb}(\lambda)d_a(\lambda) \geqslant r_{ab}(\lambda)d_b(\lambda)$$

及

$$r_{aa}(\lambda)d_b(\lambda) \geqslant r_{ba}(\lambda)d_a(\lambda).$$

由推论 3.2.1 这两式成立，这就得证(3.3.26) 从而由(3.3.25)得：

$$\lambda\mathbf{1} + \lambda\eta(\lambda)\mathbf{1} \leqslant A^{-1}(\lambda)\mathbf{1}.$$

但由引理 3.3.6 知

$$A^{-1}(\lambda) = C + \lambda I + \lambda[\eta(\lambda),\xi],$$

故得到

$$\lambda\mathbf{1} + \lambda\eta(\lambda)\mathbf{1} \leqslant C\mathbf{1} + \lambda\mathbf{1} + \lambda[\eta(\lambda),\xi]\mathbf{1}.$$

写成分量形式即为：

$$\begin{cases} \lambda\eta^{(a)}(\lambda)\mathbf{1} \leqslant c_{11} - c_{12} + \lambda[\eta^{(a)}(\lambda),\xi^{(a)} + \xi^{(b)}]; \\ \lambda\eta^{(b)}(\lambda)\mathbf{1} \leqslant c_{22} - c_{21} + \lambda[\eta^{(b)}(\lambda),\xi^{(a)} + \xi^{(b)}]. \end{cases}$$

且当 $R(\lambda)$ 不中断时，上述两式成立等号，这就得到

$$c_{11} \geqslant c_{12} + \lambda[\eta^{(a)}(\lambda),\mathbf{1} - \xi^{(a)} - \xi^{(b)}], \quad (\lambda > 0).$$

$$c_{22} \geqslant c_{21} + \lambda[\eta^{(b)}(\lambda),\mathbf{1} - \xi^{(a)} - \xi^{(b)}], \quad (\lambda > 0).$$

注意到 $\lambda[\eta^{(a)}(\lambda),\mathbf{1} - \xi^{(a)} - \xi^{(b)}]$ 及 $\lambda[\eta^{(b)}(\lambda),\mathbf{1} - \xi^{(a)} - \xi^{(b)}]$ 都是 $\lambda > 0$ 的单调增函数，而 c_{11}, c_{22} 为常数，故必有：

$$c_{11} \geqslant c_{12} + \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda[\eta^{(a)}(\lambda),\mathbf{1} - \xi^{(a)} - \xi^{(b)}].$$

$$c_{22} \geqslant c_{21} + \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda[\eta^{(b)}(\lambda),\mathbf{1} - \xi^{(a)} - \xi^{(b)}].$$

(iii) 的前半部不等式得证，再由引理 3.3.8 知

$$\lim_{\lambda \to +\infty} (\lambda I - A^{-1}(\lambda)) = \begin{pmatrix} q_{aa} & q_{ab} \\ q_{ba} & q_{bb} \end{pmatrix}$$

及

$$A^{-1}(\lambda) = C + \lambda I + \lambda[\eta(\lambda),\xi];$$

得

$$C + \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda[\eta(\lambda),\xi] = \begin{pmatrix} -q_{aa} & -q_{ab} \\ -q_{ba} & -q_{bb} \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix} c_{11} & -c_{12} \\ -c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} + \lim_{\lambda\to+\infty} \begin{pmatrix} \lambda[\eta^{(a)}(\lambda),\xi^{(a)}] & \lambda[\eta^{(a)}(\lambda),\xi^{(b)}] \\ \lambda[\eta^{(b)}(\lambda),\xi^{(a)}] & \lambda[\eta^{(b)}(\lambda),\xi^{(b)}] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} q_a & -q_{ab} \\ -q_{ab} & q_b \end{pmatrix}.$$

这得到(ii) 及(iv),进而又得到(iii) 的后半部等式. (i) 则是(ii) 及(iii) 的推论,其它结论已显然成立.

现在可以统一得到下述定理了.

定理 3.3.2 设 $R(\lambda)$ 是定义在 E 上的 Q 过程,任取 $a \neq b \in E$. 令 $N = E - \{a,b\}$,则 $R(\lambda)$ 必可表为形式:

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Psi(\lambda) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A(\lambda) & A(\lambda)\eta(\lambda) \\ \xi(\lambda)A(\lambda) & \xi(\lambda)A(\lambda)\eta(\lambda) \end{pmatrix}.$$

其中

(i) $\Psi(\lambda)$ 是 Q_N 过程,$Q_N = (q_{ij}; i,j \in N)$ 是 Q 在 N 上的限制.

(ii) $(\eta(\lambda),\xi(\lambda)) \in D^2_{\Psi(\lambda)}$ 且 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda(\eta(\lambda),\xi(\lambda)) = (e,\varepsilon)$.

这里

$$e = \begin{pmatrix} e^{(a)} \\ e^{(b)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{aj}; j \in N \\ q_{bj}; j \in N \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon = (\varepsilon^{(a)},\varepsilon^{(b)}) = (q_{ja}, q_{jb}, j \in N).$$

(iii) $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda[\eta^{(a)}(\lambda), 1 - \xi^{(a)}] < +\infty$,

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda[\eta^{(b)}(\lambda), 1 - \xi^{(b)}] < +\infty$.

(iv) 存在与 λ 无关的常数矩阵 $C = \begin{pmatrix} c_{11} & -c_{12} \\ -c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$,使得 $C + \lambda I + \lambda[\eta(\lambda),\xi]$ 存在逆矩阵,其逆矩阵恰为 $R(\lambda)$ 在 $\{a,b\}$ 上的限

制 $A(\lambda)$，即

$$A(\lambda) = (C + \lambda I + \lambda[\eta(\lambda), \xi])^{-1}.$$

常数矩阵 $C = \begin{pmatrix} c_{11} & -c_{12} \\ -c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ 有性质

$$c_{12} = q_{ab} + \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda[\eta^{(a)}(\lambda), \xi^{(b)}] \geqslant 0,$$

$$c_{21} = q_{ba} + \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda[\eta^{(b)}(\lambda), \xi^{(a)}] \geqslant 0,$$

$$c_{11} \geqslant c_{12} + \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda[\eta^{(a)}(\lambda), 1 - \xi^{(a)} - \xi^{(b)}] \geqslant 0. \tag{3.3.27}$$

$$c_{22} \geqslant c_{21} + \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda[\eta^{(b)}(\lambda), 1 - \xi^{(a)} - \xi^{(b)}] \geqslant 0. \tag{3.3.28}$$

(v) 若 a 瞬时，则 $\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda[\eta^{(a)}(\lambda), \xi^{(a)}] = +\infty$，等价地 $\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda[\eta^{(a)}(\lambda), 1] = +\infty$.

若 a 稳定，则 $\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda[\eta^{(a)}(\lambda), \xi^{(a)}] < +\infty$，且 $c_{11} + \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda[\eta^{(a)}(\lambda), \xi^{(a)}] = q_a$.

对状态 b 有类似结论.

(vi) 若 $R(\lambda)$ 不中断，则进一步有

$$\xi(\lambda)1 = \xi^{(a)}(\lambda) + \xi^{(b)}(\lambda) = 1 - \lambda\Psi(\lambda)1.$$

且(3.3.27)及(3.3.28)成立等号，此时 $\lambda[\eta^{(a)}(\lambda), 1 - \xi^{(a)} - \xi^{(b)}]$ 及 $\lambda[\eta^{(b)}(\lambda), 1 - \xi^{(a)} - \xi^{(b)}]$ 均为与 λ 无关的有限数.

最后，上述形式的分解是唯一的.

证明 分解的唯一性由 $A(\lambda)$ 可逆立得，其它各项结论见定理 3.3.1 至引理 3.3.9 的证明.

定理 3.3.3 设 Q 是 $E = \{a, b\} \cup N$ 上的一个拟 Q-矩阵($a \neq b$)，如果存在一 Q_N 过程 $\Psi(\lambda)$ 及二维广义共轭协调对

$$(\eta(\lambda), \xi(\lambda)) \in D^2_{\Psi(\lambda)},$$

使满足条件：

(i) $\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda[\eta^{(a)}(\lambda), 1 - \xi^{(a)}] < +\infty$,

$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda[\eta^{(b)}(\lambda), 1 - \xi^{(b)}] < +\infty$.

(ii) $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda\eta(\lambda)=Q_l\triangleq(q_{ij};i=a,b,j\in N)$.

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda\xi(\lambda)=Q_r\triangleq(q_{ij};i\in N,j=a,b)$ 即 Q_l 及 Q_r 分别是 Q 在 $(a\cup b)\times N$ 及 $N\times(a\cup b)$ 上的限制.

(iii) 若 a 是稳定态,要求 $q_{ab}+\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta^{(a)}(\lambda),\mathbf{1}]\leqslant q_a$.

若 a 是瞬时态,要求 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta^{(a)}(\lambda),\xi^{(a)}]=+\infty$

或等价地 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta^{(a)}(\lambda),\mathbf{1}]=+\infty$.

若 b 是稳定态,要求 $q_{ba}+\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta^{(b)}(\lambda),\mathbf{1}]\leqslant q_b$.

若 b 是瞬时态,要求 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta^{(b)}(\lambda),\xi^{(b)}]=+\infty$

或等价地 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta^{(b)}(\lambda),\mathbf{1}]=+\infty$.

则 Q 是一个 $Q-$ 矩阵,换言之,一定存在 Q 过程,例如一个 Q 过程可构造如下

取常数矩阵 $C=\begin{pmatrix}c_{11} & -c_{12}\\ -c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$,使满足

$$c_{12}=q_{ab}+\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta^{(a)}(\lambda),\xi^{(b)}],$$

$$c_{21}=q_{ba}+\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta^{(b)}(\lambda),\xi^{(a)}].$$

$$\begin{aligned}c_{11}&\geqslant c_{12}+\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta^{(a)}(\lambda),\mathbf{1}-\xi^{(a)}-\xi^{(b)}]\\&=q_{ab}+\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta^{(a)}(\lambda),\mathbf{1}-\xi^{(a)}],\end{aligned}\tag{3.3.29}$$

$$\begin{aligned}c_{22}&\geqslant c_{21}+\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta^{(b)}(\lambda),\mathbf{1}-\xi^{(a)}-\xi^{(b)}]\\&=q_{ba}+\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta^{(b)}(\lambda),\mathbf{1}-\xi^{(b)}].\end{aligned}\tag{3.3.30}$$

其中,如果 a 稳定,应取

$$c_{11}=q_a-\lim_{\lambda\to-\infty}\lambda[\eta^{(a)}(\lambda),\xi^{(a)}],$$

如果 b 稳定,应取

$$c_{22}=q_b-\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta^{(b)}(\lambda),\xi^{(b)}].$$

然后令

$$A(\lambda)=(C+\lambda I+\lambda[\eta(\lambda),\xi])^{-1}.\tag{3.3.31}$$

$$R(\lambda)=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & 0\\ \mathbf{0} & \Psi(\lambda)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}A(\lambda) & A(\lambda)\eta(\lambda)\\ \xi(\lambda)A(\lambda) & \xi(\lambda)A(\lambda)\eta(\lambda)\end{pmatrix}.\tag{3.3.32}$$

就可得到一个 Q 过程 $R(\lambda)$.

若进一步还能满足条件：

$$\xi(\lambda)1 \triangleq \xi^{(a)}(\lambda) + \xi^{(b)}(\lambda) = 1 - \lambda\Psi(\lambda)1. \tag{3.3.33}$$

若 a 稳定，则还要求满足

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda[\eta^{(a)}(\lambda),1] = q_a - q_{ab}. \tag{3.3.34}$$

若 b 稳定，则还要求满足

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda[\eta^{(b)}(\lambda),1] = q_b - q_{ba}. \tag{3.3.35}$$

则 Q 过程 $R(\lambda)$ 还可取成不中断的，此时只要在上述构造中(3.3.29) 及(3.3.30) 取等号成立即可.

证明 由于条件(i) 满足，保证了 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta^{(a)}(\lambda),\xi^{(b)}]$, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta^{(b)}(\lambda),\xi^{(a)}]$, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta^{(a)}(\lambda),1 - \xi^{(a)} - \xi^{(b)}]$ 及 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta^{(b)}(\lambda),1 - \xi^{(a)} - \xi^{(b)}]$ 均存在且均为有限数，故常数矩阵 C 可以取到.

取定常数矩阵 C 后，由 C 的取法易知，矩阵

$$C + \lambda I + \lambda[\eta(\lambda),\xi]$$

有性质：对角线元素为正，非对角线元素非正，且各行行和严格大于 0，从而由矩阵论中周知的结果必有逆矩阵，且其逆矩阵为非负矩阵. 因而按(3.3.31) 可取到 $A(\lambda)$，且 $A(\lambda)$ 非负. 因此，按(3.3.32) 定义的 $R(\lambda)$ 满足

$$R(\lambda) \geqslant 0. \tag{3.3.36}$$

进一步，从 $A(\lambda)$ 的实际取法知

$$\begin{aligned} A^{-1}(\lambda) &= C + \lambda I + \lambda[\eta(\lambda),\xi] \\ &= \begin{pmatrix} \lambda + c_{11} + \lambda[\eta^{(a)}(\lambda),\xi^{(a)}] & -q_{ab} \\ -q_{ba} & \lambda + c_{22} + \lambda[\eta^{(b)}(\lambda),\xi^{(b)}] \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} A^{-1}(\lambda)1 &= \begin{pmatrix} \lambda + c_{11} + \lambda[\eta^{(a)}(\lambda),\xi^{(a)}] - q_{ab} \\ \lambda + c_{22} + \lambda[\eta^{(b)}(\lambda),\xi^{(b)}] - q_{ba} \end{pmatrix} \\ &\geqslant \begin{pmatrix} \lambda + \lambda[\eta^{(a)}(\lambda),1] \\ \lambda + \lambda[\eta^{(b)}(\lambda),1] \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.3.37}$$

即

$$\lambda 1 + \lambda\eta(\lambda)1 \leqslant A^{-1}(\lambda)1.$$

乘以非负矩阵 $A(\lambda)$，不等号保持方向

$$\lambda A(\lambda)1 + \lambda A(\lambda)\eta(\lambda)1 \leqslant 1. \qquad (3.3.38)$$

再加上已知条件 $(\eta(\lambda),\xi(\lambda)) \in D^2_{\Psi(\lambda)}$ 知

$$\xi(\lambda)1 + \lambda\Psi(\lambda)1 \leqslant 1. \qquad (3.3.39)$$

回顾引理 3.3.5 知，(3.3.38) 及 (3.3.39) 成立保证了我们按 (3.3.32) 定义的 $R(\lambda)$ 有

$$\lambda R(\lambda)1 \leqslant 1. \qquad (3.3.40)$$

再注意按已知条件 $\Psi(\lambda)$ 是 Q_N 过程且

$$(\eta(\lambda),\xi(\lambda)) \in D^2_{\Psi(\lambda)}.$$

知必有：

$$\Psi(\lambda) - \Psi(\mu) = (\mu - \lambda)\Psi(\lambda)\Psi(\mu),$$

$$\eta(\lambda) - \eta(\mu) = (\mu - \lambda)\eta(\lambda)\Psi(\mu),$$

$$\xi(\lambda) - \xi(\mu) = (\mu - \lambda)\Psi(\lambda)\xi(\mu).$$

从引理 3.3.6 知，定义的 $A(\lambda)$ 满足：

$$A(\lambda) - A(\mu) = (\mu - \lambda)A(\lambda)A(\mu) + (\mu - \lambda)A(\lambda)\eta(\lambda)\xi(\mu)A(\mu). \qquad (3.3.41)$$

现在由引理 3.3.4 知，我们按 (3.3.32) 定义的 $R(\lambda)$ 满足

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\mu - \lambda)R(\lambda)R(\mu). \qquad (3.3.42)$$

进一步，条件 (3.3.41) 及引理 3.1.2 及引理 3.1.1 保证了：

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\eta(\lambda) = 0, \qquad \lim_{\lambda\to+\infty}\xi(\lambda) = 0. \qquad (3.3.43)$$

$\Psi(\lambda)$ 是 Q_N 过程，当然保证了

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\Psi(\lambda) = I. \qquad (3.3.44)$$

由 $A(\lambda)$ 的定义式又不难证明：

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda A(\lambda) = I. \qquad (3.3.45)$$

(3.3.43)、(3.3.44) 及 3.3.45 的成立，保证了可利用引理 3.3.7 的结果，从而我们定义的 $R(\lambda)$ 满足条件：

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda R(\lambda) = I. \qquad (3.3.46)$$

由(3.3.36)、(3.3.40)、(3.3.42)及(3.3.46)可得,按(3.3.32)定义的 $R(\lambda)$ 确为一个马氏过程.我们只需证明它的 Q – 矩阵就是原给的 Q.

将原给的 Q 按 $\{a,b\}\times\{a,b\}$, $\{a,b\}\times N$, $N\times\{a,b\}$, $N\times N$ 分成四个子块,即

$$Q=\begin{pmatrix} Q_u & Q_r \\ Q_l & Q_d \end{pmatrix}.$$

条件(ii)及 $\Psi(\lambda)$ 是 Q_N 过程已保证了:

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\eta(\lambda)=Q_r,\ \lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\xi(\lambda)=Q_l,\ \lim_{\lambda\to+\infty}\lambda(\lambda\Psi(\lambda)-I)=Q_d. \tag{3.3.47}$$

再看我们定义的 $A(\lambda)$ 可知,必有:

$$\lambda I-A^{-1}(\lambda)=-C-\lambda[\eta(\lambda),\xi]$$
$$=\begin{pmatrix} -c_{11}-\lambda[\eta^{(a)}(\lambda),\xi^{(a)}] & q_{ab} \\ q_{ba} & -c_{22}-\lambda[\eta^{(b)}(\lambda),\xi^{(b)}] \end{pmatrix}.$$

当 a 稳定时,由 $c_{11}=q_a-\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta^{(a)}(\lambda),\xi^{(a)}]$ 知

$$\lim_{\lambda\to+\infty}(-c_{11}-\lambda[\eta^{(a)}(\lambda),\xi^{(a)}])$$
$$=\lim_{\lambda\to+\infty}(-q_a+\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta^{(a)}(\lambda),\xi^{(a)}]-\lambda[\eta^{(a)}(\lambda),\xi^{(a)}])$$
$$=-q_a+\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta^{(a)}(\lambda),\xi^{(a)}]-\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta^{(a)}(\lambda),\xi^{(a)}]=-q_a.$$

而 a 瞬时时,由条件(iii)知 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta^{(a)}(\lambda),\xi^{(a)}]=+\infty$,故更有:

$$\lim_{\lambda\to+\infty}(-c_{11}-\lambda[\eta^{(a)}(\lambda),\xi^{(a)}])=-\infty=-q_a.$$

同理也有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}(-c_{22}-\lambda[\eta^{(b)}(\lambda),\xi^{(b)}])=-q_b,$$

故我们证明了:

$$\lim_{\lambda\to+\infty}(\lambda I-A^{-1}(\lambda))=Q_u=\begin{pmatrix} q_{aa} & q_{ab} \\ q_{ba} & q_{bb} \end{pmatrix}.$$

注意到已证得的事实 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda A(\lambda)=I$,可得:

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda(\lambda A(\lambda)-I)=Q_u,$$

从而由引理 3.3.7 可得,按(3.3.32)定义的 $R(\lambda)$ 确实满足:

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda(\lambda R(\lambda)-I)=Q,$$
故 $R(\lambda)$ 确为 Q 过程.

最后注意,当(3.3.33)、(3.3.34)及(3.3.35)满足时,我们取的 $A(\lambda)$ 可满足:

$$\lambda A(\lambda)\mathbf{1}+\lambda A(\lambda)\eta(\lambda)\mathbf{1}=\mathbf{1}.$$

另外

$$\xi(\lambda)\mathbf{1}+\lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1}=\mathbf{1}.$$

亦由条件所保证.故按上述方法构成的 $R(\lambda)$ 必满足:

$$\lambda R(\lambda)\mathbf{1}=\mathbf{1}.$$

即存在不中断的 Q 过程.

§4 多维分解定理

本节将致力于证明多维分解定理.其中与§3类似的地方,推证将从略.为简化记号及陈述,与二维情况一样,我们引入 n 维广义共轭协调对的概念.

定义 3.4.1 设 $\Psi(\lambda)$ 是任意一个过程,称 $\eta(\lambda)\triangleq(\eta^{(1)}(\lambda),\eta^{(2)}(\lambda),\cdots,\eta^{(n)}(\lambda))^T$ 及 $\xi(\lambda)\triangleq(\xi^{(1)}(\lambda),\xi^{(2)}(\lambda),\cdots,\xi^{(n)}(\lambda))$ 是关于 $\Psi(\lambda)$ 的 n 维广义协调对,如果下列三条件满足

(i) $\forall\ 1\leqslant i\leqslant n,\eta^{(i)}(\lambda)\in L_{\Psi(\lambda)}$;

(ii) $\forall\ 1\leqslant i\leqslant n,\xi^{(i)}(\lambda)\in M_{\Psi(\lambda)}$;

(iii) $\sum_{i=1}^{n}\xi^{(i)}(\lambda)\leqslant\mathbf{1}-\lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1}$.

今后将简记之为 $(\eta(\lambda),\xi(\lambda))\in D^n_{\Psi(\lambda)}$.上面的条件(iii)今后常记作

$$\xi(\lambda)\mathbf{1}\leqslant\mathbf{1}-\lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1}. \tag{3.4.1}$$

但要注意左右两边 $\mathbf{1}$ 意义不同,左边的 $\mathbf{1}$ 表示 n 维列向量 $\begin{pmatrix}1\\1\\\cdots\\1\end{pmatrix}$ 而右

边的 **1** 一般是无限维列向量，故上式的确切意义是

$$\forall\ k, \sum_{i=1}^{n} \xi_k^{(i)}(\lambda) \leqslant 1 - \lambda \sum_{j \in E} \psi_{kj}(\lambda).$$

同二维情况一样，以符号 $\lambda[\eta(\lambda), \xi]$ 表示 n 阶内积方阵，即

$$\lambda[\eta(\lambda), \xi] = (\lambda[\eta^{(i)}(\lambda), \xi^{(j)}]; 1 \leqslant i, j \leqslant n).$$

这样，我们可得：如果 $(\eta(\lambda), \xi(\lambda)) \in D^n_{\Psi(\lambda)}$，则必有

$$(\mu - \lambda)\eta(\lambda)\xi(\mu) = \mu[\eta(\mu), \xi] - \lambda[\eta(\lambda), \xi]. \quad (3.4.2)$$

为了下面应用的方便，我们先来证明两个关于 n 阶矩阵的简单引理，我们下面讲的 n 阶矩阵，其元素是广义实数. 当矩阵元素都是有限实数时，我们称为"有限矩阵". 注意这里的"有限"不是指矩阵的阶数.

引理 3.4.1 设 $A(\lambda)$ 及 A 均为 n 阶有限方阵，如果 $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = A$ 则必有

$$\lim_{\lambda \to +\infty} |A(\lambda)| = |A| \quad \text{及} \quad \lim_{\lambda \to +\infty} A^*(\lambda) = A^*.$$

进而，如果 $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda A(\lambda) = I$ 且 $A(\lambda)$ 对任意 $\lambda > 0$ 可逆，则

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{A^{-1}(\lambda)}{\lambda} = I.$$

这里 $|A|$ 表示 A 的行列式，A^* 表 A 的伴随矩阵.

证明 令 $A(\lambda) = (a_{ij}(\lambda))$，$A = (a_{ij})$，则 $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} a_{ij}(\lambda) = a_{ij}$；$(\forall\ i, j)$. 由于 $a_{ij}(\lambda)$ 及 a_{ij} 均为有限数，而 n 阶行列式的定义无非是有限积的有限代数和，故有

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda \to +\infty} |A(\lambda)| &= \lim_{\lambda \to +\infty} \sum_{p_1 \cdots p_n} (-1)^{\tau} a_{1p_1}(\lambda) a_{2p_2}(\lambda) \cdots a_{np_n}(\lambda) \\
&= \sum_{p_1 \cdots p_n} (-1)^{\tau} (\lim_{\lambda \to +\infty} a_{1p_1}(\lambda))(\lim_{\lambda \to +\infty} a_{2p_2}(\lambda)) \cdots (\lim_{\lambda \to +\infty} a_{np_n}(\lambda)) \\
&= \sum_{p_1 \cdots p_n} (-1)^{\tau} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} = |A|.
\end{aligned}$$

而 $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A^*(\lambda) = A^*$ 则是刚证明的事实的推论，引理前半部分得证.

若 $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda A(\lambda) = I$，我们令 $B(\lambda) = \lambda A(\lambda)$，那么 $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} B(\lambda) = I$ 则

由刚证明的事实，必有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}|B(\lambda)| = |I| = 1 \qquad 及 \qquad \lim_{\lambda\to+\infty}B^*(\lambda) = I^* = I,$$

从而再由 $A(\lambda)$ 的可逆性及 $B^*(\lambda) = \lambda^{n-1}A^*(\lambda)$ 可得

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{A^{-1}(\lambda)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to+\infty}\frac{A^*(\lambda)}{\lambda|A(\lambda)|} = \lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda^{n-1}A^*(\lambda)}{\lambda^n|A(\lambda)|}$$

$$= \lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda^{n-1}A^*(\lambda)}{|\lambda A(\lambda)|} = \lim_{\lambda\to+\infty}\frac{B^*(\lambda)}{|B(\lambda)|}$$

$$= \frac{I}{|I|} = I.$$

引理 3.4.2 设 $A(\lambda)$ 为 n 阶有限方阵，且满足条件 $A(\lambda)$ 可逆及 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda A(\lambda) = I$ 则

(i) 若 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda(\lambda A(\lambda) - I) = Q$，则必有 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}(\lambda I - A^{-1}(\lambda)) = Q$.

(ii) 反之，若 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}(\lambda I - A^{-1}(\lambda)) = Q$，亦必有 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda(\lambda A(\lambda) - I) = Q$.

这里 Q 的非对角线元素为有限数.

注 本引理的直观意义是很清楚的，实际上，注意到 $\lambda(\lambda A(\lambda) - I) = \lambda A(\lambda)(\lambda I - A^{-1}(\lambda))$，并由条件 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda A(\lambda) = I$ 可知应该有 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda(\lambda A(\lambda) - I) = \lim\limits_{\lambda\to+\infty}(\lambda I - A^{-1}(\lambda))$. 但当然这不是严格证明.

证明 (i) 由已知条件，引用引理 3.4.1 可知 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{A^{-1}(\lambda)}{\lambda} = I$ 即

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\left(I - \frac{A^{-1}(\lambda)}{\lambda}\right) = \mathbf{0}. \tag{3.4.3}$$

注意有

$$\lambda(\lambda A(\lambda) - I) = \lambda^2 A(\lambda)\left(I - \frac{A^{-1}(\lambda)}{\lambda}\right) \tag{3.4.4}$$

及已知条件

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda(\lambda A(\lambda) - I) = Q. \tag{3.4.5}$$

现设 $A(\lambda) = (a_{ij}(\lambda))$，$A^{-1}(\lambda) = (b_{ij}(\lambda))$，$Q = (q_{ij})$. 由于当 $i \neq j$

时，q_{ij} 为有限数故(3.4.5)给出

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda^2 a_{ij}(\lambda)=q_{ij},\quad (i\neq j).\tag{3.4.6}$$

而恒等式(3.4.4)又给出

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\sum_k \lambda^2 a_{ik}(\lambda)(\delta_{kj}-\frac{b_{kj}(\lambda)}{\lambda})=q_{ij},\quad (i\neq j).$$

或

$$\lim_{\lambda\to+\infty}(\lambda^2 a_{ij}(\lambda)(1-\frac{b_{jj}(\lambda)}{\lambda})-\lambda^2 a_{ii}(\lambda)\frac{b_{ij}(\lambda)}{\lambda}$$

$$-\sum_{k\neq i,j}\lambda^2 a_{ik}(\lambda)\frac{b_{kj}(\lambda)}{\lambda})=q_{ij},\quad (i\neq j).\tag{3.4.7}$$

注意当 $k\neq i$ 且 $k\neq j$ 时，(3.4.6)及(3.4.3)给出 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda^2 a_{ik}(\lambda)$ 存在且为有限数 q_{ik}. 而 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{b_{kj}(\lambda)}{\lambda}=0$，从而

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\sum_{k\neq i,j}\lambda^2 a_{ik}(\lambda)\frac{b_{kj}(\lambda)}{\lambda}=\sum_{k\neq i,j}q_{ik}\times 0=0.$$

故由(3.4.7)将有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}(\lambda^2 a_{ij}(\lambda)(1-\frac{b_{jj}(\lambda)}{\lambda})-\lambda^2 a_{ii}(\lambda)\frac{b_{ij}(\lambda)}{\lambda})=q_{ij},\quad (i\neq j).$$

但 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda^2 a_{ij}(\lambda)=q_{ij}$ 为有限数. 而(3.4.3)又给出 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}(1-\dfrac{b_{jj}(\lambda)}{\lambda})=0$. 从而

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda^2 a_{ij}(\lambda)(1-\frac{b_{jj}(\lambda)}{\lambda})=q_{ij}\times 0=0,\quad (i\neq j).$$

这得到

$$\lim_{\lambda\to+\infty}(-\lambda^2 a_{ii}(\lambda)\frac{b_{ij}(\lambda)}{\lambda})=q_{ij},\quad (i\neq j).$$

但由已知条件 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda a_{ii}(\lambda)=1$，$q_{ij}$ 又有限，故极限 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}b_{ij}(\lambda)$ 必存在，且就是

$$\lim_{\lambda\to+\infty}(-b_{ij}(\lambda))=q_{ij},(i\neq j).\tag{3.4.8}$$

再来看对角线元，此时(3.4.4)式及已知条件给出

$$\lim_{\lambda\to+\infty}(\lambda^2 a_{ii}(\lambda)(1-\frac{b_{ii}(\lambda)}{\lambda})-\sum_{k\neq i}\lambda^2 a_{ik}(\lambda)(\frac{b_{ki}(\lambda)}{\lambda}))=q_{ii}.\tag{3.4.9}$$

注意，当 $k \neq i$ 时，$\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda^2 a_{ik}(\lambda)$ 存在，且为有限数 q_{ik}，而 $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \dfrac{b_{ki}(\lambda)}{\lambda}$ 存在且为 0，故知

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \sum_{k \neq i} \lambda^2 a_{ik}(\lambda) \frac{b_{ki}(\lambda)}{\lambda} = 0.$$

那么(3.4.9)给出

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^2 a_{ii}(\lambda)(1 - \frac{b_{ii}(\lambda)}{\lambda}) = q_{ii}. \tag{3.4.10}$$

这里 q_{ii} 虽然可能不是有限数. 但必有确定的符号，而 $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda a_{ii}(\lambda) = 1$. 故(3.4.10)仍然可以断言

$$\lim_{\lambda \to +\infty} (\lambda - b_{ii}(\lambda)) = q_{ii}. \tag{3.4.11}$$

现在(3.4.8)及(3.4.11)已说明

$$\lim_{\lambda \to +\infty} (\lambda I - A^{-1}(\lambda)) = Q.$$

(ii) 若

$$\lim_{\lambda \to -\infty} (\lambda I - A^{-1}(\lambda)) = Q,$$

即

$$\lim_{\lambda \to -\infty} \lambda(I - \frac{A^{-1}(\lambda)}{\lambda}) = Q.$$

令 $B(\lambda) = \dfrac{A^{-1}(\lambda)}{\lambda^2}$，则上式给出

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda(\lambda B(\lambda) - I) = -Q.$$

由已知条件 $A(\lambda)$ 可逆及 $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda A(\lambda) = I$. 由引理 3.4.1 可得

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{A^{-1}(\lambda)}{\lambda} = I.$$

从而 $B(\lambda)$ 亦可逆且 $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda B(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \dfrac{A^{-1}(\lambda)}{\lambda} = I$.

利用已证明的(i)的结果得

$$\lim_{\lambda \to +\infty} (\lambda I - B^{-1}(\lambda)) = -Q.$$

但显然

$$B^{-1}(\lambda) = (\frac{1}{\lambda^2} A^{-1}(\lambda))^{-1} = \lambda^2 A(\lambda),$$

故上式实际给出 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda(\lambda A(\lambda)-I)=Q$.

现在,可以来陈述并证明 n 维分解定理了.

定理 3.4.1 设 $R(\lambda)$ 是定义于 E 上的 Q 过程,任取 E 的有限子集 $E_1\subset E$. 令 $N=E-E_1$,则 $R(\lambda)$ 必可表为

$$R(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \Psi(\lambda)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}A(\lambda) & A(\lambda)\eta(\lambda)\\ \xi(\lambda)A(\lambda) & \xi(\lambda)A(\lambda)\eta(\lambda)\end{pmatrix}. \tag{3.4.12}$$

其中

(i) $A(\lambda)$ 是 $R(\lambda)$ 在 E_1 上的限制,即 $A(\lambda)=(r_{ij}(\lambda);i,j\in E_1)$,且满足条件

$$|A(\lambda)|>0,\qquad(\lambda>0). \tag{3.4.13}$$

从而 $A(\lambda)$ 对所有 $\lambda>0$ 可逆.

(ii) $\Psi(\lambda)$ 是 Q_N 过程,这里 $Q_N=(q_{ij};i,j\in N)$ 是 Q 在 N 上的限制. (3.4.14)

(iii) $(\eta(\lambda),\xi(\lambda))\in D^{|E_1|}_{\Psi(\lambda)}$. (3.4.15)

且

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda(\eta(\lambda),\xi(\lambda))=(Q_r;Q_l). \tag{3.4.16}$$

其中 $Q_r=(q_{ij},i\in E_1,j\in N)$,$Q_l=(q_{ij};i\in N,j\in E_1)$ 分别是 Q 在 $E_1\times N$ 及 $N\times E_1$ 上的限制.

(iv) $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta^{(i)}(\lambda),1-\xi^{(i)}]<+\infty,\quad(i\in E_1)$. (3.4.17)

(v) 存在与 λ 无关的 $|E_1|$ 阶常数矩阵 C,使得 $C+\lambda I+\lambda[\eta(\lambda),\xi]$ 可逆,且

$$A(\lambda)=(C+\lambda I+\lambda[\eta(\lambda),\xi])^{-1}. \tag{3.4.18}$$

其中,常数矩阵 C 的对角线元素为 c_{ii},非对角线元素为 $-c_{ij}(i\neq j)$,满足

$$c_{ij}=q_{ij}+\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta^{(i)}(\lambda),\xi^{(j)}](i\neq j,i,j\in E_1). \tag{3.4.19}$$

$$c_{ii}\geqslant\sum_{j\neq i}c_{ij}+\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta^{(i)}(\lambda),1-\sum_j\xi^{(j)}],(i\in E_1). \tag{3.4.20}$$

(vi) 若 $i \in E_1$ 为瞬时态，则

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda[\eta^{(i)}(\lambda), \xi^{(i)}] = +\infty \tag{3.4.21}$$

或等价地

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda[\eta^{(i)}(\lambda), 1] = +\infty. \tag{3.4.22}$$

若 $i \in E_1$ 为稳定态，则有 $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda[\eta^{(i)}(\lambda), \xi^{(i)}] < +\infty$ 且

$$q_i = c_{ii} + \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda[\eta^{(i)}(\lambda), \xi^{(i)}]. \tag{3.4.23}$$

(vii) 若 $R(\lambda)$ 不中断，则进一步有

$$\xi(\lambda)1 \triangleq \sum_{i \in E_1} \xi^{(i)}(\lambda) = 1 - \lambda\Psi(\lambda)1, \tag{3.4.24}$$

且(3.4.20)对所有$(i \in E_1)$取等号.

最后，满足上述条件的形如(3.4.12)的分解式是唯一的.

注 我们将对 E_1 中状态个数行归纳法来证明本定理. 为了行文的方便，我们将假定 $E = \{1,2,3,\cdots\}$，并在行归纳法时，认定对 $\widetilde{E}_1 = \{1,2,\cdots,k-1\}$ 成立，推证对 $E_1 = \{1,2,\cdots,k\}$ 成立. 这当然不失一般性.

另外与 §3 一样，为了同时得到后面一个逆定理，也为了突出上述各条件各自的意义和作用，我们将通过一系列的引理来完成本定理的证明.

显然，当 $|E_1| = 1$ 及 $|E_1| = 2$ 时，已证得定理结论正确. 现假设对 $\widetilde{E}_1 = \{1,2,\cdots,k-1\}$ 已正确，推证对 $E_1 = \{1,2,\cdots,k\}$ 亦正确，换言之，假定

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{\Psi}(\lambda) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widetilde{A}(\lambda) & \widetilde{A}(\lambda)\widetilde{\eta}(\lambda) \\ \widetilde{\xi}(\lambda)\widetilde{A}(\lambda) & \widetilde{\xi}(\lambda)\widetilde{A}(\lambda)\widetilde{\eta}(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{3.4.25}$$

其中 $\widetilde{\Psi}(\lambda), \widetilde{\eta}(\lambda), \widetilde{\xi}(\lambda), \widetilde{A}(\lambda)$ 分别定义在 $\widetilde{N} \times \widetilde{N}, \widetilde{E}_1 \times \widetilde{N}, \widetilde{N} \times \widetilde{E}_1, \widetilde{E}_1 \times \widetilde{E}_1$ 上，且满足条件(3.4.13)至(3.4.24). 这里 $\widetilde{N} = E - \widetilde{E}_1 = \{k, k+1, \cdots\}$. 由条件(3.4.14)知 $\widetilde{\Psi}(\lambda)$ 是 $Q_{\widetilde{N}}$ 过程. 故可再对它依状态$\{k\}$行一维分解得

$$\widetilde{\Psi}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Psi(\lambda) \end{pmatrix} + \widetilde{\psi}_{kk}(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ f_k(\lambda) \end{pmatrix} (1, g_k(\lambda)). \tag{3.4.26}$$

记

$$\widetilde{A}(\lambda)\widetilde{\eta}(\lambda)=\widetilde{R}_r(\lambda),\widetilde{\xi}(\lambda)\widetilde{A}(\lambda)=\widetilde{R}_l(\lambda),$$
$$\widetilde{\Psi}(\lambda)+\widetilde{\xi}(\lambda)\widetilde{A}(\lambda)\widetilde{\eta}(\lambda)=\widetilde{R}_d(\lambda).$$

那么，$R(\lambda)$ 可分块写为

$$R(\lambda)=\begin{pmatrix}\widetilde{A}(\lambda) & \widetilde{R}_r(\lambda)\\ \widetilde{R}_l(\lambda) & \widetilde{R}_d(\lambda)\end{pmatrix}. \tag{3.4.27}$$

为简便起见，在下面引理 3.4.3 和引理 3.4.4 中，我们有时省去(λ). 例如 $R(\lambda)$ 记为 R.

引理 3.4.3 若假设定理 3.4.1 对 $\widetilde{E}_1=\{1,2,\cdots,k-1\}$ 成立，则对任意 $i\in\widetilde{N}, j\in\widetilde{N}$. 必有

$$\begin{vmatrix} & & & & r_{1j}\\ & & & & r_{2j}\\ & & \widetilde{A} & & \cdots\\ & & & & r_{k-1j}\\ r_{i1} & r_{i2} & \cdots & r_{ik-1} & r_{ij}\end{vmatrix}\geqslant 0,$$

$$\begin{vmatrix} & & & & r_{1i}\\ & & & & r_{2i}\\ & & \widetilde{A} & & \cdots\\ & & & & r_{k-1i}\\ r_{i1} & r_{i2} & \cdots & r_{ik-1} & r_{ii}\end{vmatrix}>0. \tag{3.4.28}$$

换言之，$\widetilde{A}$ 的任意加边子阵的行列式非负，$\widetilde{A}$ 的任意加边主子阵的行列式严格正.

证明 由(3.4.25) 并注意 $\widetilde{\Psi}(\lambda)$ 是马氏过程，就有

$$\widetilde{\psi}_{ij}\geqslant 0,\qquad \widetilde{\psi}_{ii}>0,\quad (i\in\widetilde{N},j\in\widetilde{N}).$$

故

$$r_{ij}\geqslant\sum_{m=1}^{k-1}\sum_{l=1}^{k-1}\widetilde{\xi}_{il}r_{lm}\widetilde{\eta}_{mj},\quad (i\in\widetilde{N},j\in\widetilde{N}).$$

及

$$r_{ii}>\sum_{m=1}^{k-1}\sum_{l=1}^{k-1}\widetilde{\xi}_{il}r_{lm}\widetilde{\eta}_{mi},\quad (i\in\widetilde{N}).$$

由条件(3.4.13)知 $\widetilde{A}$ 可逆且 $|\widetilde{A}|>0$ 得

$$|\widetilde{A}|r_{ij}\geqslant\sum_{m=1}^{k-1}\sum_{l=1}^{k-1}\tilde{\xi}_{il}|\widetilde{A}|r_{lm}\tilde{\eta}_{mj},\quad(i\in\widetilde{N},j\in\widetilde{N}).$$

$$|\widetilde{A}|r_{ii}>\sum_{m=1}^{k-1}\sum_{l=1}^{k-1}\tilde{\xi}_{il}|\widetilde{A}|r_{lm}\tilde{\eta}_{mi},\quad(i\in\widetilde{N}).$$

注意到(3.4.27)式及 $\widetilde{A}^{-1}=\dfrac{\widetilde{A}^{*}}{|\widetilde{A}|}$ 这里 $\widetilde{A}^{*}\triangleq(\tilde{a}_{ij}^{*})$ 为 $\widetilde{A}$ 的伴随矩阵，就得

$$|\widetilde{A}|r_{ij}\geqslant\sum_{m=1}^{k-1}\sum_{l=1}^{k-1}r_{il}\tilde{a}_{ml}^{*}r_{mj},\quad(i\in\widetilde{N},j\in\widetilde{N}).$$

$$|\widetilde{A}|r_{ii}>\sum_{m=1}^{k-1}\sum_{l=1}^{k-1}r_{il}\tilde{a}_{ml}^{*}r_{mi},\quad(i\in\widetilde{N}).$$

由拉普拉斯定理知，上面两式就是欲证的(3.4.28).

由引理3.4.3的证明可知，我们实际上已得到如下的重要推论.

推论 3.4.1 若定理3.4.1对于 $|\widetilde{E}_1|=k-1$ 时成立，则过程 $R(\lambda)$ 的任意一个 k 阶主子式严格正，$R(\lambda)$ 的任意一个 k 阶偏主子式非负.

这个推论我们马上就要用到.

引理 3.4.4 设定理3.4.1对 $\widetilde{E}_1=\{1,2,\cdots,k-1\}$ 成立. 令

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}r_{11}(\lambda)&r_{12}(\lambda)&\cdots&r_{1k}(\lambda)\\r_{21}(\lambda)&r_{22}(\lambda)&\cdots&r_{2k}(\lambda)\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\r_{k1}(\lambda)&r_{k2}(\lambda)&\cdots&r_{kk}(\lambda)\end{pmatrix}.$$

则 $R(\lambda)$ 可表为

$$R(\lambda)=\begin{pmatrix}A(\lambda)&R_2(\lambda)\\R_3(\lambda)&R_4(\lambda)\end{pmatrix}.$$

再令

$$\eta_{lj}(\lambda)\triangleq\tilde{\eta}_{lj}(\lambda)-\tilde{\eta}_{lk}(\lambda)g_{kj}(\lambda),\quad(1\leqslant l\leqslant k-1,j\geqslant k+1).$$

$$\eta_{kj}(\lambda)\triangleq g_{kj}(\lambda),\qquad(j\geqslant k+1).$$

$$\xi_{jl}(\lambda) \triangleq \tilde{\xi}_{jl}(\lambda) - f_{jk}(\lambda)\tilde{\xi}_{kl}(\lambda), \quad (1 \leqslant l \leqslant k-1, j \geqslant k+1).$$

$$\xi_{jk}(\lambda) \triangleq f_{jk}(\lambda), \qquad (j \geqslant k+1).$$

$$\eta(\lambda) = (\eta_{lj}(\lambda); 1 \leqslant l \leqslant k, j \geqslant k+1).$$

$$\xi(\lambda) = (\xi_{jl}(\lambda); 1 \leqslant l \leqslant k, j \geqslant k+1).$$

其中 $g_k(\lambda) = (g_{kj}(\lambda); j \geqslant k+1), f_k(\lambda) = (f_{jk}(\lambda); j \geqslant k+1)$，及 $\tilde{\eta}(\lambda), \tilde{\xi}(\lambda)$ 等的定义见(3.4.25)及(3.4.26). 则有

$$R_2(\lambda) = A(\lambda)\eta(\lambda). \tag{3.4.29}$$

$$R_3(\lambda) = \xi(\lambda)A(\lambda). \tag{3.4.30}$$

$$R_4(\lambda) = \Psi(\lambda) + \xi(\lambda)A(\lambda)\eta(\lambda). \tag{3.4.31}$$

$$\xi(\lambda) \geqslant 0. \tag{3.4.32}$$

$$\eta(\lambda) \geqslant 0. \tag{3.4.33}$$

这里 $\Psi(\lambda)$ 是(3.4.26)中得到的过程.

证明 在下面的证明中，我们仍然省掉(λ). (3.4.29)及(3.4.30)可以直接验证. 实际上，(3.4.29)就是

$$r_{ij} = \sum_{l=1}^{k-1} r_{il}\eta_{lj} + r_{ik}\eta_{kj}, \quad (1 \leqslant i \leqslant k, j \geqslant k+1). \tag{3.4.34}$$

注意，当 $1 \leqslant i \leqslant k-1, j \geqslant k+1$，时

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{k-1} r_{il}\eta_{lj} + r_{ik}\eta_{kj} \\
&= \sum_{l=1}^{k-1} r_{il}(\tilde{\eta}_{lj} - \tilde{\eta}_{lk}g_{kj}) + r_{ik}g_{kj} \\
&= \sum_{l=1}^{k-1} r_{il}\tilde{\eta}_{lj} + (r_{ik} - \sum_{l=1}^{k-1} r_{il}\tilde{\eta}_{lk})g_{kj} \\
&= \sum_{l=1}^{k-1} r_{il}\tilde{\eta}_{lj} + 0 \times g_{kj} \\
&= \sum_{l=1}^{k-1} r_{il}\tilde{\eta}_{lj} \\
&= r_{ij}.
\end{aligned}$$

而当 $i = k, j \geqslant k+1$，时

$$\sum_{l=1}^{k-1} r_{kl}\eta_{lj} + r_{kk}\eta_{kj}$$

$$= \sum_{l=1}^{k-1} r_{kl}(\tilde{\eta}_{lj} - \tilde{\eta}_{lk} g_{kj}) + r_{kk} g_{kj}$$

$$= \sum_{l=1}^{k-1} r_{kl}\tilde{\eta}_{lj} + (r_{kk} - \sum_{l=1}^{k-1} r_{kl}\tilde{\eta}_{lk}) g_{kj}$$

$$= \sum_{l=1}^{k-1} r_{kl}\tilde{\eta}_{lj} + \tilde{\psi}_{kk} g_{kj}$$

$$= \tilde{\psi}_{ij} + \sum_{l=1}^{k-1} r_{kl}\tilde{\eta}_{lj}$$

$$= r_{kj}.$$

从而(3.4.34)也即(3.4.29)式得证.

同理,当 $i \geqslant k+1, 1 \leqslant j \leqslant k-1$ 时

$$\sum_{l=1}^{k} \xi_{il} r_{lj} = \sum_{l=1}^{k-1} \xi_{il} r_{lj} + \xi_{ik} r_{kj}$$

$$= \sum_{l=1}^{k-1} (\tilde{\xi}_{il} - f_{ik}\tilde{\xi}_{kl}) r_{lj} + f_{ik} r_{kj}$$

$$= \sum_{l=1}^{k-1} \tilde{\xi}_{il} r_{lj} + f_{ik}(r_{kj} - \sum_{l=1}^{k-1} \tilde{\xi}_{kl} r_{lj})$$

$$= \sum_{l=1}^{k-1} \tilde{\xi}_{il} r_{lj} + f_{ik} \times 0$$

$$= r_{ij}.$$

而当 $i \geqslant k+1, j = k$ 时

$$\sum_{l=1}^{k} \xi_{il} r_{lk} = \sum_{l=1}^{k-1} \xi_{il} r_{lk} + \xi_{ik} r_{kk}$$

$$= \sum_{l=1}^{k-1} (\tilde{\xi}_{il} - f_{ik}\tilde{\xi}_{kl}) r_{lk} + f_{ik} r_{kk}$$

$$= \sum_{l=1}^{k-1} \tilde{\xi}_{il} r_{lk} + f_{ik}(r_{kk} - \sum_{l=1}^{k-1} \tilde{\xi}_{kl} r_{lk})$$

$$= \sum_{l=1}^{k-1} \tilde{\xi}_{il} r_{lk} + f_{ik} \tilde{\psi}_{kk}$$

$$= \tilde{\psi}_{ik} + \sum_{l=1}^{k-1} \tilde{\xi}_{il} r_{lk}$$

$$= r_{ik}.$$

从而(3.4.30)得证.

由引理3.4.3知,$A(\lambda)$可逆.故由已证得的(3.4.29)及(3.4.30)立得

$$\eta(\lambda) = A^{-1}(\lambda) R_2(\lambda) \quad 及 \quad \xi(\lambda) = R_3(\lambda) A^{-1}(\lambda)$$

故为证(3.4.32)及(3.4.33)只需证

$$\sum_{l=1}^{k} \frac{1}{|A|} a_{il}^{*} r_{lj} \geqslant 0, \quad (1 \leqslant i \leqslant k, j \geqslant k+1).$$

及

$$\sum_{l=1}^{k} r_{il} a_{jl}^{*} \frac{1}{|A|} \geqslant 0, \quad (i \geqslant k+1, 1 \leqslant j \leqslant k).$$

这里$(a_{ij}^{*}) = A^{*}$是A的伴随矩阵.注意到$|A| > 0$,故等价于要证明

$$\sum_{l=1}^{k} a_{il}^{*} r_{lj} \geqslant 0, \quad (1 \leqslant i \leqslant k, j \geqslant k+1).$$

$$\sum_{l=1}^{k} r_{il} a_{jl}^{*} \geqslant 0, \quad (i \geqslant k+1, 1 \leqslant j \leqslant k).$$

但上面两式的左边是$R(\lambda)$的K阶偏主子式,它们的非负性已由推论3.4.1保证,从而证得(3.4.32)及(3.4.33).

最后,(3.4.31)亦容易直接验证.实际上,对于$i \geqslant k+1, j \geqslant k+1$有

$$r_{ij} = \tilde{\psi}_{ij} + \sum_{m=1}^{k-1} \sum_{l=1}^{k-1} \tilde{\xi}_{il} r_{lm} \tilde{\eta}_{mj}$$

$$= \tilde{\psi}_{ij} + \sum_{m=1}^{k-1} \sum_{l=1}^{k-1} (\xi_{il} + f_{ik} \tilde{\xi}_{kl}) r_{lm} (\eta_{mk} g_{kj})$$

$$= \tilde{\psi}_{ij} + \sum_{m=1}^{k-1} \sum_{l=1}^{k-1} \xi_{il} r_{lm} \eta_{mj} + f_{ik} \sum_{m=1}^{k-1} \left(\sum_{l=1}^{k-1} \tilde{\xi}_{kl} r_{lm} \right) \eta_{mj}$$

$$+ g_{kj}\sum_{l=1}^{k-1}(\sum_{m=1}^{k-1} r_{lm}\tilde{\eta}_{mk})\xi_{il} + f_{ik}g_{kj}\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{m=1}^{k-1}\tilde{\xi}_{kl}r_{lm}\tilde{\eta}_{mk}$$

$$= \tilde{\psi}_{ij} + \sum_{m=1}^{k-1}\sum_{l=1}^{k-1}\xi_{il}r_{lm}\eta_{mj} + f_{ik}\sum_{m=1}^{k-1} r_{km}\eta_{mj}$$

$$+ g_{kj}\sum_{l=1}^{k-1} r_{lk}\xi_{il} + f_{ik}g_{kj}\sum_{m=1}^{k-1}\sum_{l=1}^{k-1}\tilde{\xi}_{kl}r_{lm}\tilde{\eta}_{mk}$$

$$= \tilde{\psi}_{ij} + \sum_{m=1}^{k-1}\sum_{l=1}^{k-1}\xi_{il}r_{lm}\eta_{mj} + \xi_{ik}\sum_{m=1}^{k-1} r_{km}\eta_{mj}$$

$$+ (\sum_{l=1}^{k-1}\xi_{il}r_{lm})\eta_{kj} + f_{ik}g_{kj}(r_{kk} - \tilde{\psi}_{kk})$$

$$= \tilde{\psi}_{ij} - \tilde{\psi}_{kk}f_{ik}g_{kj} + \sum_{m=1}^{k-1}\sum_{l=1}^{k-1}\xi_{il}r_{lm}\eta_{mj}$$

$$+ \xi_{ik}\sum_{m=1}^{k-1} r_{km}\eta_{mj} + (\sum_{l=1}^{k}\xi_{il}r_{lm})\eta_{kj}$$

$$= \psi_{ij} + \sum_{m=1}^{k-1}\sum_{l=1}^{k-1}\xi_{il}r_{lm}\eta_{mj} + \xi_{ik}\sum_{m=1}^{k-1} r_{km}\eta_{mj}$$

$$+ (\sum_{l=1}^{k}\xi_{il}r_{lm})\eta_{kj}$$

$$= \psi_{ij} + \sum_{m=1}^{k}\sum_{l=1}^{k}\xi_{il}r_{lm}\eta_{mj}.$$

总结上述引理，我们已经得到

命题 3.4.1 设定理 3.4.1 对 $\tilde{E}_1 = \{1,2,\cdots,k-1\}$ 成立，则若令 $E_1 = \{1,2,\cdots,k\}$. 那么过程 $R(\lambda)$ 必可表为

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Psi(\lambda) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A(\lambda) & A(\lambda)\eta(\lambda) \\ \xi(\lambda)A(\lambda) & \xi(\lambda)A(\lambda)\eta(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{3.4.35}$$

其中 $A(\lambda),\eta(\lambda),\xi(\lambda),\Psi(\lambda)$ 分别定义于 $E_1\times E_1, E_1\times N, N\times E_1, N\times N, (N = E - E_1)$ 上，且

$A(\lambda)$ 是 $R(\lambda)$ 在 $E_1\times E_1$ 上的限制，满足 $|A(\lambda)|>0$，从而 $A(\lambda)$ 可逆. (3.4.36)

$\Psi(\lambda)$ 是 Q_N 过程，这里 $Q_N = (q_{ij}; i, j \in N)$ 是 Q 在 N 上的限制.

(3. 4. 37)

$$\eta(\lambda) \geqslant \mathbf{0}, \quad \xi(\lambda) \geqslant \mathbf{0}. \tag{3.4.38}$$

$\eta(\lambda)$ 的 k 个"分量"都是 N 上的可和行向量； (3. 4. 39)

$\xi(\lambda)$ 的 k 个"分量"都是 N 上的对 λ 一致有界的列向量；

(3. 4. 40)

$R(\lambda)$ 的任意 k 阶及 $k+1$ 阶偏主子式非负；$R(\lambda)$ 的任意 k 阶及 $k+1$ 阶主子式严格正. (3. 4. 41)

进而有

$$D_2(\lambda) \geqslant \xi(\lambda) D_1(\lambda). \tag{3.4.42}$$

$$A^{-1}(\lambda) D_1(\lambda) \geqslant \mathbf{0}. \tag{3.4.43}$$

这里

$$D_1(\lambda) = \begin{pmatrix} d_1(\lambda) \\ d_2(\lambda) \\ \cdots \\ d_k(\lambda) \end{pmatrix}, \qquad D_2(\lambda) = \begin{pmatrix} d_{k+1}(\lambda) \\ d_{k+2}(\lambda) \\ \cdots \end{pmatrix},$$

$$d_i(\lambda) = 1 - \lambda \sum_{j \in E} r_{ij}(\lambda). \quad (i \in E).$$

证明 命题的前半部分，包括(3. 4. 35)、(3. 4. 36)、(3. 4. 37)及(3. 4. 38) 已由引理 3. 4. 3 及引理 3. 4. 4 而得到.

(3. 4. 39) 及(3. 4. 40) 由 $\eta(\lambda)$，$\xi(\lambda)$ 的定义及归纳假设立得，其中 $\xi(\lambda)$ 的每一个分量关于 λ 的一致有界性也由归纳假设及定义得到，例如可取 1 为一致的界. $R(\lambda)$ 的任意 k 阶偏主子式及主子式的非负性及严格正性由推论 3. 4. 1 得到. 至于 $R(\lambda)$ 的任意 $k+1$ 阶偏主子式非负性及任意 $k+1$ 阶主子式的严格正性由已证的(3. 4. 35)、(3. 4. 36) 及(3. 4. 37) 用与引理 3. 4. 3 完全相同的证明方法而得到，只要将该引理的证明中用到的 $\widetilde{A}(\lambda)$，$\widetilde{\Psi}(\lambda)$ 用 $A(\lambda)$ 及 $\Psi(\lambda)$ 代替即可. 注意证明该引理时唯一用到的条件是 $|A(\lambda)| > 0$ 及 $\tilde{\psi}_{ij}(\lambda) \geqslant 0$，$\tilde{\psi}_{ii}(\lambda) > 0$. 而现在相应的条件 $|A(\lambda)| > 0$，$\psi_{ij}(\lambda) \geqslant 0$，$\psi_{ii}(\lambda) > 0$ 确实满足. 这得证(3. 4. 41).

最后,(3.4.42)及(3.4.43)是(3.4.41)的显然推论.

下面几个引理,完全类似于 §3 的讨论.

引理 3.4.5 设$R(\lambda)$形如(3.4.35)且满足(3.4.36)至(3.4.40),则$R(\lambda)$满足预解方程

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\mu - \lambda)R(\lambda)R(\mu) \tag{3.4.44}$$

的充要条件为如下四条同时成立

$$A(\lambda) - A(\mu) = (\mu - \lambda)A(\lambda)A(\mu) + (\mu - \lambda)A(\lambda)\eta(\lambda)\xi(\mu)A(\mu); \tag{3.4.45}$$

$$\eta(\lambda) - \eta(\mu) = (\mu - \lambda)\eta(\lambda)\Psi(\mu); \tag{3.4.46}$$

$$\xi(\lambda) - \xi(\mu) = (\mu - \lambda)\Psi(\lambda)\xi(\mu); \tag{3.4.47}$$

$$\Psi(\lambda) - \Psi(\mu) = (\mu - \lambda)\Psi(\lambda)\Psi(\mu). \tag{3.4.48}$$

证明 同引理 3.3.4 的证明.

引理 3.4.6 设$R(\lambda)$形如(3.4.35),则满足范条件

$$\lambda R(\lambda)1 \leqslant 1 \tag{3.4.49}$$

的充要条件为如下两条件同时成立

$$\lambda A(\lambda)1 + \lambda A(\lambda)\eta(\lambda)1 \leqslant 1; \tag{3.4.50}$$

$$\xi(\lambda)1 + \lambda\Psi(\lambda)1 \leqslant 1. \tag{3.4.51}$$

且$R(\lambda)$不中断当且仅当(3.4.50)及(3.4.51)成立等号.

证明 利用关系式(3.4.42),用与引理 3.3.5 相同的方法容易证得本引理.

注意,由(3.4.38)、(3.4.39)、(3.4.40)、(3.4.46)、(3.4.47)及(3.4.51)我们实际已得到$(\eta(\lambda),\xi(\lambda)) \in D^+_{\Psi(\lambda)}$.

引理 3.4.7 设$(\eta(\lambda),\xi(\lambda)) \in D^+_{\Psi(\lambda)}$,则$A(\lambda)$满足(3.4.45),即

$$A(\lambda) - A(\mu) = (\mu - \lambda)A(\lambda)A(\mu) + (\mu - \lambda)A(\lambda)\eta(\lambda)\xi(\mu)A(\mu)$$

的充分必要条件是存在常数k阶方阵

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & -c_{12} & \cdots & -c_{1k} \\ -c_{21} & c_{22} & \cdots & -c_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -c_{k1} & -c_{k2} & \cdots & c_{kk} \end{pmatrix}, \tag{3.4.52}$$

使 $C + \lambda I + \lambda[\eta(\lambda), \xi]$ 存在逆矩阵且

$$A^{-1}(\lambda) = C + \lambda I + \lambda[\eta(\lambda), \xi]. \tag{3.4.53}$$

证明 同引理 3.3.6 的证明.

引理 3.4.8 形如 (3.4.35) 的 $R(\lambda)$ 满足连续性条件 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda R(\lambda) = I$ 的充分必要条件是如下四式同时成立

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda A(\lambda) = I; \qquad \lim_{\lambda\to+\infty} \eta(\lambda) = 0;$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \xi(\lambda) = 0; \qquad \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda \Psi(\lambda) = I.$$

进一步,在满足连续性条件下,$R(\lambda)$ 满足 Q 条件 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda(\lambda R(\lambda) - I) = Q$ 当且仅当如下四式同时成立

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda(\lambda A(\lambda) - I) = Q_u; \qquad \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\eta(\lambda) = Q_r;$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\xi(\lambda) = Q_l; \qquad \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda(\lambda\Psi(\lambda) - I) = Q_d.$$

其中 Q_u, Q_r, Q_l 及 Q_d 分别是 Q 在 $E_1 \times E_1, E_1 \times N, N \times E_1, N \times N$ 上的限制.

证明 显然.

引理 3.4.9 设 $R(\lambda)$ 是 Q 过程,则由 (3.4.52) 式得到的常数矩阵

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & -c_{12} & \cdots & -c_{1k} \\ -c_{21} & c_{22} & \cdots & -c_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -c_{k1} & -c_{k2} & \cdots & c_{kk} \end{pmatrix}.$$

有性质

(i) $c_{ij} \geqslant 0, \quad (1 \leqslant i \leqslant k, 1 \leqslant j \leqslant k);$ (3.4.54)

(ii) $c_{ij} = q_{ij} + \lim\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda[\eta^{(i)}(\lambda), \xi^{(j)}], \quad (i \neq j, i, j \in E_1).$

(3.4.55)

(iii) $c_{ii} \geqslant \sum\limits_{j\neq i} c_{ij} + \lim\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda[\eta^{(i)}(\lambda), 1 - \sum\limits_{j\in E_1} \xi^{(j)}], \quad (i \in E_1).$

(3.4.56)

即

$$c_{ii} \geqslant \sum_{j \in E_1 - \{i\}} q_{ij} + \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda[\eta^{(i)}(\lambda), 1 - \xi^{(i)}], \quad (i \in E_1).$$

(3.4.57)

$$\text{(iv)} \quad c_{ii} + \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda[\eta^{(i)}, \xi^{(i)}] = q_i, \quad (i \in E_1). \tag{3.4.58}$$

且当 $R(\lambda)$ 不中断时,(3.4.56) 及(3.4.57) 应成立等号.

证明 因为 $R(\lambda)$ 是 Q 过程,故满足范条件从而

$$\lambda A(\lambda)1 + \lambda A(\lambda)\eta(\lambda)1 + D_1(\lambda) = 1.$$

同乘 $A^{-1}(\lambda)$ 后得到

$$\lambda 1 + \lambda\eta(\lambda)1 = A^{-1}(\lambda)1 - A^{-1}(\lambda)D_1(\lambda).$$

由(3.4.43) 得到

$$\lambda 1 + \lambda\eta(\lambda)1 \leqslant A^{-1}(\lambda)1,$$

且当 $R(\lambda)$ 不中断时,上式成立等号.

但由引理 3.4.7 知

$$A^{-1}(\lambda) = C + \lambda I + \lambda[\eta(\lambda), \xi],$$

故

$$\lambda\eta(\lambda)1 \leqslant C1 + \lambda[\eta(\lambda), \xi]1.$$

此即(3.4.56) 式,且 $R(\lambda)$ 不中断时,成立等号.

另由 $R(\lambda)$ 是 Q 过程,故由引理 3.4.2 及引理 3.4.8 知

$$\lim_{\lambda \to +\infty} (\lambda I - A^{-1}(\lambda)) = Q_s.$$

其中 $Q_s = (q_{ij}; i, j \in E_1)$ 是 Q 在 $E_1 \times E_1$ 上的限制,再注意到

$$A^{-1}(\lambda) = C + \lambda I + \lambda[\eta(\lambda), \xi]$$

立得

$$C + \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda[\eta(\lambda), \xi] = -Q_s.$$

此即(3.4.58) 及(3.4.55).

由(3.4.55) 及(3.4.56) 得到(3.4.57). 而(3.4.54) 是(3.4.55) 及(3.4.58) 的推论.

最后总结一下,来完成定理 3.4.1 的证明.

定理 3.4.1 的证明 当 $|E_1| = 1$ 或 $|E_1| = 2$ 时,已由 §2 及 §3 得证. 现设当 $|E_1| = k - 1$ 时成立,则当 $|E_1| = k$ 时,用归纳假设及再次应用一维分解定理,并按引理 3.4.4 中的方法定义 $\eta(\lambda)$

及 $\xi(\lambda)$，由命题 3.4.1 得知，$R(\lambda)$ 必可表为

$$R(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \Psi(\lambda)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}A(\lambda) & A(\lambda)\eta(\lambda)\\ \xi(\lambda)A(\lambda) & \xi(\lambda)A(\lambda)\eta(\lambda)\end{pmatrix}.$$

这得证(3.4.12)，并已得到(3.4.14)和(3.4.13).

另由命题 3.4.1 及引理 3.4.5 得证(3.4.15).(3.4.16)由引理 3.4.8 得到.(3.4.18)、(3.4.19)和(3.4.20)由引理 3.4.7 及引理 3.4.9 得到. 而(3.4.21)、(3.4.17)、(3.4.22)和(3.4.23)是(3.4.58)的推论，同时也得到了(3.4.24). 至此，定理对 $|E_1|=k$ 亦成立.

由归纳原理，定理对任意有限集 E_1 成立.

最后，分解形式的唯一性由 $A(\lambda)$ 可逆立即得到，定理 3.4.1 全部得证.

在上述各引理的证明中，我们实际上已证得下面的逆定理.

定理 3.4.2 设 Q 是 $E=E_1\cup N$ 上的一个拟 $Q-$ 矩阵，这里 E_1 为有限集，且 $E_1\cap N=\varnothing$，如果存在一个 Q_N 过程 $\Psi(\lambda)$ 及关于 $\Psi(\lambda)$ 的广义 $|E_1|$ 维共轭协调对，即存在 $(\eta(\lambda),\xi(\lambda))\in D^{k}_{\Psi(\lambda)}$ 满足下列条件

(i) $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda(\eta(\lambda),\xi(\lambda))=(Q_r,Q_l)$.

其中 Q_r 及 Q_l 分别是 Q 在 $E_1\times N$ 及 $N\times E_1$ 上的限制.

(ii) $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\lambda[\eta^{(i)}(\lambda),1-\xi^{(i)}]<+\infty,\quad(i\in E_1)$.

(iii) 若 $i\in E_1$ 是瞬时态，还要求

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta^{(i)}(\lambda),\xi^{(i)}]=+\infty$$

或等价地

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta^{(i)}(\lambda),1]=+\infty.$$

若 $i\in E_1$ 是稳定态，还要求

$$q_i\geqslant\sum_{j\in E_1-\{i\}}q_{ij}+\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta^{(i)},1].$$

则 Q 是一个 $Q-$ 矩阵，换言之，此时必存在 Q 过程.

若进一步还能满足条件

$$\xi(\lambda)\mathbf{1} = \mathbf{1} - \lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1}. \tag{3.4.59}$$

且对稳定态 $i \in E_1$ 有

$$q_i = \sum_{j\in E_1-\{i\}} q_{ij} + \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda[\eta^{(i)}(\lambda), \mathbf{1}]. \tag{3.4.60}$$

则 Q 过程还可取为不中断的.

证明 只要证明在条件满足时,我们可实际构造一个 Q 过程即可.实事上,我们先取一个 $|E_1|$ 阶的常数矩阵 C 如下

$$c_{ij} = q_{ij} + \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda[\eta^{(i)}(\lambda), \xi^{(j)}], \quad (i \neq j, i, j \in E_1).$$

且对所有的 $i \in E_1$,

若 $q_i = +\infty$,则任取 $c_{ii} \geqslant \sum_{j\in E_1-\{i\}} q_{ij} + \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda[\eta^{(i)}(\lambda), 1 - \xi^{(i)}]$;

若 $q_i < +\infty$,则取定 $c_{ii} = q_i - \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda[\eta^{(i)}, \xi^{(i)}]$;

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & -c_{12} & \cdots & -c_{1n} \\ -c_{21} & c_{22} & \cdots & -c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -c_{n1} & -c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

这里 $n = |E_1|$.

由已知条件(ii)及(iii)可知这样的常数矩阵 C 确实可以取到.

然后,再对任意 $\lambda > 0$ 构造 $|E_1|$ 阶的方阵如下

$$C + \lambda I + \lambda[\eta(\lambda), \xi].$$

注意到 $\lambda[\eta^{(i)}(\lambda), \xi^{(j)}]$ 随 λ 单调上升,故按上述方法得到的方阵有:对任意 $\lambda > 0$,非对角线元素非正,而每行行和严格大于 0.故由周知的线性代数结果知

$$C + \lambda I + \lambda[\eta(\lambda), \xi]$$

必有逆矩阵,且其逆非负.

令

$$A(\lambda) = (C + \lambda I + \lambda[\eta(\lambda), \xi])^{-1}$$

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Psi(\lambda) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A(\lambda) & A(\lambda)\eta(\lambda) \\ \xi(\lambda)A(\lambda) & \xi(\lambda)A(\lambda)\eta(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{3.4.61}$$

由于证得 $A(\lambda)$ 非负,而 $\eta(\lambda), \xi(\lambda), \Psi(\lambda)$ 的非负性,由已知条件可

得.从而按(3.4.61)定义的 $R(\lambda)$ 必然非负.

易算出,按上述方法定义的 $A(\lambda)$ 有性质

$$A^{-1}(\lambda)\mathbf{1} = C\mathbf{1} + \lambda\mathbf{1} + \lambda[\eta(\lambda),\xi]\mathbf{1}$$
$$\geqslant \lambda\mathbf{1} + \lambda[\eta(\lambda),\mathbf{1}].$$

两边同乘非负矩阵后,不等式不改变方向.(注意:上面两式也是非负矩阵)得到

$$\lambda A(\lambda)\mathbf{1} + \lambda A(\lambda)\eta(\lambda)\mathbf{1} \leqslant \mathbf{1}.$$

再利用已知条件 $(\eta(\lambda),\xi(\lambda)) \in D^{E}_{|\Psi(\lambda)|}$ 知

$$\xi(\lambda)\mathbf{1} + \lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1} \leqslant \mathbf{1}.$$

由引理 3.4.6 知,上面两式保证了,按(3.4.61)定义的 $R(\lambda)$ 满足范条件

$$\lambda R(\lambda)\mathbf{1} \leqslant \mathbf{1}.$$

至于 $R(\lambda)$ 满足预解方程,则由 $A(\lambda)$ 的定义及已知条件,$\Psi(\lambda)$ 是 Q 过程,$(\eta(\lambda),\xi(\lambda)) \in D^{E}_{|\Psi(\lambda)|}$,并用引理 3.4.5 而得.

至于 $R(\lambda)$ 的连续性条件及 Q 条件由已知条件(i),$(\eta(\lambda),\xi(\lambda)) \in D^{E}_{|\Psi(\lambda)|}$,并用引理 3.4.8 不难验算.

故 $R(\lambda)$ 确为 Q 过程.

最后当条件(3.4.59)及(3.4.60)满足时,易知可以构造一个不中断的 Q 过程.

§5 Q 过程的若干性质

引理 3.5.1 设 $\Psi(\lambda)$ 是马氏过程,则

(i) 对某个 $\lambda_0 > 0$,$\inf\limits_{i\in E}\sum\limits_{j\in E}\psi_{ij}(\lambda_0) = 0$ 等价于

$$\forall\ \lambda > 0, \qquad \inf_{i\in E}\sum_{j\in E}\psi_{ij}(\lambda) = 0.$$

(ii) 若 e 是 E 上非负不可和行向量,则对某个 $\lambda_0 > 0$,$e\Psi(\lambda_0)\mathbf{1} < +\infty$ 等价于

$$\forall\ \lambda > 0, \qquad e\Psi(\lambda)\mathbf{1} < +\infty.$$

证明 (i) 由 $\Psi(\lambda)$ 的预解方程知,$\forall\ \lambda > 0$,

$$\Psi(\lambda)-\Psi(\lambda_0)=(\lambda_0-\lambda)\Psi(\lambda_0)\Psi(\lambda).$$

从而

$$\Psi(\lambda)\mathbf{1}-\Psi(\lambda_0)\mathbf{1}=(\lambda_0-\lambda)\Psi(\lambda_0)\Psi(\lambda)\mathbf{1}.$$

故

$$\inf_{i\in E}\sum_{j\in E}\psi_{ij}(\lambda)\leqslant\inf_{i\in E}\sum_{j\in E}\psi_{ij}(\lambda_0)+\frac{1}{\lambda}|\lambda_0-\lambda|\inf_{i\in E}\sum_{j\in E}\psi_{ij}(\lambda_0).$$

由上式可知(i) 成立.

(ii) 由 $\Psi(\lambda)$ 的预解方程知,$\forall\ \lambda>0$.

$$e\Psi(\lambda)-e\Psi(\lambda_0)=(\lambda_0-\lambda)e\Psi(\lambda_0)\Psi(\lambda).$$

从而 $\forall\ \lambda>0, e\Psi(\lambda)\mathbf{1}<+\infty$ 等价于 $e\Psi(\lambda_0)\mathbf{1}<+\infty$.

引理 3.5.2 设 $\Psi(\lambda)$ 是马氏过程,则以下三条相互等价

(i) $\inf_{i\in E}\sum_{j\in E}\psi_{ij}(\lambda)=0,\qquad(\lambda>0)$;

(ii) 存在 E 上非负不可和行向量 e,使得

$$e\Psi(\lambda)\mathbf{1}<+\infty,\qquad(\lambda>0);$$

(iii) 存在 E 上无穷多个不同的(不计常数因子)非负不可和行向量 $V=\{e\}$,使得 $\forall\ e\in V$ 均有

$$e\Psi(\lambda)\mathbf{1}<+\infty,\qquad(\lambda>0).$$

证明 (ii) 等价于(iii) 是明显的. 我们只证明(i) 等价于(ii).

若(i) 成立,任意固定 $\lambda_0>0$,那么

$$\inf_{i\in E}\sum_{j\in E}\psi_{ij}(\lambda_0)=0.$$

从而存在 E 上非负不可和行向量 e,使得

$$e\Psi(\lambda_0)\mathbf{1}<+\infty.$$

由引理 3.5.1 得 $e\Psi(\lambda)\mathbf{1}<+\infty,\quad(\lambda>0)$. 即(ii) 成立.

反之,若(ii) 成立,则(i) 成立是明显的.

定理 3.5.1 设 $R(\lambda)$ 是马氏过程,e 和 m 分别是 E 上非负行向量和非负列向量,而且

$$\begin{cases}\sum_{i\in E}e_ir_{ij}(\lambda)<+\infty,\quad(\forall\ j\in E);\\ \sum_{j\in E}r_{ij}(\lambda)m_j<+\infty,\quad(\forall\ i\in E).\end{cases}\qquad(3.5.1)$$

则

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda eR(\lambda) = e, \quad \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda R(\lambda)m = m.$$

证明 任取 $j \in E$,固定 $\mu > 0$,当 $\lambda > \mu$ 时,$\forall\, i \in E$.

$$\begin{aligned}
&(\lambda - \mu)e_i r_{ij}(\lambda)r_{jj}(\mu) \\
&\leqslant (\lambda - \mu)e_i \sum_{k\in E} r_{ik}(\lambda)r_{kj}(\mu) \\
&= e_i(r_{ij}(\mu) - r_{ij}(\lambda)) \leqslant e_i r_{ij}(\mu).
\end{aligned}$$

由(3.5.1)及控制收敛定理得

$$\begin{aligned}
&\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda \sum_{i\in E} e_i r_{ij}(\lambda)r_{jj}(\mu) \\
&= \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{\lambda}{\lambda - \mu}(\lambda - \mu)\sum_{i\in E} e_i r_{ij}(\lambda)r_{jj}(\mu) \\
&= \sum_{i\in E} e_i \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda r_{ij}(\lambda)r_{jj}(\mu) = e_j r_{jj}(\mu).
\end{aligned}$$

注意 $r_{jj}(\mu) > 0$,及 $j \in E$ 的任意性得

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda eR(\lambda) = e.$$

同理可证 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda R(\lambda)m = m$.

定理 3.5.2 设 $\Psi(\lambda)$ 是 Q 过程,$\eta(\lambda) \in L_{\Psi(\lambda)}$,$\xi(\lambda) \in M_{\Psi(\lambda)}$,$\xi(\lambda) \leqslant 1 - \lambda\Psi(\lambda)1$,

而且

$$\begin{aligned}
&\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\eta_i(\lambda) = e_i < +\infty, \\
&\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\xi_i(\lambda) = m_i < +\infty. \qquad (3.5.2) \\
&\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\eta(\lambda)(1 - \xi) = b < +\infty.
\end{aligned}$$

此处,$\xi = \lim\limits_{\lambda\downarrow 0}\xi(\lambda)$.

那么

$$R(\lambda) = \Psi(\lambda) + \xi(\lambda)\frac{\eta(\lambda)}{c + \lambda\eta(\lambda)\xi}, \quad (b \leqslant c < +\infty) \tag{3.5.3}$$

是 $\bar{Q}$ 过程,其中 $\bar{Q} = (\bar{q}_{ij}; i, j \in E)$ 满足

$$\bar{q}_{ij}=\begin{cases} q_{ij}, & \text{若} \lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda\eta(\lambda)\mathbf{1}=+\infty. \\ q_{ij}+m_i\dfrac{e_j}{c-b+\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda\eta(\lambda)\mathbf{1}}, & \text{若} \lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda\eta(\lambda)\mathbf{1}<+\infty. \end{cases} \tag{3.5.4}$$

并且

$$\begin{aligned} &\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda(\mathbf{1}-\lambda R(\lambda)\mathbf{1}) \\ =&\begin{cases} \lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda(\mathbf{1}-\lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1})-m, & \text{若} \lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda\eta(\lambda)\mathbf{1}=+\infty; \\ \lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda(\mathbf{1}-\lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1})-A^*, & \text{若} \lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda\eta(\lambda)\mathbf{1}<+\infty. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.5.5}$$

此处 $A^*=m\dfrac{\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda\eta(\lambda)\mathbf{1}}{c-b+\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda\eta(\lambda)\mathbf{1}}$.

特别,若 $c=b$,则必有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda(\mathbf{1}-\lambda R(\lambda)\mathbf{1})=\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda(\mathbf{1}-\lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1})-m. \tag{3.5.6}$$

证明 由广义行协调族的性质及定理的条件得

$$\lambda\eta(\lambda)(\mathbf{1}-\xi)\uparrow b \quad (\lambda\uparrow+\infty).$$

从而

$$c+\lambda\eta(\lambda)\xi\geqslant b+\lambda\eta(\lambda)\xi\geqslant\lambda\eta(\lambda)\mathbf{1}.$$

由上式及 $\xi(\lambda)\leqslant\mathbf{1}-\lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1}$ 得

$$R(\lambda)\geqslant 0,\quad \lambda R(\lambda)\mathbf{1}\leqslant\mathbf{1},\quad (\lambda>0).$$

即 $R(\lambda)$ 满足非负性和范条件. 由 $\lambda r_{ii}(\lambda)\geqslant\lambda\psi_{ii}(\lambda)\to 1,(\lambda\uparrow+\infty),(\forall\, i\in E)$,知 $R(\lambda)$ 具有连续性.

由引理 3.1.3(ii),

$$(\lambda-\mu)\eta(\lambda)\xi(\mu)=\lambda\eta(\lambda)\xi-\mu\eta(\mu)\xi,$$

注意 $\eta(\lambda)\in L_{\Psi(\lambda)}$,$\xi(\lambda)\in M_{\Psi(\lambda)}$ 及 $\Psi(\lambda)$ 的预解方程得

$$\begin{aligned} &(\lambda-\mu)R(\lambda)R(\mu) \\ =&(\lambda-\mu)\Psi(\lambda)\Psi(\mu)+(\lambda-\mu)\xi(\lambda)\frac{\eta(\lambda)\xi(\mu)}{c+\lambda\eta(\lambda)\xi} \end{aligned}$$

$$\cdot \frac{\eta(\mu)}{c+\mu\eta(\mu)\xi} + (\lambda-\mu)\xi(\lambda)\frac{\eta(\lambda)\Psi(\mu)}{c+\lambda\eta(\lambda)\xi}$$

$$+ (\lambda-\mu)\Psi(\lambda)\xi(\mu)\frac{\eta(\mu)}{c+\mu\eta(\mu)\xi}$$

$$= \Psi(\mu) - \Psi(\lambda) + \xi(\lambda)\frac{\lambda\eta(\lambda)\xi - \mu\eta(\mu)\xi}{(c+\lambda\eta(\lambda)\xi)(c+\mu\eta(\mu)\xi)}\eta(\mu)$$

$$+ \xi(\lambda)\frac{\eta(\mu)-\eta(\lambda)}{c+\lambda\eta(\lambda)\xi} + (\xi(\mu)-\xi(\lambda))\frac{\eta(\mu)}{c+\mu\eta(\mu)\xi}$$

$$= \Psi(\mu) + \xi(\mu)\frac{\eta(\mu)}{c+\mu\eta(\mu)\xi} - \left(\Psi(\lambda)+\xi(\lambda)\frac{\eta(\lambda)}{c+\lambda\eta(\lambda)\xi}\right)$$

$$= R(\mu) - R(\lambda).$$

从而$R(\lambda)$满足预解方程,故$R(\lambda)$是马氏过程.设$\bar{Q}=(\bar{q}_{ij};i,j\in E)$是$R(\lambda)$的$Q-$矩阵,则

$$\bar{q}_{ij} = \lim_{\lambda\to+\infty}\lambda(\lambda r_{ij}(\lambda)-\delta_{ij})$$

$$= \lim_{\lambda\to+\infty}\lambda(\lambda\psi_{ij}(\lambda)-\delta_{ij}) + \lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\xi_i(\lambda)\frac{\lambda\eta_j(\lambda)}{c+\lambda\eta(\lambda)\xi}$$

$$= \begin{cases} q_{ij}, & \text{若} \lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda\eta(\lambda)1 = +\infty. \\ q_{ij} + m_i\dfrac{e_j}{c+\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda\eta(\lambda)\xi}, & \text{若} \lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda\eta(\lambda)1 < +\infty. \end{cases} \qquad (3.5.7)$$

由$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}(\lambda\eta(\lambda)1-\lambda\eta(\lambda)\xi)=b<+\infty$可得(3.5.4).由上式及(3.5.3)式可得(3.5.5);由(3.5.5)可得(3.5.6).

推论 3.5.1 设Q是$Q-$矩阵,$\Psi(\lambda)$是一个Q过程,如果

$$\inf_{i\in E}\sum_{j\in E}\psi_{ij}(\lambda) = 0, \qquad (\lambda>0). \qquad (3.5.8)$$

则存在无穷多个诚实Q过程.

证明 由(3.5.8)及引理3.5.2,存在E上无穷多个非负不可和的行向量$V=\{e;e\geqslant 0,e1=+\infty\}$,使得$\forall\ e\in V$均有

$$e\Psi(\lambda)1<+\infty, \qquad (\lambda>0).$$

令

$$\eta(\lambda)=e\Psi(\lambda),\xi(\lambda)=1-\lambda\Psi(\lambda)1.$$

由引理3.1.4,$\lambda\eta(\lambda)(1-\xi)=b<+\infty$与$\lambda$无关

因此，$\eta(\lambda)$，$\xi(\lambda)$ 满足定理 3.5.2 的条件. 令

$$R^e(\lambda) = \Psi(\lambda) + (1 - \lambda\Psi(\lambda)1)\frac{e\Psi(\lambda)}{\lambda e\Psi(\lambda)1}. \qquad (3.5.9)$$

由定理 3.5.2，$R^e(\lambda)$ 是 Q 过程（在(3.5.3)中取 $c = b$ 得(3.5.9)）.

不难验证 $R^e(\lambda)$ 是诚实的，而且当 e 不同时（非常数倍）得到不同的 $R^e(\lambda)$. 由于 $e \in V$ 有无穷多个，从而得到无穷多个诚实 Q 过程.

§6　补充与注记

关于马尔可夫过程的禁止概率分解最早可见 K. L. Chung[1，I §11]和 J. Neveu[1]等文献. G. E. H. Reuter[1]首先应用禁止概率分解公式来构造 Q 过程. 陈安岳对其进行了详细研究并将其系统化，形成了本章中的分解定理. 它是我们研究 Q 过程的重要工具. §1 — §4 取自于陈安岳[4]，定理 3.5.1 取自于侯振挺、费志凌[1].

第2篇

Q过程的存在性

4 全稳定Q过程的存在性

本章讨论全稳定情况下Q过程的存在性. §1中，给出Feller最小Q过程，从而解决了全稳定Q过程的存在性问题. 在§2中，介绍最小Q过程的若干性质. 在§3中，给出全稳定Q过程的一般形式.

在本章中，若无特别声明，恒设Q是全稳定的.

§1 最小Q过程及全稳定Q过程的存在性

设$Q=(q_{ij};\ i,j\in E)$是任一全稳定拟Q－矩阵，定义$f_{ij}^{(n)}(t)\quad(t\geqslant 0)$如下：

$$\begin{cases} f_{ij}^{(0)}(t)=0; \\ f_{ij}^{(n-1)}(t)=\delta_{ij}e^{-q_i t}+e^{-q_i t}\int_0^t\Big(\sum_{k\neq i}q_{ik}f_{kj}^{(n)}(u)\Big)e^{q_i u}du. \end{cases} \tag{4.1.1}$$

引理4.1.1 设$Q=(q_{ij})$是全稳定拟Q－矩阵，那么按(4.1.1)定义$f_{ij}^{(n)}(t)$等价于按以下(4.1.2)定义$f_{ij}^{(n)}(t)$

$$\begin{cases} f_{ij}^{(0)}(t)=0; \\ f_{ij}^{(n+1)}(t)=\delta_{ij}e^{-q_j t}+e^{-q_j t}\int_0^t\Big(\sum_{k\neq j}f_{ik}^{(n)}(u)q_{kj}\Big)e^{q_j u}du. \end{cases} \tag{4.1.2}$$

而且$f_{ij}^{(n)}(t)\uparrow f_{ij}(t),\qquad(n\to\infty)$.

证明 考虑$f_{ij}^{(n)}(t)$的拉氏变换$\varphi_{ij}^{(n)}(\lambda)$，$(\lambda>0)$，那么(4.1.1)成为

$$\begin{cases} \varphi_{ij}^{(0)}(\lambda)=0; \\ \varphi_{ij}^{(n+1)}(\lambda)=\dfrac{1}{\lambda+q_i}\delta_{ij}+\sum_{k\neq i}\dfrac{q_{ik}}{\lambda+q_i}\varphi_{kj}^{(n)}(\lambda). \end{cases} \tag{4.1.3}$$

(4.1.2) 成为

$$\begin{cases} \varphi_{ij}^{(0)}(\lambda) = 0; \\ \varphi_{ij}^{(n+1)}(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda + q_j}\delta_{ij} + \sum\limits_{k \neq j} \varphi_{ik}^{(n)}(\lambda) \dfrac{q_{kj}}{\lambda + q_j}. \end{cases} \tag{4.1.4}$$

我们只要证明(4.1.3)与(4.1.4)等价即可.

为了简化,采用矩阵记号.令

$$\Pi = (\Pi_{ij});$$

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \dfrac{(1 - \delta_{ij})q_{ij}}{q_i}, & q_i > 0; \\ \delta_{ij}, & q_i = 0. \end{cases} \tag{4.1.5}$$

令 $\Pi(\lambda) = (\Pi_{ij}(\lambda))$:

$$\Pi_{ij}(\lambda) = \frac{q_i}{\lambda + q_i}\Pi_{ij}. \tag{4.1.6}$$

令对角形矩阵

$$\lambda + q = \mathrm{diag}(\lambda + q_i). \tag{4.1.7}$$

则(4.1.3)成为

$$\Phi^{(0)}(\lambda) = \mathbf{0},$$

$$\Phi^{(n+1)}(\lambda) = \Pi^0(\lambda)(\lambda + q)^{-1} + \Pi(\lambda)\Phi^{(n)}(\lambda).$$

归纳便知

$$\Phi^{(n+1)}(\lambda) = \sum_{\alpha=0}^{n} \Pi^{\alpha}(\lambda)(\lambda + q)^{-1}, n \geqslant 0. \tag{4.1.8}$$

从(4.1.4)得

$$\Phi^{(0)}(\lambda) = \mathbf{0},$$

$$\Phi^{(n+1)}(\lambda) = \Pi^0(\lambda)(\lambda + q)^{-1} + \Phi^{(n)}(\lambda)(\lambda + q)\Pi(\lambda)(\lambda + q)^{-1}.$$

归纳仍得(4.1.8),于是(4.1.3)等价于(4.1.4).

另外,由(4.1.1)或(4.1.2)归纳可得 $f_{ij}^{(n)}(t)$ 关于 n 单调不减.故

$$f_{ij}(t) = \lim_{n \to \infty} f_{ij}^{(n)}(t) \tag{4.1.9}$$

存在且非负,引理证毕.

若用 $\varphi_{ij}(\lambda)$ 表示 $f_{ij}(t)$ 的拉氏变换,则由(4.1.8)可知

$$\Phi(\lambda) = \sum_{a=0}^{\infty} \Pi^a(\lambda)(\lambda + q)^{-1}, \qquad (\lambda > 0). \quad (4.1.10)$$

定理 4.1.1 设 Q 是全稳定拟 Q — 矩阵，那么 $\Phi(\lambda) = (\varphi_{ij}(\lambda))$ 是 Q 过程且满足柯氏向后和向前方程组. $\Phi(\lambda)$ 还是最小 Q 过程，即对任意 Q 过程 $\Psi(\lambda) = (\psi_{ij}(\lambda))$ 有

$$\psi_{ij}(\lambda) \geqslant \varphi_{ij}(\lambda), \lambda > 0; i, j \in E. \quad (4.1.11)$$

证明 先证明 $\Phi(\lambda)$ 满足范条件、预解方程、B 条件及 F 条件.

$\Phi(\lambda)$ 的非负性是明显的. 由归纳知对一切 n 有 $\lambda\sum_j \varphi_{ij}^{(n)}(\lambda) \leqslant 1$，从而 $\lambda\sum_j \varphi_{ij}(\lambda) \leqslant 1$，即范条件成立.

为证 $\Phi(\lambda)$ 的预解方程成立，先证明对一切 n 有

$$\Pi^n(\lambda)(\lambda + q)^{-1} - \Pi^n(\mu)(\mu + q)^{-1}$$

$$= (\mu - \lambda)\sum_{a=0}^{n} \Pi^a(\lambda)(\lambda + q)^{-1}\Pi^{n-a}(\mu)(\mu + q)^{-1}. \quad (4.1.12)$$

记(4.1.12) 右方为 A_n，则有

$$\Pi(\lambda)A_n = A_{n+1} - (\mu - \lambda)(\lambda + q)^{-1}\Pi^{n+1}(\mu)(\mu + q)^{-1}. \quad (4.1.13)$$

当 $n = 0$ 时(4.1.12) 显然成立. 设(4.1.12) 对某 n 成立，将 $\Pi(\lambda)$ 作用到(4.1.12) 左边得

$$\begin{aligned}\Pi(\lambda)A_n &= \Pi^{n+1}(\lambda)(\lambda + q)^{-1} - \Pi(\lambda)\Pi^n(\mu)(\mu + q)^{-1} \\ &= \Pi^{n+1}(\lambda)(\lambda + q)^{-1} - \Pi^{n+1}(\mu)(\mu + q)^{-1} \\ &\quad - (\mu - \lambda)(\lambda + q)^{-1}\Pi^{n+1}(\mu)(\mu + q)^{-1}.\end{aligned}$$

将上式代入(4.1.13) 便得到将 $n+1$ 代替 n 后的(4.1.12) 式成立. 于是(4.1.12) 对一切 n 成立.

在(4.1.12) 式两边对 n 求和，注意(4.1.10) 便得

$$\Phi(\lambda) - \Phi(\mu) = (\mu - \lambda)\Phi(\lambda)\Phi(\mu). \quad (4.1.14)$$

即预解方程成立.

由(4.1.3) 和(4.1.4) 得

$$(\lambda + q_i)\varphi_{ij}^{(n+1)}(\lambda) = \delta_{ij} + \sum_{k\neq i} q_{ik}\varphi_{kj}^{(n)}(\lambda), \quad (4.1.15)$$

$$\varphi_{ij}^{(n+1)}(\lambda)(\lambda + q_j) = \delta_{ij} + \sum_{k\neq j} \varphi_{ik}^{(n)}(\lambda)q_{kj}. \quad (4.1.16)$$

令 $n\to\infty$ 得

$$(\lambda+q_i)\varphi_{ij}(\lambda)=\delta_{ij}+\sum_{k\neq i}q_{ik}\varphi_{kj}(\lambda), \tag{4.1.17}$$

$$\varphi_{ij}(\lambda)(\lambda+q_j)=\delta_{ij}+\sum_{k\neq i}\varphi_{ik}(\lambda)q_{kj}. \tag{4.1.18}$$

即 $\Phi(\lambda)$ 的 B 条件和 F 条件成立.

由 (4.1.14) 得 $\varphi_{ij}(\lambda)$ 关于 λ 单调不增，由范条件及

$$\varphi_{ij}(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}f_{ij}(t)dt,$$

得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\varphi_{ij}(\lambda)=0,\qquad i,j\in E.$$

由(4.1.17) 及上式得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\varphi_{ij}(\lambda)=\delta_{ij}. \tag{4.1.19}$$

即连续性条件成立. 再由(4.1.17) 得

$$\lambda(\lambda\varphi_{ij}(\lambda)-\delta_{ij})=\sum_k q_{ik}\lambda\varphi_{kj}(\lambda).$$

由(4.1.19) 及控制收敛定理得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(\lambda\Phi(\lambda)-I)=Q. \tag{4.1.20}$$

即 Q 条件成立.

因此，$\Phi(\lambda)$ 是一个 Q 过程且满足柯式向后和向前方程组.

最后，设 $\Psi(\lambda)=(\psi_{ij}(\lambda))$ 是任一 Q 过程，那么 $\Psi(\lambda)$ 满足柯式向后不等式组：

$$\lambda\psi_{ij}(\lambda)-\delta_{ij}\geqslant\sum_k q_{ik}\psi_{kj}(\lambda),\qquad i,j\in E. \tag{4.1.21}$$

显然 $\psi_{ij}(\lambda)\geqslant\varphi_{ij}^{(0)}(\lambda)$.

由上式及(4.1.3) 用归纳法易证 $\psi_{ij}(\lambda)\geqslant\varphi_{ij}^{(n)}(\lambda)$ 对一切 n 成立. 从而得(4.1.11).

定理证毕.

定理 4.1.2 对任给的一个全稳定拟 Q－矩阵 Q，Q 过程、B 型 Q 过程和 F 型 Q 过程总存在.

证明 由定理 4.1.1 立得本定理.

§2 最小 Q 过程的若干性质及(H)条件

在本节中，恒设 $Q=(q_{ij})$ 是全稳定 $Q-$ 矩阵，$\Phi(\lambda)=(\varphi_{ij}(\lambda))$ 表示最小 Q 过程.

引理 4.2.1 设 $f\geqslant 0, g\geqslant 0$ 分别是 E 上列向量和行向量，则当 $n\uparrow\infty$ 时，

$$\xi^{(n)}\uparrow\Phi(\lambda)f, \tag{4.2.1}$$

$$\eta^{(n)}\uparrow g\Phi(\lambda). \tag{4.2.2}$$

其中 $\xi^{(n)}$ 由下式确定：

$$\begin{cases}\xi_i^{(0)}=0;\\ \xi_i^{(n+1)}=\dfrac{f_i}{\lambda+q_i}+\sum\limits_{k\neq i}\dfrac{q_{ik}}{\lambda+q_i}\xi_k^{(n)}.\end{cases} \tag{4.2.3}$$

$\eta^{(n)}$ 由下式确定：

$$\begin{cases}\eta_j^{0}=0\\ \eta_j^{(n+1)}=\dfrac{g_j}{\lambda+q_j}+\sum\limits_{k\neq j}\eta_k^{(n)}\dfrac{q_{kj}}{\lambda+q_j}.\end{cases} \tag{4.2.4}$$

证明 令 $\xi^{(n)}=\Phi^{(n)}(\lambda)f, \eta^{(n)}=g\Phi^{(n)}(\lambda)$，则由(4.1.15)、(4.1.16)知(4.2.3)、(4.2.4)成立. 再注意 $\Phi^{(n)}(\lambda)\uparrow\Phi(\lambda)$，$(n\uparrow\infty)$，知(4.2.1)、(4.2.2)也成立.

引理 4.2.2 设 $f\geqslant 0$，若 u 满足下式

$$\begin{cases}(\lambda+q_i)u_i=\sum\limits_{j\neq i}q_{ij}u_j+f_i,\\ 0\leqslant u_i\leqslant\infty,\end{cases}\quad i\in E, \tag{4.2.5}$$

则 $u\geqslant\Phi(\lambda)f$.

设 $g\geqslant 0$，而 v 满足下式

$$\begin{cases}v_j(\lambda-q_j)=\sum\limits_{i\neq j}v_iq_{ij}+g_j,\\ 0\leqslant v_j\leqslant\infty,\end{cases}\quad j\in E, \tag{4.2.6}$$

则 $v\geqslant g\Phi(\lambda)$.

证明 因 $u\geqslant\xi^{(0)}=0$，由(4.2.5)、(4.2.3)归纳得 $u\geqslant\xi^{(n)}$，

从而 $u \geqslant \Phi(\lambda)f$.

类似可证 $v \geqslant g\Phi(\lambda)$.

令

$$A(\mu,\lambda) = I + (\mu - \lambda)\Phi(\lambda), \qquad \lambda,\mu > 0.$$

命题 4.2.1 $A(\mu,\lambda)$ 有界,且对任意 $\lambda,\mu,\nu > 0$,

$$A(\mu,\lambda)A(\lambda,\nu) = A(\mu,\nu),$$

$$\Phi(\mu)A(\mu,\lambda) = A(\mu,\lambda)\Phi(\mu) = \Phi(\lambda).$$

特别地

$$A(\mu,\lambda)A(\lambda,\mu) = I,$$

即 $A(\mu,\lambda)$ 存在有界左逆 $A(\lambda,\mu)$ 和有界右逆 $A(\lambda,\mu)$.

证明 利用 $\Phi(\lambda)$ 的范条件和预解方程易得 $A(\mu,\lambda)$ 有界及命题 4.2.1 中另外两等式成立.

记方程组

$$(U_\lambda) \qquad (\lambda I - Q)u = \mathbf{0} \tag{4.2.7}$$

的解 $u \in M_B$ 全体为 μ_λ,非负解 $u \in M_K$ 的全体为 μ_λ^+,μ_λ^+ 中其界为 K 的全体记为 $\mu_\lambda^+(K)$. 记方程组

$$(V_\lambda) \qquad v(\lambda I - Q) = \mathbf{0} \tag{4.2.8}$$

的解 $v \in L_B$ 全体为 L_λ,非负解 $v \in L_B$ 的全体为 L_λ^+.

引理 4.2.3 若 $f \in \mu_\mu$ 或 μ_μ^+,则 $A(\mu,\lambda)f \in \mu_\lambda$ 或 μ_λ^+. 若 $g \in L_\mu$ 或 L_μ^+,则 $gA(\mu,\lambda) \in L_\lambda$ 或 L_λ^+.

证明 设 $f \in \mu_\mu$,则由 $\Phi(\lambda)$ 的 B 条件,

$$\begin{aligned} QA(\mu,\lambda)f &= Qf + (\mu - \lambda)Q\Phi(\lambda)f \\ &= \mu f + (\mu - \lambda)(\lambda\Phi(\lambda)f - f) \\ &= \lambda A(\mu,\lambda)f \in M_B, \end{aligned}$$

即 $A(\mu,\lambda)f \in \mu_\lambda$.

设 $f \in \mu_\mu^+$. 当 $\lambda \leqslant \mu$ 时,显然有

$$A(\mu,\lambda)f = f + (\mu - \lambda)\Phi(\lambda)f \geqslant \mathbf{0}.$$

当 $\lambda > \mu$ 时,有

$$(\lambda I - Q)f = (\lambda - \mu)f \geqslant \mathbf{0}.$$

由引理 4.2.2, $f \geqslant \Phi(\lambda)(\lambda - \mu)f$,即 $A(\mu,\lambda)f \geqslant 0$.

$g\Phi(\lambda) \in L_\lambda$ 或 L_λ^+ 可类似证明.

定理 4.2.1 $\lambda \sum_j \varphi_{ij}(\lambda) = 1 - \sum_{a \in H} \varphi_{ia}(\lambda) d_a - \bar{X}_i(\lambda)$.

$$(4.2.9)$$

其中 H 为非保守状态集，$d = (d_i)$ 为 Q 的非保守列矢量，$\bar{X}(\lambda)$ 是方程

$$\begin{cases}(\lambda I - Q)u = \mathbf{0}, \\ \mathbf{0} \leqslant u \leqslant \mathbf{1}\end{cases} \tag{4.2.10}$$

的最大解，且 $u^{(n)} = \Pi^n(\lambda)\mathbf{1} \downarrow \bar{X}(\lambda)$，$u^{(n)}$ 即

$$\begin{cases}u_i^{(0)} = 1, \\ u_i^{(n+1)} = \sum\limits_{k \neq i} \dfrac{q_{ik}}{\lambda + q_i} u_k^{(n)}.\end{cases} \tag{4.2.11}$$

证明 由 $\Phi(\lambda)$ 的 B 条件得

$$(\lambda I - Q)\Phi(\lambda)d = d, \tag{4.2.12}$$

$$(\lambda I - Q)(\mathbf{1} - \lambda\Phi(\lambda)\mathbf{1}) = (\lambda I - Q)\mathbf{1} - \lambda\mathbf{1} = -Q\mathbf{1} = d. \tag{4.2.13}$$

由引理 4.2.2，

$$\mathbf{1} - \lambda\Phi(\lambda)\mathbf{1} \geqslant \Phi(\lambda)d.$$

从而由(4.2.12)、(4.2.13)知

$$\bar{X}(\lambda) = \mathbf{1} - \lambda\Phi(\lambda)\mathbf{1} - \Phi(\lambda)d$$

是方程(4.2.10)的解，并得到(4.2.9).

由引理 4.2.1，$1 - \bar{X}(\lambda) = \Phi(\lambda)(\lambda\mathbf{1} + d)$ 是上升列 $\xi^{(n)}$ 的极限，其中

$$\begin{cases}\xi_i^{(0)} = 0, \\ \xi_i^{(n+1)} = \dfrac{\lambda + d_i}{\lambda + q_i} + \sum\limits_{k \neq i} \dfrac{q_{ik}}{\lambda + q_i} \xi_k^{(n)}.\end{cases} \tag{4.2.14}$$

因而 $\bar{X}(\lambda)$ 是下降列 $u^{(n)} = 1 - \xi^{(n)}$ 的极限. 由上式得(4.2.11).

最后，设 u 是方程(4.2.10)的解，则由 $u \leqslant \mathbf{1}$ 有

$$u \leqslant \Pi(\lambda)u \leqslant \Pi(\lambda)\mathbf{1},$$

故

$$u \leqslant \Pi^n(\lambda)\mathbf{1}$$

从而

$$u \leqslant \lim_{n\to\infty}\Pi^n(\lambda)\mathbf{1} = \bar{X}(\lambda),$$

即 $\bar{X}(\lambda)$ 是方程(4.2.10)的最大解,证毕.

引理 4.2.4 设 $u \in \mu_\lambda$ 且 $|u| \leqslant \mathbf{1}$,则

$$-\bar{X}(\lambda) \leqslant u \leqslant \bar{X}(\lambda)$$

证明 右方不等式已在定理 4.2.1 中证明,左方不等式可类似证明.

引理 4.2.5 $\sum_{a\in H} X^a + \bar{X} + X^0 = \mathbf{1}$. (4.2.15)

其中

$$X_i^a = \Gamma_{ia}d_a, \quad a \in H;(\Gamma = \lim_{\lambda\to 0}\Phi(\lambda)) \qquad (4.2.16)$$

是列协调族

$$X_i^a(\lambda) = \varphi_{ia}(\lambda)d_a, \quad a \in H, \quad \lambda > 0 \qquad (4.2.17)$$

的标准映象,因而

$$\lambda\Phi(\lambda)X^a = X^a - X^a(\lambda), \quad a \in H. \qquad (4.2.18)$$

$\bar{X}$ 是列协调族 $\bar{X}(\lambda)$ 的标准映象,因而

$$\lambda\Phi(\lambda)\bar{X} = \bar{X} - \bar{X}(\lambda). \qquad (4.2.19)$$

$\bar{X}$ 是方程

$$\begin{cases}\Pi u = u, \\ 0 \leqslant u \leqslant \mathbf{1}\end{cases} \qquad (4.2.20)$$

的解,而

$$\lambda\Phi(\lambda)X^0 = X^0, \qquad (4.2.21)$$

且 X^0 是方程(4.2.20)满足条件 $\lambda\Phi(\lambda)u = u$ 的最大解.

注 关于最小 Q 过程 $\Phi(\lambda)$ 的列协调族、行协调族见定义 3.1.1、定义 3.1.2. 而协调族 $\zeta(\lambda)$ 的标准映象 $\zeta \triangleq \lim_{\lambda\to 0}\zeta(\lambda)$.

证明 由 $\Phi(\lambda)$ 的预解方程知 $X^a(\lambda)(a \in H)$ 是列协调族,其标准映象

$$X_i^a = \lim_{\lambda\to 0}X_i^a(\lambda) = \lim_{\lambda\to 0}\varphi_{ia}(\lambda)d_a = \Gamma_{ia}d_a \qquad (4.2.22)$$

由(4.2.9), $\sum_{a\in H} X^a(\lambda) \leqslant 1$,故 $\sum_{a\in H} X^a \leqslant 1$. 因而由引理 3.1.2(iii) 得(4.2.18)

由(4.2.9) 及(4.2.18) 得

$$\lambda\Phi(\lambda)(1 - \sum_{a\in H} X^a) = 1 - \sum_{a\in H} X^a - \overline{X}(\lambda). \qquad (4.2.23)$$

由此及 $\Phi(\lambda)$ 的预解方程知 $\overline{X}(\lambda)(\lambda > 0)$ 是列协调族,且由于 $\overline{X}(\lambda) \leqslant 1$,故其标准映象 $\overline{X} \leqslant 1$,因而由引理 3.1.2(iii) 得(4.2.19). 又因为

$$\begin{cases}(\lambda I - Q)\overline{X}(\lambda) = 0, \\ 0 \leqslant \overline{X}(\lambda) \leqslant 1.\end{cases}$$

故令 $\lambda \downarrow 0$ 知 $\overline{X}$ 是方程(4.2.20) 的解.

由(4.2.9), $\sum_{a\in H} X^a(\lambda) + \overline{X}(\lambda) \leqslant 1$,令 $\lambda \downarrow 0$ 得

$$X^0 = 1 - \sum_{a\in H} X^a - \overline{X} \geqslant 0,$$

由此得(4.2.15). 由(4.2.19) 及(4.2.23) 得(4.2.21). 由 $\Phi(\lambda)$ 的 B 条件有

$$(\lambda I - Q)\lambda\Phi(\lambda)1 = \lambda 1. \qquad (4.2.24)$$

再由(4.2.9), $\lambda\Phi(\lambda)1 \downarrow X^0 \quad (\lambda \downarrow 0)$. 在上式中令 $\lambda \downarrow 0$ 得 $QX^0 = 0$,即 X^0 满足(4.2.20). 设 u 满足(4.1.20) 且 $\lambda\Phi(\lambda)u = u$,则 $u = \lambda\Phi(\lambda)u \leqslant \lambda\Phi(\lambda)1$,故 $u \leqslant X^0$. 证毕.

定义 4.2.1 称 $\overline{X}$ 为矩阵 Q 的流出解,称 X^0 为矩阵 Q 的消极解.

引理 4.2.6 如果 Q 非保守,则

$$\lambda \sum_{a\in H} X^a(\lambda) \to d, \quad \lambda \to \infty. \qquad (4.2.25)$$

证明 因 $Z(\lambda) = 1 - \lambda\Phi(\lambda)1 = \sum_{a\in H} X^a(\lambda) + \overline{X}(\lambda)$ 是列协调族,且

$$(\lambda I - Q)Z(\lambda) = d.$$

在上式中令 $\lambda \uparrow \infty$,注意 $Z(\lambda) \downarrow 0 \quad (\lambda \uparrow \infty)$(引理 3.1.2),得

$$\lambda Z(\lambda) \to d \quad (\lambda \uparrow \infty). \qquad (4.2.26)$$

同理在

$$(\lambda I - Q)\overline{X}(\lambda) = \mathbf{0}$$

中令 $\lambda\uparrow\infty$ 可得 $\lambda\overline{X}(\lambda)\to\mathbf{0}$,由此及(4.2.26)得(4.2.25).

命题 4.2.2 设 $\eta(\lambda)(\lambda>0)$ 为行协调族,则

$$\sigma^0 = \lambda[\eta(\lambda), X^0] < +\infty \tag{4.2.27}$$

与 $\lambda>0$ 无关.

证明 由引理 3.1.4 立得本命题.

引理 4.2.7 如果行矢量 α 使 $\alpha\Phi(\lambda)=\mathbf{0}$(即对每个 j, $\sum_i \alpha_i\varphi_{ij}(\lambda)=0$,且级数绝对收敛),则 $\alpha=\mathbf{0}$.

如果列矢量 β 使 $\Phi(\lambda)\beta=\mathbf{0}$(即对每个 i, $\sum_j \varphi_{ij}(\lambda)\beta_j=0$,且级数绝对收敛),则 $\beta=\mathbf{0}$.

证明 因 $\Phi(\lambda)$ 满足向后方程组,故

$$\lambda\varphi_{ij}(\lambda) = \delta_{ij} + \sum_k q_{ik}\varphi_{kj}(\lambda). \tag{4.2.28}$$

固定 i,两边乘 β_j 并对 j 求和得

$$\begin{aligned} 0 &= \beta_i + \sum_j \sum_k q_{ik}\varphi_{kj}(\lambda)\beta_j \\ &= \beta_i + \sum_k q_{ik}\Big(\sum_j \varphi_{kj}(\lambda)\beta_j\Big) = \beta_j. \end{aligned}$$

求和号可以交换是由于

$$\begin{aligned} &\sum_j\Big(\sum_k |q_{ik}|\varphi_{kj}(\lambda)|\beta_j|\Big) = \sum_j |\beta_j|\Big(\sum_k |q_{ik}|\varphi_{kj}(\lambda)\Big) \\ &= \sum_j |\beta_j|\Big(\sum_k q_{ik}\varphi_{kj}(\lambda) + 2q_i\varphi_{ij}(\lambda)\Big) \\ &= \sum_j |\beta_j|\big(\lambda\varphi_{ij}(\lambda) - \delta_{ij} + 2q_i\varphi_{ij}(\lambda)\big) \\ &\leqslant (\lambda + 2q_i)\sum_j \varphi_{ij}(\lambda)|\beta_j| < \infty. \end{aligned}$$

应用 $\Phi(\lambda)$ 的 F 条件

$$\lambda\varphi_{ij}(\lambda) = \delta_{ij} + \sum_k \varphi_{ik}(\lambda)q_{kj}. \tag{4.2.29}$$

类似可证 $\alpha=\mathbf{0}$,证毕.

注 引理 4.2.7 中最小 Q 过程 $\Phi(\lambda)$ 换成任意 Q 过程，引理 4.2.7 的结论仍成立，只是其证明复杂一些而已，在此就不叙述了.

引理 4.2.8 设 $\bar{X}(\lambda)\neq 0$，则

$$\sup_i \bar{X}_i(\lambda)=1, \tag{4.2.30}$$

且对任意 $f\in M_E$

$$\inf_i(\Phi(\lambda)f)_i=0. \tag{4.2.31}$$

证明 因 $\sup_i \bar{X}_i(\lambda)=a\leqslant 1, a>0$. 故 $\dfrac{\bar{X}(\lambda)}{a}\in\mu_\lambda^+(1)$. 由于 $\bar{X}(\lambda)$ 是 $\mu_\lambda^+(1)$ 中的最大解，故 $\dfrac{\bar{X}(\lambda)}{a}\leqslant\bar{X}(\lambda)$，因而 $a=1$.

由(4.2.9)及(4.2.30)知(4.2.31)对 $f=1$ 成立，从而对 $f\in M_E$ 成立.

在本节最后，我们给出全稳定 Q－矩阵的(H)条件.

定义 4.2.2 称 Q 的(H)条件成立，如果

$$\inf_{i\in E}\sum_j\lambda\varphi_{ij}(\lambda)=c_\lambda>0, \quad (\lambda>0). \tag{4.2.32}$$

由引理 3.5.1(i) 知，若(4.2.32)对某 $\lambda_0>0$ 成立，则对一切 $\lambda>0$ 成立.

推论 4.2.1 如果 Q 的(H)条件不成立. 即

$$\inf_{i\in E}\sum_j\lambda\varphi_{ij}(\lambda)=0, \quad (\lambda>0). \tag{4.2.33}$$

则存在无穷多个诚实 Q 过程.

证明 由(4.2.33)以及推论 3.5.1 知本推论成立.

在第三篇中将可看到，在 Q 过程唯一性的讨论中，(H)条件起着非常重要的作用.

§3 全稳定 Q 过程的一般形式

设 $\Psi(\lambda)$ 是 Q 过程，则 $\Psi(\lambda)-\Phi(\lambda)\geqslant 0$，由于 $\Psi(\lambda)$ 满足向后不等式组((1.8.1)式的拉氏变换形式)，而 $\Phi(\lambda)$ 满足 B 型条件，故

$(\lambda I - Q)(\Psi(\lambda) - \Phi(\lambda)) \geqslant 0$，而且当 $i \in E - H$ 时等号成立. 更精确些，对固定的 $j, u_i = \psi_{ij}(\lambda) - \varphi_{ij}(\lambda)$ 满足

$$\lambda u_i - \sum_k q_{ik} u_k = d_i F_j^i(\lambda). \tag{4.3.1}$$

其中 $F_j^i(\lambda) \geqslant 0$，$d$ 为非保守量. 由引理 4.2.2，

$$B_{ij}(\lambda) = \psi_{ij}(\lambda) - \varphi_{ij}(\lambda) - \sum_{a \in H} \varphi_{ia}(\lambda) d_a F_j^a(\lambda) \geqslant 0.$$

当 j 固定时，$B_{ij}(\lambda) \in \mu_\lambda^+\left(\frac{1}{\lambda}\right)$. 这样我们得到下列定理的一部分.

定理 4.3.1 任意 Q 过程 $\Psi(\lambda)$ 必具有下列形式：

$$\psi_{ij}(\lambda) = \varphi_{ij}(\lambda) + \sum_{a \in H} X_i^a(\lambda) F_j^a(\lambda) + B_{ij}(\lambda). \tag{4.3.2}$$

其中 $X_i^a(\lambda) = \varphi_{ia}(\lambda) d_a \quad (a \in H)$. 当 i 固定时，$0 \leqslant B_{i\cdot}(\lambda) \in L_E$，当 j 固定时，$B_{\cdot j}(\lambda) \in \mu_\lambda^+\left(\frac{1}{\lambda}\right)$，而

$$F^a(\lambda) \geqslant 0, \quad \lambda[F^a(\lambda), 1] \leqslant 1, \quad a \in H. \tag{4.3.3}$$

如果 $\Psi(\lambda)$ 满足向后方程组，且 Q 非保守，则 $F^a(\lambda) = 0 \quad (a \in H)$.

如果 $\Psi(\lambda)$ 满足向前方程组，则当 i 固定时，$B_{i\cdot}(\lambda) \in L_\lambda^+$. 而且如果 Q 非保守，则 $F^a(\lambda) \in L_\lambda^+ (a \in H)$.

证明 因 i 固定时，$\psi_{i\cdot}(\lambda) \in L_E$，$F^a(\lambda) \in L_E (a \in H)$，$B_{i\cdot}(\lambda) \in L_E^{\cdot}$.

设 $\Psi(\lambda)$ 满足向后方程组，且 Q 非保守. 由(4.3.1)及 $\Psi(\lambda)$、$\Phi(\lambda)$ 的 B 型条件，得

$$\sum_{a \in H} X_i^a(\lambda) F_j^a(\lambda) = \sum_{a \in H} \varphi_{ia}(\lambda) d_a F_j^a(\lambda) = 0.$$

由引理 4.2.7 这等价于 $F^a(\lambda) = 0 (a \in H)$.

如果 $\Psi(\lambda)$ 满足向前方程组，则由于 $\Psi(\lambda)$ 和 $\Phi(\lambda)$ 都满足 F 条件，故若记 $G(\lambda) = (d_i F_j^i(\lambda); i, j \in E)$，则

$$(\Phi(\lambda) G(\lambda) + B(\lambda))(\lambda I - Q) = 0.$$

左乘 $\lambda I - Q$ 得

$$G(\lambda)(\lambda I - Q) = 0,$$

从而 $B(\lambda)(\lambda I - Q) = 0$，即 i 固定时，$B_{i\cdot}(\lambda) \in L_\lambda^+$，$F^a(\lambda) \in L_\lambda^+ (a \in$

H).

往证(4.3.3).在(4.3.2)两边作用 $\lambda I - Q$ 后并对 j 求和得

$$(\lambda I - Q)(\lambda\Psi(\lambda)1)_i = \lambda + \sum_{a\in H}\delta_{ia}d_a\lambda[F^a(\lambda),1]. \quad (4.3.4)$$

当 $i = a$ 时

$$(\lambda I - Q)(\lambda\Psi(\lambda)1)_a = \lambda + d_a\lambda[F^a(\lambda),1]. \quad (4.3.5)$$

但依侯振挺、郭青峰[1]引理 14.6.8

$$(\lambda I - Q)\lambda\Psi(\lambda)1 - \lambda 1 \leqslant d. \quad (4.3.6)$$

由(4.3.5)、(4.3.6)得(4.3.3),证毕.

定理 4.3.2 每个 Q 过程 $\Psi(\lambda)$ 必具有下面形式:

$$\psi_{ij}(\lambda) = \varphi_{ij}(\lambda) + \sum_k H_{ik}(\lambda)\varphi_{kj}(\lambda) - C_{ij}(\lambda). \quad (4.3.7)$$

其中 $H(\lambda) = (H_{ik}(\lambda);i,k\in E)\geqslant 0, C(\lambda) = (C_{ij}(\lambda);i,j\in E)\geqslant 0$. 当 i 固定时,$C_{i\cdot}(\lambda)\in L_\lambda^+$. 当 j 固定时,$C_{\cdot j}(\lambda)\in M_E, H_{\cdot j}(\lambda)\in M_E$.

$\Psi(\lambda)$ 满足向后方程组的充要条件是:$H_{\cdot j}(\lambda)\in\mu_\lambda^+, C_{\cdot j}(\lambda)\in\mu_\lambda^+(\frac{1}{\lambda})$.

$\Psi(\lambda)$ 满足向前方程组的充要条件是: $H(\lambda) = 0$.

证明 由于 $\Psi(\lambda)$ 的向前不等式组((1.8.2)式的拉氏变换形式)及 $\Phi(\lambda)$ 的 F 条件,故

$$(\Psi(\lambda) - \Phi(\lambda))(\lambda I - Q) = H(\lambda)\geqslant 0.$$

故由引理 4.2.2,

$$C(\lambda)\triangleq\Psi(\lambda) - \Phi(\lambda) - H(\lambda)\Phi(\lambda)\geqslant 0.$$

且 $C_{i\cdot}(\lambda)\in L_\lambda^+$,从而得(4.3.7). 由(4.3.7)得 $C_{\cdot j}(\lambda)\in M_E$. 因

$$H_{\cdot j}(\lambda)\lambda\varphi_{jj}(\lambda)\leqslant\lambda\Psi_{\cdot j}(\lambda)\leqslant 1.$$

故 $H_{\cdot j}(\lambda)\in M_E$.

$\Psi(\lambda)$ 的 B 型条件等价于

$$(\lambda I - Q)(H(\lambda)\Phi(\lambda) + C(\lambda)) = 0.$$

$(\lambda I - Q)$ 右乘上式得 $(\lambda I - Q)H(\lambda) = 0$. 从而由上式得

$$(\lambda I - Q)C(\lambda) = 0.$$

因此 B 条件等价于 $C_{\cdot j}(\lambda)\in\mu_\lambda^+(\frac{1}{\lambda}), H_{\cdot j}(\lambda)\in\mu_\lambda^+$.

$\Psi(\lambda)$ 的 F 型条件等价于

$$(H(\lambda)\Phi(\lambda) + C(\lambda))(\lambda I - Q) = 0.$$

即 $H(\lambda) = 0$. 证毕.

§4 补充与注记

W. Feller 于 1940 年构造了全稳定最小 Q 过程(Feller[1]),这样不仅解决了全稳定 Q 过程的存在性问题,而且也为后来对 Q 过程的研究奠定了基石.本章内容主要取材于杨向群[1].

5 全瞬时态 Q 过程的存在性

§1 结果的陈述

D. Williams[3] 给出了如下全瞬时态 Q 过程存在性定理.

定理 5.1.1 设拟 Q − 矩阵 $Q=(q_{ij};i,j\in E)$ 满足全瞬时条件

$$(TI)\quad q_i=+\infty,\qquad (i\in E). \tag{5.1.1}$$

则 Q 成为 Q − 矩阵的充要条件是下列(N)、(S) 条件同时成立：

$$(N)\quad \sum_{j\in E-\{a,b\}} q_{aj}\wedge q_{bj}<+\infty,\qquad (a,b\in E;a\neq b). \tag{5.1.2}$$

(S) 存在 E 的无穷子集 K,使得

$$\sum_{j\in K-\{i\}} q_{ij}<+\infty,\qquad (i\in E). \tag{5.1.3}$$

当上述(N)、(S) 条件成立时还存在无穷多个诚实 Q 过程.

D. Williams[3] 用概率方法证明了上述定理,且以概率直观为主.

本章用分析的方法严格证明上述定理. §2 证明条件的必要性,§3 证明条件的充分性.

§2 定理 5.1.1 的证明:必要性部分

先证明(N) 条件的必要性.

定理 5.2.1 若 $Q=(q_{ij})$ 是任一 Q − 矩阵(不必全瞬时),则

(N) 条件成立.

证明 设 $R(\lambda)$ 是 Q 过程,对任意给定的 $a,b \in E$, $(a \neq b)$,记

$$e^{(k)} = (q_{kj}; j \in E - \{a,b\}) \quad (k = a,b),$$
$$e = (q_{aj} \wedge q_{bj}; j \in E - \{a,b\}).$$

对 $R(\lambda)$ 关于 $\{a,b\}$ 使用二维分解定理知,存在 $\eta^{(k)}(\lambda), \xi^{(k)}(\lambda)$ $(k = a,b)$ 满足

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\eta^{(k)}(\lambda) = e^{(k)}, \qquad (k = a,b).$$
$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\eta^{(a)}(\lambda)\xi^{(b)} < +\infty, \ \lim_{\lambda\to\infty} \lambda\eta^{(b)}(\lambda)(1 - \xi^{(b)}) < +\infty.$$

由法都引理得

$$e^{(a)}\xi^{(b)} < +\infty, e^{(b)}(1 - \xi^{(b)}) < +\infty,$$

于是

$$e\xi^{(b)} < +\infty, e(1 - \xi^{(b)}) < +\infty.$$

所以

$$e1 < +\infty.$$

即(N) 条件成立. 定理证毕.

以下证明(S) 条件的必要性,为此先给出两个引理.

引理 5.2.1 (S) 条件等价于下列(S^*) 条件

(S^*) 对 E 的任意有限子集 H,有

$$\liminf_j \sum_{h\in H} q_{hj} = 0.$$

证明 $(S)\Rightarrow(S^*)$ 是平凡的. 现设(S^*) 成立,我们证明(S) 成立. 不妨设 $E = \{1,2,\cdots\cdots\}$,令

$$H_n = \{1,2,\cdots,n\}, \quad (n = 1,2,\cdots).$$

由$\liminf\limits_j \sum\limits_{h\in H_n} q_{hj} = 0$ 知存在 $k(n) > n$ 使得

$$\sum_{h\in H_n} q_{hk(n)} < 2^{-n},$$

于是

$$q_{hk(n)} < 2^{-n}, \quad (h < n).$$

令 $K = \{k(1),k(2),\cdots\}$,则 K 是 E 的无穷子集且

$$\sum_{j\in K-\{i\}} q_{ij}=\sum_{K(n)\neq i} q_{ik(n)}=\sum_{\substack{n\leqslant i\\ k(n)\neq i}} q_{ik(n)}+\sum_{\substack{n>i\\ k(n)\neq i}} q_{ik(n)}$$

$$\leqslant \sum_{\substack{n\leqslant i\\ k(n)\neq i}} q_{ik(n)}+\sum_{\substack{n>i\\ k(n)\neq i}} 2^{-n}<+\infty,$$

即(S)成立.

引理证毕.

引理5.2.2 设Q是Q－矩阵,若存在E的有限子集H及$\delta>0$使得

$$\sum_{h\in H} q_{hj}\geqslant\delta,\quad (j\in E-H).$$

则对一切$b\in E-H$有$q_b<+\infty$.

证明 设$R(\lambda)$是Q过程,记$H=\{h_1,h_2,\cdots,h_n\}$,

$$e^{(h)}=(q_{hj};j\in E-H),\quad {}_HQ=(q_{ij};i,j\in E-H).$$

再记${}_HR(\lambda)$为$R(\lambda)$禁止状态集H所得的${}_HQ$过程,由禁止概率知对$i,j\in E-H$有

$$ {}_Hr_{ij}(\lambda)\leqslant {}_hr_{ij}(\lambda),\quad (h\in E).$$

由分解定理有

$$\sum_{j\in E-\{h\}}\sum_{i\in E-\{h\}} q_{hi}\,{}_hr_{ij}(\lambda)<+\infty,\quad (h\in E).$$

所以

$$\sum_{i\in E-H}\sum_{j\in E-H} q_{hi}\,{}_Hr_{ij}(\lambda)<+\infty,\quad (h\in E).$$

于是

$$+\infty>\sum_{h\in H}\sum_{i\in E-H}\sum_{j\in E-H} q_{hi}\,{}_Hr_{ij}(\lambda)$$

$$=\sum_{i\in E-H}\Big(\sum_{h\in H} q_{hi}\Big)\sum_{j\in E-H}{}_Hr_{ij}(\lambda)$$

$$\geqslant\delta\sum_{i\in E-H}\sum_{j\in E-H}{}_Hr_{ij}(\lambda).$$

注意$\delta>0$得

$$\sum_{i\in E-H}\sum_{j\in E-H}{}_Hr_{ij}(\lambda)<+\infty. \qquad (5.2.1)$$

对任意给定的$b\in E-H$,关于b分解${}_HR(\lambda)$得

$$
{}_{H}R(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & {}_{bH}R(\lambda) \end{pmatrix} + r(\lambda)\begin{pmatrix} 1 \\ \xi(\lambda) \end{pmatrix}(1, \eta(\lambda)).
$$
(5.2.2)

且

$$
\xi(\lambda) \in M_{{}_{bH}R(\lambda)}, \ \xi(\lambda) \leqslant \mathbf{1}, \quad (5.2.3)
$$

$$
\lambda\eta(\lambda)(\mathbf{1} - \xi) \leqslant c_b < +\infty,
$$

$$
\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\eta_i(\lambda) = q_{bi}, \quad (i \in E - (H \cup \{b\})), \quad (5.2.4)
$$

$$
\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\eta(\lambda)\xi = q_b - c_b, \quad (5.2.5)
$$

其中$\{b\} \cup H$ 简记为 bH.

由(5.2.1)、(5.2.2) 得

$$
\sum_i \xi_i(\lambda) < +\infty, \quad \lambda\sum_{i,j} {}_{bH}r_{ij}(\lambda) < +\infty.
$$

由(5.2.3) 得

$$
\xi = \xi(\lambda) + \lambda_{bH}R(\lambda)\xi \leqslant \xi(\lambda) + \lambda_{bH}R(\lambda)\mathbf{1}.
$$

所以

$$
\sum_i \xi_i < +\infty,
$$

于是对于任意给定的 $\Delta(0 < \Delta < 1)$,存在 $E - (H \cup \{b\})$ 的有限子集 N 使得

$$
\xi_i \leqslant \Delta, \quad (i \overline{\in} N).
$$

由于 $\lambda\eta_i(\lambda) \to q_{bi}$,于是由(5.2.4) 得

$$
\begin{aligned}
+\infty > c_b \geqslant \lambda\eta(\lambda)(\mathbf{1} - \xi) &= \sum_i \lambda\eta_i(\lambda)(1 - \xi_i) \\
&\geqslant \sum_i \lambda\eta_i(\lambda)(1 - \Delta) - \sum_{i\in N} \lambda\eta_i(\lambda) \\
&= (1 - \Delta)\lambda\eta(\lambda)\mathbf{1} - \sum_{i\in N} \lambda\eta_i(\lambda) \\
&\geqslant (1 - \Delta)\lambda\eta(\lambda)\xi - \sum_{i\in N} \lambda\eta_i(\lambda).
\end{aligned}
$$

所以

$$
q_b = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda\eta(\lambda)\xi + c_b \leqslant \frac{c_b + \sum_{i\in N} \lambda\eta_i(\lambda)}{1 - \Delta} + c_b < +\infty.
$$

引理证毕.

定理 5.2.2 设 Q 是 Q — 矩阵且含无穷多个瞬时态，则 (S) 条件成立.

证明 因 Q 含无穷多个瞬时态，由引理 5.2.2 知 (S^*) 成立，从而由引理 5.2.1，(S) 成立. 定理证毕.

§3 定理 5.1.1 的证明：充分性部分

为了叙述的方便，不妨设 $E=\{0,1,2,\cdots\}$，$Q=(q_{ij};i,j\in E)$ 是全瞬时拟 Q — 矩阵且满足 (N)，(S) 条件. 我们将证明存在诚实 Q 过程，且有无穷多个.

引理 5.3.1(P. D. Seymour) 对 E 中每个 i 存在 E 的无穷子集 $Z(i)$ 满足：

(i) $Z(i)\subset\{j;j>i\}$；

(ii) $Z(i)\cap Z(j)=\varnothing$(空集) $(i\neq j)$；

(iii) $\sum\limits_{i=0}^{\infty}Z(i)=E-\{0\}$；

(iv) 存在 $Z(i)$ 的无穷子集 $K(i)$ 使得

$$\sum_{j\in K(i)}q_{ij}<+\infty\ ;$$

(v) $d_i\equiv\sum\limits_{j\neq i}(q_{ij}-q_{i\bar{j}})<+\infty$.

这里

$$q_{ij}-q_{i\bar{j}}\equiv e_j^{(i)}=\begin{cases}q_{ij}, & j\in\{i\}\cup Z(i);\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

证明 由于 Q 的对角线元素只是起着令人讨厌的作用，我们将其稍许变动一下. 设 $Q=(q_{ij};i,j\in E)$ 满足

$$0\leqslant q_{ij}<+\infty,\qquad (i,j\in E).$$

记 $Q_i(H)=\sum\limits_{j\in H}q_{ij}\quad(H\subset E)$. 另外我们再假定 $0\in K$. 对 $a\neq b$，令

$$T_{ab} \equiv \{j; q_{aj} < q_{bj}\}.$$

由(N)有

$$+\infty > \sum_j q_{aj} \wedge q_{bj} = Q_a(T_{ab}) + Q_b(E - T_{ab}),$$

所以

$$Q_a(T_{ab}) < +\infty, \quad Q_b(E - T_{ab}) < +\infty.$$

于是存在集合 $S_{ab} \subset T_{ab}$,使得 $T_{ab} - S_{ab}$ 为有限集,而且

$$Q_a(S_{ab}) < 2^{-b}, \quad Q_b(E - S_{ab}) < +\infty.$$

令

$$W_a \equiv E - (\bigcup_{c \neq a} S_{ac}),$$

则

$$Q_a(E - W_a) \leqslant \sum_{c \neq a} Q_a(S_{ac}) < +\infty. \tag{5.3.1}$$

而对 $b \neq a$

$$Q_b(W_a) \leqslant Q_b(E - S_{ab}) < +\infty. \tag{5.3.2}$$

对任一 i,令

$$J_i \equiv (E - K) \cap (W_i \cup \{i + 1\}),$$

则

$$\bigcup_i J_i \supset (E - K) - \{0\}.$$

注意对每个 i,由(5.3.1)有

$$Q_i(E - (K \cup J_i)) \leqslant Q_i(E - W_i) < +\infty. \tag{5.3.3}$$

而由(5.3.2)对 $i \neq h$ 有

$$Q_i(J_i \cap J_h) \leqslant Q_i(J_h) \leqslant Q_i(W_h) + q_{ih-1} < +\infty. \tag{5.3.4}$$

令

$$J_i^- \equiv (J_i \cap \{j; j > i\}) - (\bigcup_{h<i} J_h),$$

则 $J_0^-, J_1^-, \cdots\cdots$ 不交且

$$\bigcup_i J_i^- = E - K - \{0\}.$$

进一步由(5.3.4)有,对每一 i

$$Q_i(J_i - J_i^-) \leqslant Q_i(\{j; j \leqslant i\}) + \sum_{h<i} Q_i(J_i \cap J_h) < +\infty. \tag{5.3.5}$$

将 K 表为不交并

$$K = \bigcup_i K_i.$$

其中每一 K_i 无穷且

$$K_i \subset \{j; j > i\}.$$

对每个 i,令

$$Z(i) = J_i^- \cup K_i,$$

则 $Z(i)$ 满足(i) — (iv). 而由(5.3.3),(5.3.5) 及(S) 得

$$\begin{aligned} Q_i(E - Z(i)) &\leqslant Q_i(K - K_i) + Q_i(E - (K \cup J_i^-)) \\ &\leqslant Q_i(K) + Q_i(E - (K \cup J_i)) + Q_i(J_i - J_i^-) \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

即(v) 也成立. 引理证毕.

引理 5.3.2 对 $n \in E$,令 $Q^{[n]} = (q_{ij}^{[n]}; i, j \in Z(n))$,其中

$$q_{ij}^{[n]} = \begin{cases} -q_i^{[n]}, & i = j. \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{5.3.6}$$

而 $q_i^{[n]}$ 满足:对 $i \in Z(n)$

$$q_i^{[n]} \geqslant (n+1)^2(i+1)^2(2 + q_{ni})(1 + d_i). \tag{5.3.7}$$

则存在 $Q^{[n]}$ 过程 $\Psi^{[n]}(\lambda)$ 及 $F^{[n]}(\lambda) \in L_{\Psi^{[n]}(\lambda)}$, $X^{[n]}(\lambda) \in M_{\Psi^{[n]}(\lambda)}$ 且

(i) $X^{[n]}(\lambda) + \Psi^{[n]}(\lambda)d^{[n]} + \lambda\Psi^{[n]}(\lambda)\mathbf{1} = \mathbf{1}$,

这里 $d^{[n]} = (d_i; i \in Z(n)) \in M_{Z(n)}$;

(ii) $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda X^{[n]}(\lambda) = 0$;

(iii) $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda F_j^{[n]}(\lambda) = q_{nj} \quad (j \in Z(n))$;

(iv) $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda F^{[n]}(\lambda)\mathbf{1} = +\infty$;

(v) $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda F^{[n]}(\lambda)(\mathbf{1} - X^{[n]}) = a_n \leqslant 1/(n+1)^2$;

(vi) $\lim\limits_{\lambda\to 0} F^{[n]}(\lambda)\mathbf{1} = b_n \leqslant 1/(n+1)^2$;

(vii) $\lambda F^{[n]}(\lambda)(\mathbf{1} - X^{[n]}) = a_n - F^{[n]}(\lambda)d^{[n]}$.

证明 由(5.3.7) 得

$$\sum_{i\in Z(n)} (q_{ni}/q_i^{[n]} + 2/q_i^{[n]})(1 + d_i)$$

$$\leqslant \sum_{i\in Z(n)} 1/((n+1)^2(i+1)^2)$$

$$\leqslant 1/(n+1)^2. \tag{5.3.8}$$

将 $K(n)$ 分成可列个无穷子集 $\{K_m(n)\}_{m=1}^{\infty}$，记

$$Z(n) - K(n) = \{n_1, n_2, \cdots\},$$

令 $N_m = K_m(n) \cup \{n_m\}$ $(m = 1, 2, \cdots)$，则

$$\sum_{m=1}^{\infty} N_m = Z(n), \tag{5.3.9}$$

且由引理 5.3.1(iv) 知

$$\sum_{j\in N_m} q_{nj} \leqslant \sum_{j\in K(n)} q_{nj} + q_{nn_m} < +\infty, \quad (m = 1, 2, \cdots). \tag{5.3.10}$$

取

$$C_{n_m} \geqslant \max\{\sum_{i\in N_m} d_i/q_i^{[n]} + 1, \sum_{i\in N_m} q_{ni}\}. \tag{5.3.11}$$

由(5.3.8)，(5.3.10) 知

$$1 \leqslant C_{n_m} < +\infty.$$

对 $i, j \in N_m$，令

$$\psi_{ij}^{[n_m]}(\lambda) = \frac{\delta_{ij}}{\lambda + q_i^{[n]}} + \frac{q_i^{[n]} - d_i}{\lambda + q_i^{[n]}} \frac{1/(\lambda + q_j^{[n]})}{C_{n_m} + \lambda \sum_{k\in N_m} (q_k^{[n]} - d_k)/(q_k^{[n]}(\lambda + q_k^{[n]}))}. \tag{5.3.12}$$

由 (5.3.11) 及定理 3.5.2. 知 $\Psi^{[n_m]}(\lambda) = (\psi_{ij}^{[n_m]}(\lambda); i, j \in N_m)$ 是 $Q^{[n_m]}$ 过程. 这里 $Q^{[n_m]} = (q_{ij}^{[n]}; i, j \in N_m)$. 对 $i, j \in N_m$，令

$$\begin{aligned} X_i^{[n_m]}(\lambda) &= 1 - \lambda \sum_{j\in N_m} \psi_{ij}^{[n_m]}(\lambda) - \sum_{j\in N_m} \psi_{ij}^{[n_m]}(\lambda) d_j \\ &= \frac{q_i^{[n]} - d_i}{\lambda + q_i^{[n]}} \frac{C_{n_m} - \sum_{j\in N_m} (d_j/q_j^{[n]})}{C_{n_m} + \lambda \sum_{k\in N_m} ((q_k^{[n]} - d_k)/(q_k^{[n]}(\lambda + q_k^{[n]})))}. \end{aligned} \tag{5.3.13}$$

$$\bar{F}_j^{[n_m]}(\lambda) = 1/[(\lambda + q_j^{[n]})(C_{n_m} + \lambda \sum_{k \in N_m} (q_k^{[n]} - d_k)/(q_k^{[n]}(\lambda + q_k^{[n]})))].$$

易证

$$X^{[n_m]}(\lambda) = (X_i^{[n_m]}(\lambda); i \in N_m) \in M_{\Psi^{[n_m]}(\lambda)}, \quad (5.3.14)$$

$$\bar{F}^{[n_m]}(\lambda) = (\bar{F}_j^{[n_m]}(\lambda); j \in N_m) \in L_{\Psi^{[n_m]}(\lambda)},$$

$$\lambda X^{[n_m]}(\lambda) \to 0, \quad \lambda \bar{F}^{[n_m]}(\lambda) \to 0 \quad (\lambda \uparrow +\infty), \quad (5.3.15)$$

$$\lambda \sum_{j \in N_m} \bar{F}_j^{[n_m]}(\lambda) \uparrow 1 \quad (\lambda \uparrow +\infty), \quad (5.3.16)$$

令

$$\Psi^{[n]}(\lambda) = \begin{pmatrix} \Psi^{[n_1]}(\lambda) & & \\ & \Psi^{[n_2]}(\lambda) & \\ & & \ddots \end{pmatrix}, \quad X^{[n]}(\lambda) = \begin{pmatrix} X^{[n_1]}(\lambda) \\ X^{[n_2]}(\lambda) \\ \vdots \end{pmatrix},$$

(5.3.17)

$$F^{[n]}(\lambda) = \bar{e}^{[n]} \Psi^{[n]}(\lambda) + \bar{F}^{[n]}(\lambda), \quad (5.3.18)$$

$$\bar{F}^{[n]}(\lambda) = (\bar{F}^{[n_1]}(\lambda), \bar{F}^{[n_2]}(\lambda), \cdots).$$

这里 $\bar{e}^{[n]} = (q_{nj}; j \in Z(n)) \in L_{Z(n)}$.

现证 $\Psi^{[n]}(\lambda), X^{[n]}(\lambda), F^{[n]}(\lambda)$ 满足引理. 首先易知 $\Psi^{[n]}(\lambda)$ 是 $Q^{[n]}$ 过程, $X^{[n]}(\lambda) \in M_{\Psi^{[n]}(\lambda)}$ 且(i),(ii)成立. 而由 $F^{[n]}(\lambda)$ 的定义及(5.3.11),(5.3.8)得

$$F^{[n]}(\lambda)\mathbf{1} = \sum_m \sum_{j \in N_m} \sum_{i \in N_m} q_{ni} \psi_{ij}^{[n_m]}(\lambda) + \sum_m \sum_{j \in N_m} \bar{F}_j^{[n_m]}(\lambda)$$

$$= \sum_m \sum_{i \in N_m} \left(\frac{q_{ni}}{\lambda + q_i^{[n]}} + \frac{q_{ni}(q_i^{[n]} - d_i)}{\lambda + q_i^{[n]}} \frac{\sum_{j \in N_m} \frac{1}{\lambda + q_j^{[n]}}}{C_{n_m} + \lambda \sum_{k \in N_m} \frac{q_k^{[n]} - d_k}{(\lambda + q_k^{[n]}) q_k^{[n]}}} \right)$$

$$+ \sum_m \sum_{j \in N_m} \frac{1}{\lambda + q_j^{[n]}} \frac{1}{C_{n_m} + \lambda \sum_{k \in N_m} \frac{q_k^{[n]} - d_k}{(\lambda + q_k^{[n]}) q_k^{[n]}}}$$

$$\leqslant \sum_m \sum_{i \in N_m} \frac{q_{ni}}{q_i^{[n]}} + \sum_m \left(\sum_{i \in N_m} q_{ni} \right) \frac{\sum_{j \in N_m} 1/q_j^{[n]}}{C_{n_m}} + \sum_m \sum_{j \in N_m} \frac{1}{q_j^{[n]}}$$

$$\leqslant \sum_{m} \sum_{i \in N_m} (q_{ni}/q_i^{[n]} + 2/q_i^{[n]})$$

$$= \sum_{i \in Z(n)} (q_{ni}/q_i^{[n]} + 2/q_i^{[n]})$$

$$\leqslant 1/(n+1)^2.$$

所以由(5.3.14),(5.3.15),(5.3.17)和(5.3.18)知 $F^{[n]}(\lambda) \in L_{\Psi^{[n]}(\lambda)}$ 且(vi)成立,由(5.3.15),(5.3.18)及定理3.5.1知(iii)成立. 注意

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda F^{[n]}(\lambda) \mathbf{1} \geqslant \lim_{\lambda \to \infty} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda \overline{F}^{[n_m]}(\lambda) \mathbf{1} \geqslant \sum_{m=1}^{\infty} \lim_{\lambda \to \infty} \lambda \overline{F}^{[n_m]}(\lambda) \mathbf{1},$$

于是由(5.3.16)立得(iv)成立. 现证(v),(vii)成立. 因

$$X^{[n]}(\lambda) + \lambda \Psi^{[n]}(\lambda) \mathbf{1} + \Psi^{[n]}(\lambda) d^{[n]} = \mathbf{1},$$

而

$$\lim_{\lambda \to 0} (\lambda \Psi^{[n]}(\lambda) \mathbf{1})_i = \lim_{\lambda \to 0} \Big(\frac{\lambda}{\lambda + q_i^{[n]}}$$

$$+ \sum_{m} \frac{q_i^{[n]} - d_i}{\lambda + q_i^{[n]}} \frac{\sum_{j \in N_m} \lambda/(\lambda + q_j^{[n]})}{C_{n_m} + \lambda \sum_{k \in N_m} \frac{q_k^{[n]} - d_k}{(\lambda + q_k^{[n]}) q_k^{[n]}}} \Big) = 0,$$

所以

$$1 - X^{[n]} = \Psi^{[n]} d^{[n]} \quad (\Psi^{[n]} d^{[n]} = \lim_{\lambda \to \infty} \Psi^{[n]}(\lambda) d^{[n]}).$$

由 $F^{[n]}(\lambda) \in L_{\Psi^{[n]}(\lambda)}$ 得

$$\lambda F^{[n]}(\lambda)(1 - X^{[n]}) = \lambda F^{[n]}(\lambda) \Psi^{[n]} d^{[n]} = (F^{[n]} - F^{[n]}(\lambda)) d^{[n]}, \tag{5.3.19}$$

这里 $F^{[n]} = \lim_{\lambda \to 0} F^{[n]}(\lambda)$. 由 $F^{[n]}(\lambda)$ 的定义及(5.3.11)知

$$F_j^{[n]} = q_{nj}/q_j^{[n]} + \sum_{i \in N_m} q_{ni}(q_i^{[n]} - d_i)/(C_{n_m} q_i^{[n]} q_j^{[n]}) + \frac{1}{q_j^{[n]}} \frac{1}{C_{n_m}}$$

$$\leqslant (q_{ni} + 2)/q_j^{[n]} \quad (j \in N_m, m = 1, 2, \cdots),$$

所以

$$F^{[n]} d^{[n]} = \sum_{m} \sum_{j \in N_m} F_j^{[n]} d_j \leqslant \sum_{j \in Z(n)} (q_{nj} + 2) d_j / q_j^{[n]}$$

$$\leqslant 1/(n+1)^2.$$

而

$$F^{[n]}(\lambda)d^{[n]}\downarrow 0\quad(\lambda\uparrow+\infty),$$

所以

$$a_n\equiv\lim_{\lambda\to\infty}\lambda F^{[n]}(\lambda)(1-X^{[n]})=F^{[n]}d^{[n]}\leqslant\frac{1}{(n+1)^2}.$$

于是(v) 成立，再由(5.3.19) 得(vii) 成立. 到此引理证毕.

下面我们将进行构造工作，在此先把思路介绍一下：首先构造 Q^- 过程 $R^-(\lambda)$ 满足

$$1-\lambda R^-(\lambda)1=R^-(\lambda)d.$$

这里 $Q^-=(q_{ij}^-;i,j\in E);d=(d_i;i\in E)$ 满足引理 5.3.1(v). 然后利用 $R^-(\lambda)$ 来构造诚实 Q 过程 $R(\lambda)$.

引理 5.3.3 存在 Q^- 过程 $R^-(\lambda)$ 满足

$$1-\lambda R^-(\lambda)1=R^-(\lambda)d$$

证明 定义映射 $\pi:E-\{0\}\to E$ 如下：

$$\pi(i)=k,\quad 当且仅当\quad i\in Z(k).$$

由引理 5.3.1(i) 知

$$\pi(i)<i,\quad(i\in E-\{0\}).\tag{5.3.20}$$

记 $E(n)=\sum_{m\leqslant n}Z(m)\cup\{0\}\quad(n=0,1,\cdots)$. 由(5.3.20) 知 $E(n)\supset Z(\pi(n+1))$ 且 $n\in E(n)$. 对 $n\in E$，记 $\bar{Q}^{(n)}=(\bar{q}_{ij}^{(n)};i,j\in E)$ 其中

$$\bar{q}_{ij}^{(n)}=\begin{cases}q_{ij}^-, & (i\leqslant n,j\in E),\\ -q_i^{[k]} & (i>n,i=j\in Z(k));\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

对 $b\in E$，记 ${}_b\bar{Q}^{(n)}=(\bar{q}_{ij}^{(n)};i,j\in E-\{b\})$. 令

$$\bar{\Psi}^{[0]}(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \Psi^{[0]}(\lambda)\end{pmatrix}$$

$$+r^{(0)}(\lambda)\begin{pmatrix}1\\ X^{[0]}(\lambda)\end{pmatrix}(1\quad F^{[0]}(\lambda)),$$

其中

$$r^{(0)}(\lambda) = \frac{1}{d_0 + a_0 + \lambda + \lambda F^{[0]}(\lambda) X^{[0]}},$$

由引理5.3.2及分解定理易知$\hat{\Psi}^{[0]}(\lambda)$是$\hat{Q}^{[0]}$过程，这里$\hat{Q}^{[0]} = (\hat{q}_{ij}; i, j \in E(0))$满足

$$\hat{q}_{ij} = \begin{cases} q_{0j}, & (i = 0, j \in E); \\ -q_i^{[0]} & (i = j \in Z(0)); \\ 0, & 其它. \end{cases}$$

由引理5.3.2还可得

$$\begin{aligned} & 1 - \lambda \hat{\Psi}^{[0]}(\lambda) 1 \\ & = \hat{\Psi}^{[0]}(\lambda) \hat{d}^{[0]}, \end{aligned} \tag{5.3.21}$$

其中$\hat{d}^{[0]} = (d_i; i \in E(0)) \in M_{E(0)}$. 令

$$\overline{R}^{(0)}(\lambda) = \begin{pmatrix} \hat{\Psi}^{[0]}(\lambda) & & & \\ & \Psi^{[1]}(\lambda) & & \\ & & \Psi^{[2]}(\lambda) & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}, \tag{5.3.22}$$

则易知$\overline{R}^{(0)}(\lambda)$是$\overline{Q}^{(0)}$过程且对给定的$k \in E$，若$i \in Z(k)$，$j \in Z(k) \cup E(0)$，则

$$\overline{R}_{ij}^{(0)}(\lambda) = \overline{R}_{ji}^{(0)}(\lambda) = 0. \tag{5.3.23}$$

对$k \geqslant 1$，令

$$\begin{aligned} X^{(k)}(\lambda) &= (X_i^{(k)}(\lambda); i \in E) \in M_E; \\ {}_aX^{(k)}(\lambda) &= (X_i^{(k)}(\lambda); i \in E - \{a\}) \in M_{E-\{a\}}, \end{aligned} \tag{5.3.24}$$

其中

$$X_i^{(k)}(\lambda) = \begin{cases} X_i^{[k]}(\lambda), & (i \in Z(k)); \\ 0, & 其它. \end{cases}$$

对$k \geqslant 1$，令

$$\begin{aligned} F^{(k)}(\lambda) &= (F_j^{(k)}(\lambda); j \in E) \in L_E; \\ {}_aF^{(k)}(\lambda) &= (F_j^{(k)}(\lambda); j \in E - \{a\}) \in L_{E-\{a\}}, \end{aligned} \tag{5.3.25}$$

其中

$$F_j^{(k)}(\lambda)=\begin{cases}F_j^{[k]}(\lambda), & (j\in Z(k));\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

由引理 5.3.2 及(5.3.22),(5.3.24),(5.3.25) 知

$$X^{(k)}(\lambda)\in M_{\bar R^{(0)}(\lambda)};F^{(k)}(\lambda)\in L_{\bar R^{(0)}(\lambda)}, \tag{5.3.26}$$

$$\mathbf{1}-\lambda\bar R^{(0)}(\lambda)\mathbf{1}=\sum_{k\geqslant 1}X^{(k)}(\lambda)+\bar R^{(0)}(\lambda)d, \tag{5.3.27}$$

$$\lambda_k F_j^{(k)}(\lambda)\to q_{kj};\lambda_k X_j^{(k)}(\lambda)\to 0(\lambda\uparrow+\infty,j\neq k), \tag{5.3.28}$$

$$\lambda_k F^{(k)}(\lambda)\mathbf{1}\to+\infty\quad(\lambda\uparrow+\infty), \tag{5.3.29}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda_k F^{(k)}(\lambda)(\mathbf{1}-{}_kX^{(k)})=a_k\leqslant 1/(k+1)^2, \tag{5.3.30}$$

$${}_kF^{(k)}\mathbf{1}=b_k\leqslant 1/(k+1)^2\quad({}_kF^{(k)}=\lim_{\lambda\to 0}{}_kF^{(k)}(\lambda)), \tag{5.3.31}$$

$$\lambda_k F^{(k)}(\lambda)(\mathbf{1}-{}_kX^{(k)})=a_k-{}_kF^{(k)}(\lambda){}_kd, \tag{5.3.32}$$

这里

$${}_kd=(d_i;i\in E-\{k\})\in M_{E-\{k\}}.$$

关于状态 1 分解 $\bar R^{(0)}(\lambda)$ 得

$$\bar R^{(0)}(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & {}_1\bar R^{(0)}(\lambda)\end{pmatrix}+r^{(1)}(\lambda)\begin{pmatrix}1\\ \xi^{(1)}(\lambda)\end{pmatrix}(1\quad \eta^{(1)}(\lambda)),$$

其中, ${}_1\bar R^{(0)}(\lambda)$ 是${}_1\bar Q^{(0)}$ 过程,

$$\xi^{(1)}(\lambda)\in M_{{}_1\bar R^{(0)}(\lambda)},\eta^{(1)}(\lambda)\in L_{{}_1\bar R^{(0)}(\lambda)}, \tag{5.3.33}$$

$$\lambda\xi^{(1)}(\lambda)\to\mathbf{0},\quad \lambda\eta^{(1)}(\lambda)\to\mathbf{0}\qquad(\lambda\uparrow+\infty), \tag{5.3.34}$$

$$\lambda\eta^{(1)}(\lambda)(\mathbf{1}-\xi^{(1)})\leqslant\beta_1<+\infty, \tag{5.3.35}$$

$$r^{(1)}(\lambda)=1/(\beta_1+\lambda+\lambda\eta^{(1)}(\lambda)\xi^{(1)}).$$

由(5.3.27) 还可得

$$\mathbf{1}-\lambda_1\bar R^{(0)}(\lambda)\mathbf{1}=\sum_{k\geqslant 1}{}_kX^{(k)}(\lambda)+\xi^{(1)}(\lambda)+{}_1\bar R^{(0)}(\lambda){}_1d, \tag{5.3.36}$$

$$\beta_1-\lambda\eta^{(1)}(\lambda)(\mathbf{1}-\xi^{(1)})=d_1+\eta^{(1)}(\lambda){}_1d. \tag{5.3.37}$$

由(5.3.23) 知,若 $i\in Z(k),j\bar\in Z(k)\cup E(0)\ (k\in E)$,则

$${}_1\bar R_{ij}^{(0)}(\lambda)={}_1\bar R_{ji}^{(0)}(\lambda)=0. \tag{5.3.38}$$

又因 $1\in Z(\pi(1))$,所以当 $j\bar\in Z(\pi(1))\cup E(0)=E(0)$ 时

$$\xi_j^{(1)}(\lambda) = \eta_j^{(1)}(\lambda) = 0. \tag{5.3.39}$$

于是由(5.3.24) — (5.3.26)得

$${}_1X^{(k)}(\lambda) \in M_{{}_1\overline{R}^{(0)}(\lambda)}, \quad {}_1F^{(k)}(\lambda) \in L_{{}_1\overline{R}^{(0)}(\lambda)}, \quad (k \geqslant 1). \tag{5.3.40}$$

令

$$\overline{R}^{(1)}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & {}_1\overline{R}^{(0)}(\lambda) \end{pmatrix} + \bar{r}^{(n)}(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ \xi^{(1)}(\lambda) + {}_1X^{(1)}(\lambda) \end{pmatrix} (1 \quad \eta^{(1)}(\lambda) + {}_1F^{(1)}(\lambda)). \tag{5.3.41}$$

其中

$$\bar{r}^{(1)}(\lambda) = 1/(\beta_1 + \lambda + \lambda\eta^{(1)}(\lambda)\xi^{(1)} + a_1 + \lambda_1 F^{(1)}(\lambda)_1 X^{(1)}).$$

由(5.3.36)得

$$\xi^{(1)}(\lambda) + {}_1X^{(1)}(\lambda) + \lambda_1\overline{R}^{(0)}(\lambda)1 \leqslant 1. \tag{5.3.42}$$

由(5.3.28),(5.3.33),(5.3.34)及(5.3.40)得

$$\xi^{(1)}(\lambda) + {}_1X^{(1)}(\lambda) \in M_{{}_1\overline{R}^{(0)}(\lambda)};$$
$$\eta^{(1)}(\lambda) + {}_1F^{(1)}(\lambda) \in L_{{}_1\overline{R}^{(0)}(\lambda)}. \tag{5.3.43}$$

$$\lambda(\xi^{(1)}(\lambda) + {}_1X^{(1)}(\lambda)) \to 0;$$
$$\lambda(\eta_j^{(1)}(\lambda) + {}_1F_j^{(1)}(\lambda)) \to q_{1j} \quad (j \neq 1)(\lambda \uparrow +\infty). \tag{5.3.44}$$

由(5.3.30),(5.3.35)以及(5.3.39)得

$$\begin{aligned} &\lambda(\eta^{(1)}(\lambda) - {}_1F^{(1)}(\lambda))(1 - \xi^{(1)} - {}_1X^{(1)}) \\ &= \lambda\eta^{(1)}(\lambda)(1 - \xi^{(1)}) + \lambda_1 F^{(1)}(\lambda)(1 - {}_1X^{(1)}) \\ &\leqslant \beta_1 + a_1 < +\infty. \end{aligned} \tag{5.3.45}$$

由上式及(5.3.29)得

$$\lambda(\eta^{(1)}(\lambda) + {}_1F^{(1)}(\lambda))(\xi^{(1)} + {}_1X^{(1)}) \to +\infty. \tag{5.3.46}$$

因而由(5.3.42) — (5.3.46)及分解定理知$\overline{R}^{(1)}(\lambda)$是$\overline{Q}^{(1)}$过程.由(5.3.36),(5.3.37)及(5.3.32)易得

$$1 - \lambda\overline{R}^{(1)}(\lambda)1 = \sum_{k \geqslant 2} X^{(k)}(\lambda) + \overline{R}^{(1)}(\lambda)d.$$

由(5.3.38),(5.3.39)知,当$i \in Z(k)$, $j \,\tilde{\in}\, Z(k) \cup E(1)$ $(k \in E)$时

$$\overline{R}_{ij}^{(1)}(\lambda) = \overline{R}_{ji}^{(1)}(\lambda) = 0.$$

而由(5.3.39)及(5.3.40)得

$$F^{(1)}(\lambda) \in L_{\overline{R}^{(1)}(\lambda)}; \quad X^{(1)}(\lambda) \in M_{\overline{R}^{(1)}(\lambda)}.$$

因此由归纳原理知，存在$\{\overline{R}^{(n)}(\lambda)\}_{n\in E}$，其中$\overline{R}^{(n)}(\lambda)$是$\overline{Q}^{(n)}$过程且满足

$$1 - \lambda\overline{R}^{(n)}(\lambda)1 = \sum_{k\geqslant n} X^{(k)}(\lambda) + \overline{R}^{(n)}(\lambda)d. \qquad (5.3.47)$$

另外还有如下的关系式

$$\overline{R}^{(n-1)}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & {}_n\overline{R}^{(n-1)}(\lambda) \end{pmatrix} + r^{(n)}(\lambda)\begin{pmatrix} 1 \\ \xi^{(n)}(\lambda) \end{pmatrix}(1 \quad \eta^{(n)}(\lambda)),$$

$$(5.3.48)$$

$$\overline{R}^{(n)}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & {}_n\overline{R}^{(n-1)}(\lambda) \end{pmatrix} + \overline{r}^{(n)}(\lambda)\begin{pmatrix} 1 \\ \xi^{(n)}(\lambda) + {}_nX^{(n)}(\lambda) \end{pmatrix}$$

$$\cdot (1 \quad \eta^{(n)}(\lambda) + {}_nF^{(n)}(\lambda)), \qquad (5.3.49)$$

$$r^{(n)}(\lambda) = 1/(\beta_n + \lambda + \lambda\eta^{(n)}(\lambda)\xi^{(n)}), \qquad (5.3.50)$$

$$\overline{r}^{(n)}(\lambda) = 1/(\beta_n + \lambda + \lambda\eta^{(n)}(\lambda)\xi^{(n)} + a_n + \lambda_n F^{(n)}(\lambda)_n X^{(n)}),$$

$$\lambda\overline{r}^{(n)}(\lambda) \leqslant 1; \ \lambda r^{(n)}(\lambda)\eta_j^{(n)}(\lambda) \leqslant 1; \xi_j^{(n)}(\lambda) \leqslant 1, \quad (j \neq n).$$

$$(5.3.51)$$

对$i \in E$，由(5.3.21)知，若$n > i$则$i \overline{\in} Z(n)$，于是

$$X_i^{(n)}(\lambda) = {}_nX_i^{(n)}(\lambda) = 0; F_i^{(n)}(\lambda) = {}_nF_i^{(n)}(\lambda) = 0. \ (5.3.52)$$

设$i,j \in E$，记$n_{ij} = \max\{i,j\}$. 对任意$n > n_{ij}$，由(5.3.48)，(5.3.49)及(5.3.52)得

$$\overline{R}_{ij}^{(n-1)}(\lambda) = {}_n\overline{R}_{ij}^{(n-1)}(\lambda) + r^{(n)}(\lambda)\xi_i^{(n)}(\lambda)\eta_j^{(n)}(\lambda),$$

$$\overline{R}_{ij}^{(n)}(\lambda) = {}_n\overline{R}_{ij}^{(n-1)}(\lambda) + \overline{r}^{(n)}(\lambda)\xi_i^{(n)}(\lambda)\eta_j^{(n)}(\lambda).$$

于是由(5.3.50)得

$$\overline{R}_{ij}^{(n-1)}(\lambda) - \overline{R}_{ij}^{(n)}(\lambda)$$

$$= r^{(n)}(\lambda)\overline{r}^{(n)}(\lambda)(a_n + \lambda_n F^{(n)}(\lambda)_n X^{(n)})\xi_i^{(n)}(\lambda)\eta_j^{(n)}(\lambda) \geqslant 0.$$

$$(5.3.53)$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\overline{R}_{ij}^{(n)}(\lambda)$存在. 令

$$r_{ij}^{-}(\lambda) = \lim_{n\to\infty}\overline{R}_{ij}^{(n)}(\lambda) \quad (i,j \in E); \ R^{-}(\lambda) = (r_{ij}^{-}(\lambda); i,j \in E).$$

现在我们证明 $R^-(\lambda)$ 是 Q^- 过程且

$$\mathbf{1} - \lambda R^-(\lambda)\mathbf{1} = R^-(\lambda)d.$$

首先由 $\overline{R}^{(n)}(\lambda) \geqslant 0$ 得 $R^-(\lambda) \geqslant \mathbf{0}$. 由(5.3.48),(5.3.49) 及(5.3.52) 知,若固定 $i \in E$,,则对 $j \in E$,

$$r_{ij}^-(\lambda) = \overline{R}_{ij}^{(i)}(\lambda) + \sum_{n>i}(\bar{r}^{(n)}(\lambda)\xi_i^{(n)}(\lambda)F_j^{(n)}(\lambda)$$
$$- \bar{r}^{(n)}(\lambda)r^{(n)}(\lambda)(a_n + \lambda_n F^{(n)}(\lambda)_n X^{(n)})\xi_i^{(n)}(\lambda)\hat{\eta}_j^{(n)}(\lambda)). \tag{5.3.54}$$

其中

$$\hat{\eta}_j^{(n)}(\lambda) = \begin{cases} 1, & n = j; \\ \eta_j^{(n)}(\lambda), & n \neq j. \end{cases}$$

于是

$$1 - \lambda \sum_{j \in E} r_{ij}^-(\lambda)$$
$$= 1 - \lambda \sum_{j \in E} \overline{R}_{ij}^{(i)}(\lambda) - \sum_{j \in E} \sum_{n>i} (\lambda \bar{r}^{(n)}(\lambda)\xi_i^{(n)}(\lambda)F_j^{(n)}(\lambda)$$
$$- \lambda \bar{r}^{(n)}(\lambda)r^{(n)}(\lambda)(a_n + \lambda_n F^{(n)}(\lambda)_n X^{(n)})\xi_i^{(n)}(\lambda)\hat{\eta}_j^{(n)}(\lambda)).$$

但由(5.3.51) 及(5.3.31) 得

$$\sum_{j \in E} \sum_{n>i} \lambda \bar{r}^{(n)}(\lambda)\xi_i^{(n)}(\lambda)F_j^{(n)}(\lambda) \leqslant \sum_{n>i} \sum_{j \in E} F_j^{(n)}(\lambda)$$
$$\leqslant \sum_{n>i} b_n < +\infty.$$

所以

$$1 - \lambda \sum_{j \in E} r_{ij}^-(\lambda) = 1 - \lambda \sum_{j \in E} \overline{R}_{ij}^{(i)}(\lambda) - \sum_{n>i} \bar{r}^{(n)}(\lambda)\xi_i^{(n)}(\lambda)\lambda F^{(n)}(\lambda)\mathbf{1}$$
$$+ \sum_{n>i} \bar{r}^{(n)}(\lambda)r^{(n)}(\lambda)(a_n + \lambda_n F^{(n)}(\lambda)_n X^{(n)})\xi_i^{(n)}(\lambda)(\lambda + \lambda\eta^{(n)}(\lambda)\mathbf{1}). \tag{5.3.55}$$

在(5.3.47) 中用 $n-1$ 代替 n,再把(5.3.48) 代入并注意(5.3.50) 得

$$\beta_n - \lambda\eta^{(n)}(\lambda)(\mathbf{1} - \xi^{(n)}) = d_n + \sum_{j \neq n} \eta_j^{(n)}(\lambda)d_j,$$

但

$$a_n - \lambda_n F^{(n)}(\lambda)(1 - {}_nX^{(n)}) = {}_nF^{(n)}(\lambda)_n d = F^{(n)}(\lambda)d.$$

所以由 $\lambda F^{(n)}(\lambda)1 = \lambda_n F^{(n)}(\lambda)1$(因 $F_n^{(n)}(\lambda) = 0$) 得

$$\lambda F^{(n)}(\lambda)1 - (a_n + \lambda_n F^{(n)}(\lambda)_n X^{(n)})r^{(n)}(\lambda)(\lambda + \lambda\eta^{(n)}(\lambda)1)$$

$$= \lambda_n F^{(n)}(\lambda)1 +$$

$$(a_n + \lambda_n F^{(n)}(\lambda)_n X^{(n)})(r^{(n)}(\lambda)(\beta_n - \lambda\eta^{(n)}(\lambda)(1 - \xi^{(n)})) - 1)$$

$$= (a_n + \lambda_n F^{(n)}(\lambda)_n X^{(n)})r^{(n)}(\lambda)(d_n + \eta^{(n)}(\lambda)_n d)$$

$$- (a_n - \lambda_n F^{(n)}(\lambda)(1 - {}_nX^{(n)}))$$

$$= r^{(n)}(\lambda)(a_n + \lambda_n F^{(n)}(\lambda)_n X^{(n)})\hat{\eta}^{(n)}(\lambda)d - F^{(n)}(\lambda)d.$$

而由(5.3.47)及(5.3.52)得

$$1 - \lambda\sum_{j\in E}\overline{R}_{ij}^{(n)}(\lambda) = \sum_{j\in E}\overline{R}_{ij}^{(n)}(\lambda)d_j.$$

于是由(5.3.54),(5.3.55)得

$$1 - \lambda\sum_{j\in E}r_{ij}^-(\lambda) = \sum_{j\in E}r_{ij}^-(\lambda)d_j. \tag{5.3.56}$$

由 i 的任意性,我们便得到

$$1 - \lambda R^-(\lambda)1 = R^-(\lambda)d. \tag{5.3.57}$$

上式也说明 $R^-(\lambda)$ 满足范条件. 任意取定 $i,j\in E$,由(5.3.56)知,对任意 $\Delta > 0$,存在 $h\in E$ 使得

$$\lambda\sum_{k>h}r_{ik}^-(\lambda) + \sum_{k>h}r_{ik}^-(\lambda)d_k < \Delta.$$

由(5.3.47)及(5.3.52)知,若 $n > i$ 则

$$\lambda\sum_{k\in E}\overline{R}_{ik}^{(n)}(\lambda) + \sum_{k\in E}\overline{R}_{ik}^{(n)}(\lambda)d_k = 1 = \lambda\sum_{k\in E}r_{ik}^-(\lambda) + \sum_{k\in E}r_{ik}^-(\lambda)d_k.$$

由(5.3.53)知,对 $h,i\in E$ 存在 n_{ih} 使得

$$\overline{R}_{ik}^{(n)}(\lambda) \geqslant r_{ik}^-(\lambda), \qquad (n > n_{ih}, k \leqslant h).$$

于是当 $n > n_{ih}$ 时

$$\lambda\sum_{k>h}\overline{R}_{ik}^{(n)}(\lambda) + \sum_{k>h}\overline{R}_{ik}^{(n)}(\lambda)d_k$$

$$\leqslant \lambda\sum_{k>h}r_{ik}^-(\lambda) + \sum_{k>h}r_{ik}^-(\lambda)d_k < \Delta.$$

取定 $\mu > \lambda > 0$,因 $\overline{R}^{(n)}(\lambda)$ 是 $\overline{Q}^{(n)}$ 过程,所以

$$\overline{R}_{ij}^{(n)}(\lambda) - \overline{R}_{ij}^{(n)}(\mu) = (\mu - \lambda)\sum_k \overline{R}_{ik}^{(n)}(\lambda)\overline{R}_{kj}^{(n)}(\mu).$$

令 $n\to\infty$，由法都引理得

$$r_{ij}^{-}(\lambda)-r_{ij}^{-}(\mu)\geqslant(\mu-\lambda)\sum_{k}r_{ik}^{-}(\lambda)r_{kj}^{-}(\mu). \quad (5.3.58)$$

由于 $\mu\overline{R}_{kj}^{(n)}(\mu)\leqslant1$，所以当 $n>n_{ih}$ 时

$$\overline{R}_{ij}^{(n)}(\lambda)-\overline{R}_{ij}^{(n)}(\mu)\leqslant(\mu-\lambda)\sum_{k\leqslant h}\overline{R}_{ik}^{(n)}(\lambda)\overline{R}_{kj}^{(n)}(\mu)$$

$$+(\mu-\lambda)\sum_{k>h}\overline{R}_{ik}^{(n)}(\lambda)/\mu$$

$$\leqslant(\mu-\lambda)\sum_{k\leqslant h}\overline{R}_{ik}^{(n)}(\lambda)\overline{R}_{kj}^{(n)}(\mu)+\frac{\mu-\lambda}{\lambda\mu}\Delta.$$

令 $n\to+\infty$，得

$$r_{ij}^{-}(\lambda)-r_{ij}^{-}(\mu)\leqslant(\mu-\lambda)\sum_{k\leqslant h}r_{ik}^{-}(\lambda)r_{kj}^{-}(\mu)+\frac{\mu-\lambda}{\lambda\mu}\Delta$$

$$\leqslant(\mu-\lambda)\sum_{k\in E}r_{ik}^{-}(\lambda)r_{kj}^{-}(\mu)+\frac{\mu-\lambda}{\lambda\mu}\Delta.$$

由 Δ 的任意性得

$$r_{ij}^{-}(\lambda)-r_{ij}^{-}(\mu)\leqslant(\mu-\lambda)\sum_{k\in E}r_{ik}^{-}(\lambda)r_{kj}^{-}(\mu).$$

结合(5.3.58)得

$$R^{-}(\lambda)-R^{-}(\mu)=(\mu-\lambda)R^{-}(\lambda)R^{-}(\mu), \quad (5.3.59)$$

即 $R^{-}(\lambda)$ 满足预解方程. 对任意给定的 i，由(5.3.53)得

$$r_{ii}^{-}(\lambda)=\overline{R}_{ii}^{(i)}(\lambda)$$

$$-\sum_{n>i}r^{(n)}(\lambda)\bar{r}^{(n)}(\lambda)(a_n+\lambda_nF^{(n)}(\lambda)_nX^{(n)})\xi_i^{(n)}(\lambda)\eta_i^{(n)}(\lambda).$$

因 $\overline{R}^{(i)}(\lambda)$ 是 $\overline{Q}^{(i)}$ 过程，所以

$$\lambda\overline{R}_{ii}^{(i)}(\lambda)\to1, \qquad (\lambda\uparrow+\infty).$$

而由(5.3.53)及(5.3.30)，(5.3.31)得

$$\lambda\sum_{n>i}r^{(n)}(\lambda)\bar{r}^{(n)}(\lambda)(a_n+\lambda_nF^{(n)}(\lambda)_nX^{(n)})\xi_i^{(n)}(\lambda)\eta_i^{(n)}(\lambda)$$

$$\leqslant\sum_{n>i}a_n/\lambda+\sum_{n>i}{}_nF^{(n)}(\lambda)_nX^{(n)}\downarrow0, \qquad (\lambda\uparrow\infty).$$

所以

$$\lambda r_{ii}^{-}(\lambda)\to1, \quad (\lambda\uparrow+\infty).$$

即 $R^{-}(\lambda)$ 满足连续性条件. 于是由(5.3.57)，(5.3.59)知 $R^{-}(\lambda)$

是 E 上的一个马氏过程. 记其密度矩阵为 $\bar{Q}=(\bar{q}_{ij};i,j\in E)$. 现证 $\bar{Q}=Q^-$. 首先由(5.3.53)知,对 $i,j\in E$,存在 n_{ij} 使得

$$r_{ij}^-(\lambda)\leqslant \bar{R}_{ij}^{(n)}(\lambda),\qquad (n>n_{ij}).$$

于是

$$\bar{q}_{ij}\leqslant \bar{q}_{ij}^{(n)},\qquad (n>n_{ij}).$$

由 $\bar{Q}^{(n)}$ 的定义知

$$\bar{q}_{ij}^{(n)}\to q_{ij}^-,\qquad (n\to+\infty),$$

所以

$$\bar{q}_{ij}\leqslant q_{ij}^-. \tag{5.3.60}$$

关于 i 分解 $\bar{R}^{(n)}(\lambda)$ 得

$$\bar{R}^{(n)}(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & {}_i\bar{R}^{(n)}(\lambda)\end{pmatrix}+\tilde{r}^{(n)}(\lambda)\begin{pmatrix}1\\ \tilde{\xi}^{(n)}(\lambda)\end{pmatrix}(1\quad \tilde{\eta}^{(n)}(\lambda)),$$

$$\tilde{r}^{(n)}(\lambda)=1/(\tilde{C}^{(n)}+\lambda+\lambda\tilde{\eta}^{(n)}(\lambda)\tilde{\xi}^{(n)}).$$

由分解定理知

$$\tilde{\eta}_j^{(n)}(\lambda)\geqslant \bar{q}_{ij}^{(n)}\,{}_i\bar{R}_{jj}^{(n)}(\lambda),\qquad (j\neq i), \tag{5.3.61}$$

$$\lambda\tilde{\eta}^{(n)}(\lambda)\tilde{\xi}^{(n)}-\tilde{C}^{(n)}\leqslant -\bar{q}_{ii}^{(n)},\qquad (\lambda>0). \tag{5.3.62}$$

因 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\bar{R}^{(n)}(\lambda)=R^-(\lambda)$,而 $R^-(\lambda)$ 是 $\bar{Q}$ 过程,所以

$$\begin{cases}\tilde{r}(\lambda)\to\tilde{r}^{(n)}(\lambda), & \tilde{\eta}^{(n)}(\lambda)\to\tilde{\eta}(\lambda), \quad \tilde{\xi}^{(n)}(\lambda)\to\tilde{\xi}(\lambda),\\ {}_i\bar{R}^{(n)}(\lambda)\to {}_iR^-(\lambda), & \tilde{C}^{(n)}_i+\lambda\tilde{\eta}^{(n)}(\lambda)\tilde{\xi}^{(n)}\to\tilde{C}+\lambda\tilde{\eta}(\lambda)\tilde{\xi},\end{cases}$$

$$(n\uparrow+\infty).$$

且

$$R^-(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & {}_iR^-(\lambda)\end{pmatrix}+\tilde{r}(\lambda)\begin{pmatrix}1\\ \tilde{\xi}(\lambda)\end{pmatrix}(1\quad\tilde{\eta}(\lambda)),$$

$$\tilde{r}(\lambda)=1/(\tilde{C}+\lambda+\lambda\tilde{\eta}(\lambda)\tilde{\xi}).$$

易知上式是 $R^-(\lambda)$ 关于 i 的分解,由分解定理有

$$\begin{cases}\lambda\tilde{\eta}_j(\lambda)\to\bar{q}_{ij}, & \lambda\,{}_ir_{jj}^-(\lambda)\to 1,\quad (j\neq i),\\ \lambda\tilde{\eta}(\lambda)\tilde{\xi}+\tilde{C}\to-\bar{q}_{ii},\end{cases}\qquad (\lambda\uparrow+\infty). \tag{5.3.63}$$

在(5.3.61),(5.3.62)中令 $n\to+\infty$ 得

$$\tilde{\eta}_j(\lambda)\geqslant q_{ij}^-\,{}_ir_{jj}^-(\lambda)\quad (j\neq i),\quad \lambda\tilde{\eta}(\lambda)\tilde{\xi}+\tilde{C}\leqslant -q_{ii}^-,$$

于是由(5.3.63)得

$$\bar{q}_{ij} \geqslant q_{ij}.$$

结合(5.3.60)得

$$\bar{q}_{ij} = q_{ij}.$$

由此我们便证明了 $R^-(\lambda)$ 是 Q^- 过程且满足(5.3.57).

以下来构造诚实过程.

定理 5.3.1 设 Q 是全瞬时态拟 Q — 矩阵,满足(N),(S)条件;那么 Q 是 Q — 矩阵,并且存在诚实 Q 过程.

证明 由上面知,存在 Q^- 过程 $R^-(\lambda)$ 满足(5.3.57).记

$$e^{(k)} = (q_{kj}-q_{kj}^-;j \in E) \in L_E, \quad d^{(k)} = (\delta_{ki}d_i;i \in E) \in M_E.$$

$$Q^{(k)} = (q_{ij}^{(k)};i,j \in E).$$

其中

$$\delta_{ki} = \begin{cases} 1, & k = i; \\ 0, & k \neq i. \end{cases}$$

$$q_{ij}^{(k)} = \begin{cases} q_{ij}, & i \leqslant k, j \in E; \\ q_{ij}^-; & i > k, j \in E. \end{cases}$$

易知

$$Q^{(k)} \to Q, \quad (k \to +\infty), \tag{5.3.64}$$

$$e^{(k)}1 = d_k; \quad \sum_{k\in E} d^{(k)} = d. \tag{5.3.65}$$

不失一般性,我们假设

$$d_i > 0, \qquad (i \in E). \tag{5.3.66}$$

令

$$R^{(0)}(\lambda) = R^-(\lambda) + R^-(\lambda)d^{(0)} \frac{e^{(0)}R^-(\lambda)}{c_0 + \lambda e^{(0)}R^-(\lambda)R^- d^{(0)}}, \tag{5.3.67}$$

其中

$$R^- d^{(0)} = \lim_{\lambda\to 0} R^-(\lambda)d^{(0)},$$

$$c_0 = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda e^{(0)}R^-(\lambda)(1 - R^- d^{(0)})$$
$$\leqslant e^{(0)}1 < +\infty. \tag{5.3.68}$$

现证 $R^{(0)}(\lambda)$ 是 $Q^{(0)}$ 过程且

$$1 - \lambda R^{(0)}(\lambda)1 = R^{(0)}(\lambda)(d - d^{(0)}), \tag{5.3.69}$$

$$S^{(0)}(\lambda) \equiv R^{-}(\lambda)d^{(0)} \in M_{R^{-}(\lambda)}, \tag{5.3.70}$$

$$T^{(0)}(\lambda) \equiv e^{(0)}R^{-}(\lambda)/(c_0 + \lambda e^{(0)}R^{-}(\lambda)R^{-}d^{(0)}) \in L_{R^{(0)}(\lambda)}. \tag{5.3.71}$$

首先由 $R^{-}(\lambda)$ 的预解方程易得(5.3.70)及

$$e^{(0)}R^{-}(\lambda) \in L_{R^{-}(\lambda)}. \tag{5.3.72}$$

由法都引理及 $R^{-}(\lambda)$ 的范条件和连续性条件有

$$\lambda e^{(0)}R^{-}(\lambda)1 \to e^{(0)}1 = d_0 \quad (\lambda \uparrow +\infty). \tag{5.3.73}$$

于是由定理 3.5.2 和引理 5.3.2 知 $R^{(0)}(\lambda)$ 是 $Q^{(0)}$ 过程. 由 $R^{-}(\lambda)$ 的预解方程有

$$\lambda e^{(0)}R^{-}(\lambda)R^{-}d^{(0)} = e^{(0)}R^{-}d^{(0)} - e^{(0)}R^{-}(\lambda)d^{(0)},$$

于是

$$c_0 = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda e^{(0)}R^{-}(\lambda)(1 - R^{-}d^{(0)}) = e^{(0)}1 - e^{(0)}R^{-}d^{(0)}.$$

由(5.3.57)我们有

$$\begin{aligned}
&1 - \lambda R^{(0)}(\lambda)1 - R^{(0)}(\lambda)(d - d^{(0)}) \\
&= 1 - \lambda R^{-}(\lambda)1 - R^{-}(\lambda)d^{(0)}\frac{\lambda e^{(0)}R^{-}(\lambda)1}{c_0 + \lambda e^{(0)}R^{-}(\lambda)R^{-}d^{(0)}} \\
&\quad - R^{-}(\lambda)(d - d^{(0)}) - R^{-}(\lambda)d^{(0)}\frac{e^{(0)}R^{-}(\lambda)(d - d^{(0)})}{c_0 + \lambda e^{(0)}R^{-}(\lambda)R^{-}d^{(0)}} \\
&= R^{-}(\lambda)d^{(0)}\Big(1 - \frac{\lambda e^{(0)}R^{-}(\lambda)1 + e^{(0)}R^{-}(\lambda)d - e^{(0)}R^{-}(\lambda)d^{(0)}}{c_0 + \lambda e^{(0)}R^{-}(\lambda)R^{-}d^{(0)}}\Big) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

即(5.3.69)成立. 由于 $R^{(0)}(\lambda)$ 是 $Q^{(0)}$ 过程, 所以由

$$R^{(0)}(\lambda) = R^{(0)}(\mu)(I + (\mu - \lambda)R^{(0)}(\lambda)),$$

可得

$$\begin{aligned}
&R^{-}(\lambda) + R^{-}(\lambda)d^{(0)}T^{(0)}(\lambda) \\
&= R^{-}(\mu)(I + (\mu - \lambda)R^{-}(\lambda)) \\
&\quad + (\mu - \lambda)R^{-}(\mu)R^{-}(\lambda)d^{(0)}T^{(0)}(\lambda) \\
&\quad + R^{-}(\mu)d^{(0)}T^{(0)}(\mu)(I + (\mu - \lambda)R^{(0)}(\lambda)).
\end{aligned}$$

因此

$$R^{-}(\mu)d^{(0)}T^{(0)}(\lambda) = R^{-}(\mu)d^{(0)}T^{(0)}(\mu)(I + (\mu - \lambda)R^{(0)}(\lambda))$$

从而

$$\begin{aligned}&(I + (\mu - \mu_n)R^{-}(\mu_n))R^{-}(\mu)d^{(0)}T^{(0)}(\lambda)\\ &= (I + (\mu - \mu_n)R^{-}(\mu_n))R^{-}(\mu)d^{(0)}T^{(0)}(\mu)(I + (\mu - \lambda)R^{(0)}(\lambda)),\end{aligned}$$

$$(\mu_n > 0).$$

故

$$\mu_n R^{-}(\mu_n)d^{(0)}T^{(0)}(\lambda) = \mu_n R^{-}(\mu_n)d^{(0)}T^{(0)}(\mu)(I + (\mu - \lambda)R^{(0)}(\lambda)),$$

$$(\mu_n > 0).$$

令 $\mu_n \to +\infty$，得

$$d^{(0)}T^{(0)}(\lambda) = d^{(0)}T^{(0)}(\mu)(I + (\mu - \lambda)R^{(0)}(\lambda))$$

由于 $d^{(0)} \neq 0$，所以

$$T^{(0)}(\lambda) = T^{(0)}(\mu)(I + (\mu - \lambda)R^{(0)}(\lambda)).$$

从而可推出(5.3.71).

于是由归纳原理易知，存在$\{R^{(n)}(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$满足：

$R^{(n)}(\lambda)$ 是 $Q^{(n)}$ 过程， (5.3.74)

$$1 - \lambda R^{(n)}(\lambda)1 = R^{(n)}(\lambda)(d - \sum_{k \leqslant n} d^{(k)}), \tag{5.3.75}$$

$$S^{(n)}(\lambda) \equiv R^{(n-1)}(\lambda)d^{(n)} \in M_{R^{(n-1)}(\lambda)}, \quad (R^{(-1)}(\lambda) \equiv R^{-}(\lambda)), \tag{5.3.76}$$

$$T^{(n)}(\lambda) \equiv e^{(n)}R^{(n-1)}(\lambda)/(c_n + \lambda e^{(n)}R^{(n-1)}(\lambda)R^{(n-1)}d^{(n)}) \in L_{R^{(n)}(\lambda)}, \tag{5.3.77}$$

$$R^{(n)}(\lambda) = R^{(n-1)}(\lambda) + R^{(n-1)}(\lambda)d^{(n)}T^{(n)}(\lambda). \tag{5.3.78}$$

由定理 3.5.1 得

$$\lambda S^{(n)}(\lambda) \to d^{(n)}, \quad \lambda T^{(n)}(\lambda) \to \frac{1}{d_n}e^{(n)}, \qquad (\lambda \uparrow +\infty). \tag{5.3.79}$$

由(5.3.78) 知

$$R^{(n)}(\lambda)\uparrow. \tag{5.3.80}$$

于是 $\tilde{R}(\lambda) \equiv \lim\limits_{n\to\infty} R^{(n)}(\lambda)$ 存在且

$$\tilde{R}(\lambda) = R^{-}(\lambda) + \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)}(\lambda)T^{(n)}(\lambda). \qquad (5.3.81)$$

由(5.3.80)知

$$1 - \lambda\tilde{R}(\lambda)1 = \lim_{n\to\infty}(1 - \lambda R^{(n)}(\lambda)1) \geqslant 0.$$

即 $\tilde{R}(\lambda)$ 满足范条件. 同样由(5.3.80)可知 $\tilde{R}(\lambda)$ 也满足预解方程及连续性条件. 现证 $\tilde{R}(\lambda)$ 满足 Q 条件. 即证

$$\lambda(\lambda\tilde{r}_{ij}(\lambda) - \delta_{ij}) \to q_{ij}, \qquad (\lambda \uparrow +\infty).$$

由(5.3.80)得

$$\lambda(\lambda\tilde{r}_{ij}(\lambda) - \delta_{ij}) =$$

$$\lambda(\lambda r_{ij}^{-}(\lambda) - \delta_{ij}) + \lambda^2 S_i^{(i)}(\lambda)T_j^{(i)}(\lambda) + \sum_{n\neq i} \lambda S_i^{(n)}(\lambda)\lambda T_j^{(n)}(\lambda).$$

因

$$\lambda(\lambda r_{ij}^{-}(\lambda) - \delta_{ij}) \to q_{ij}^{-}, \quad \lambda^2 S_i^{(i)}(\lambda)T_j^{(i)}(\lambda) \to d_i \frac{e_j^{(i)}}{d_i} = e_j^{(i)}.$$

所以人们只需证明

$$\sum_{n\neq i} \lambda S_i^{(n)}(\lambda)\lambda T_j^{(n)}(\lambda) \to 0, \qquad (\lambda \uparrow +\infty). \quad (5.3.82)$$

固定 $\mu > 0$. 由(5.3.76),(5.3.77)知,当 $\lambda > \mu$ 时,

$$\begin{aligned}
&(\lambda - \mu)^2 r_{ii}^{-}(\mu)S_i^{(n)}(\lambda)T_j^{(n)}(\lambda)r_{jj}^{-}(\mu) \\
\leqslant &(\lambda - \mu)^2 r_{ii}^{(n-1)}(\mu)S_i^{(n)}(\lambda)T_j^{(n)}(\lambda)r_{jj}^{(n)}(\mu) \\
\leqslant &(\lambda - \mu)\sum_{k\in E} r_{ik}^{(n-1)}(\mu)S_k^{(n)}(\lambda)(\lambda - \mu)\sum_{k\in E} T_k^{(n)}(\lambda)r_{kj}^{(n)}(\mu) \\
= &(S_i^{(n)}(\mu) - S_i^{(n)}(\lambda))(T_j^{(n)}(\mu) - T_j^{(n)}(\lambda)) \\
\leqslant &S_i^{(n)}(\mu)T_j^{(n)}(\mu).
\end{aligned}$$

但由(5.3.81)得

$$\sum_{n\neq i} S_i^{(n)}(\mu)T_j^{(n)}(\mu) < +\infty.$$

于是由控制收敛定理及

$$r_{ii}^{-}(\mu) > 0, \quad r_{jj}^{-}(\mu) > 0, \quad \lim_{\lambda\to\infty}(\lambda - \mu)S_i^{(n)}(\lambda) = 0, \quad (n \neq i).$$

知(5.3.82)成立. 这样我们便证明了 $\tilde{R}(\lambda)$ 是 Q 过程. 由(5.3.74),(5.3.75),(5.3.79)知,对 $n \in E$,

$$\lambda(1-\lambda\tilde{R}(\lambda)1) \leqslant \lambda(1-\lambda R^{(n)}(\lambda)1) = \lambda R^{(n)}(\lambda)(d-\sum_{k\leqslant n} d^{(k)}).$$

令 $\lambda \to \infty$，由定理 3.5.1 得

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda(1-\lambda\tilde{R}(\lambda)1) \leqslant d-\sum_{k\leqslant n} d^{(k)}, \quad (n \geqslant 0).$$

由 n 的任意性及(5.3.65)得

$$\lambda(1-\lambda\tilde{R}(\lambda)1) \to 0, \qquad (\lambda \uparrow +\infty). \qquad (5.3.83)$$

取 $e \in L_E$ 且 $e \neq 0$. 令

$$R(\lambda) = \tilde{R}(\lambda) + (1-\lambda\tilde{R}(\lambda)1)\frac{e\tilde{R}(\lambda)}{\lambda e\tilde{R}(\lambda)1}.$$

由(5.3.83)及定理 3.5.2 知 $R(\lambda)$ 是诚实过程.

定理证毕.

定理5.3.2 若Q是全瞬时$Q-$矩阵，则诚实Q过程有无穷多个.

证明 因为Q是全瞬时$Q-$矩阵，所以Q满足(N)，(S)条件. 取 $\Delta \notin E$，令

$$\hat{q}_{ij} = \begin{cases} -\infty, & i=j=\Delta; \\ 0, & i=\Delta \text{ 或 } j=\Delta, i\neq j; \\ q_{ij}, & i,j\in E. \end{cases}$$

则 $\hat{Q}=(\hat{q}_{ij}; i,j\in E\cup\{\Delta\})$ 也是全瞬时的且满足(N)，(S)条件. 于是 $\hat{Q}$ 是诚实 $Q-$ 矩阵，不妨设 $R(\lambda)$ 为诚实 $\hat{Q}$ 过程. 取 $b\in E$，令

$$e^{(b)} = (q_{bj}; j\in E-\{b\}),$$

$$\varepsilon^{(b)} = (q_{ib}; i\in E-\{b\})^{T}, \quad {}_bQ = (q_{ij}; i,j\in E-\{b\}).$$

对 $R(\lambda)$ 禁止状态集$\{\Delta,b\}$使用二维分解定理知，存在${}_bQ$过程${}_{\Delta b}R(\lambda)$及 $\xi^{(k)}(\lambda)\in M_{{}_{\Delta b}R(\lambda)}$，$\eta^{(k)}(\lambda)\in L_{{}_{\Delta b}R(\lambda)}$ $(k=\Delta,b)$ 满足

$$\xi^{(\Delta)}(\lambda)+\xi^{(b)}(\lambda)+\lambda{}_{\Delta b}R(\lambda)1 = 1,$$

$$\lambda\xi^{(\Delta)}(\lambda)\to 0, \quad \lambda\xi^{(b)}(\lambda)\to\varepsilon^{(b)} \quad (\lambda\to+\infty),$$

$$\lambda\eta^{(\Delta)}(\lambda)\to 0, \quad \lambda\eta^{(b)}(\lambda)\to e^{(b)} \quad (\lambda\to+\infty),$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta^{(b)}(\lambda)\xi^{(\Delta)} < +\infty, \quad \lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta^{(\Delta)}(\lambda)\xi^{(b)} < +\infty,$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta^{(b)}(\lambda)(1-\xi^{(b)}) < +\infty, \quad \lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta^{(\Delta)}(\lambda)(1-\xi^{(\Delta)}) < +\infty,$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta^{(b)}(\lambda)\xi^{(b)} = +\infty, \quad \lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta^{(\Delta)}(\lambda)\xi^{(\Delta)} = +\infty. \quad (5.3.84)$$

令

$$R_t(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & {}_{b}R(\lambda) \end{pmatrix} + r_t(\lambda)\begin{pmatrix} 1 \\ \xi(\lambda) \end{pmatrix}(1 \quad \eta_t(\lambda)),$$

其中

$$\xi(\lambda) = \xi^{(a)}(\lambda) + \xi^{(b)}(\lambda), \quad \eta_t(\lambda) = \eta^{(b)}(\lambda) + t\eta^{(a)}(\lambda),$$

$$r_t(\lambda) = 1/(\lambda + \lambda\eta_t(\lambda)1), \qquad (0 \leqslant t < +\infty).$$

由分解定理知 $R_t(\lambda)$ 是诚实 Q 过程，而由(5.3.84)知

$$\eta^{(a)}(\lambda) \neq 0,$$

于是

$$R_t(\lambda) \neq R_s(\lambda), \qquad (t \neq s).$$

即诚实 Q 过程有无穷多个. 到此定理全部证完.

§4 补充与注记

D. Williams 于 1976 年给出了本章中的定理 5.1.1(见 Williams[3])，因此，解决了全瞬时态 Q 过程的存在性问题，并且给出的条件非常简炼. 但是，Williams[3] 中给出的证明属于概率方法，且有些地方用了概率直观. 本章给出的分析证明取材于侯振挺、费志凌[1]，其中引理 5.3.2 的分析证明属于邹捷中.

6 有限稳定态无限瞬时态Q过程的存在性

§1 结果的陈述

在第五章中，我们给出了全瞬时态 Q 过程和诚实 Q 过程的存在性准则. 本章利用第五章的结果，给出有限稳定无限瞬时 Q 过程和诚实 Q 过程的下述存在性准则.

定理 6.1.1 设 $Q=(q_{ij};i,j\in E)$ 是含有限个稳定态无限个瞬时态的拟 $Q-$ 矩阵，那么存在 Q 过程的充要条件是下列 (N)、(S) 条件同时成立：

(N) $\quad \sum\limits_{j\in E-\{a,b\}} q_{aj}\wedge q_{bj}<+\infty, \qquad (\forall\, a,b\in E, a\neq b)$,

(S) 存在 E 的无穷子集 K，使得

$$\sum_{j\in K-\{i\}} q_{ij}<+\infty, \qquad (\forall\, i\in E).$$

当以上条件满足时，还存在无穷多个诚实 Q 过程.

下面来给出上述定理的证明.

§2 定理 6.1.1 的证明

定理 6.2.1 设 Q 是带有限个稳定态无限个瞬时态的拟 $Q-$ 矩阵，那么存在 Q 过程的充要条件是 Q 同时满足 (N)、(S) 条件.

证明 必要性 设 $\Psi(\lambda)$ 是 Q 过程，记 $E_1=\{i:q_i<+\infty\}$，$E_2=E-E_1$，$Q_{E_2}=(q_{ij};i,j\in E_2)$，即 Q_{E_2} 是 Q 在 E_2 上的限制.

由 E_1 为有限集及有限维分解定理知，${}_{E_1}\Psi(\lambda)$ 是 Q_{E_2} 过程，但

Q_{E_2} 是全瞬时态的，由第五章的结果可知 Q_{E_2} 满足(N)、(S) 条件.

由于 E_1 为有限集且 E_1 中状态均为稳定态，故立得 Q 也满足(N)、(S) 条件.

充分性　设 Q 满足(N)、(S) 条件，往证 Q 是 Q — 矩阵.

先考虑 Q 为单稳定状态情况，不失一般性可设 $E_1=\{b\}$，$E_2=\{1,2,\cdots\}$，Q 形如

$$Q=\begin{pmatrix} -q_b & q_{b1} & q_{b2} & \cdots \\ q_{1b} & & & \\ q_{2b} & & Q_{E_2} & \\ \cdots & & & \\ & & & \end{pmatrix}.$$

其中 $q_b<+\infty$，而 Q_{E_2} 是全瞬时态 Q — 矩阵. 现令

$$\widetilde{Q}=\begin{pmatrix} -\infty & q_{b1} & q_{b2} & \cdots \\ q_{1b} & & & \\ q_{2b} & & Q_{E_2} & \\ \cdots & & & \\ & & & \end{pmatrix}.$$

由于 Q 满足(N)、(S) 条件，易知 $\widetilde{Q}$ 亦满足(N)、(S) 条件. 但 $\widetilde{Q}$ 是全瞬时态拟 Q — 矩阵，由第五章的结果知，存在 $\widetilde{Q}$ 过程 $\widetilde{R}(\lambda)$.

对 $\widetilde{R}(\lambda)$ 关于禁止状态 b，使用分解定理得

$$\widetilde{R}(\lambda)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & {}_b\widetilde{R}(\lambda) \end{pmatrix}+\tilde{r}_{bb}(\lambda)\begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{\xi}(\lambda) \end{pmatrix}(1,\tilde{\eta}(\lambda)).$$

其中，${}_b\widetilde{R}(\lambda)$ 为 Q_{E_2} 过程，

$$\tilde{\eta}(\lambda)\in L_{{}_b\widetilde{R}(\lambda)},\tilde{\xi}(\lambda)\in M_{{}_b\widetilde{R}(\lambda)},$$

$$\tilde{r}_{bb}(\lambda)=\frac{1}{\widetilde{C}+\lambda+\lambda[\tilde{\eta}(\lambda),\tilde{\xi}]},$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\tilde{\xi}(\lambda)=0,\quad \lim_{\lambda\to\infty}\tilde{\eta}(\lambda)=0,$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\tilde{\xi}(\lambda)=\beta,\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\tilde{\eta}(\lambda)=\alpha.$$

这里 $\tilde{\xi} = \lim\limits_{\lambda \to 0} \xi(\lambda), \tilde{C} \geqslant \lim\limits_{\lambda \to \infty} \lambda[\tilde{\eta}(\lambda), 1 - \tilde{\xi}]$ 为常数,

$$\alpha = (q_{b1}, q_{b2}, \cdots), \quad \beta = (q_{1b}, q_{2b}, \cdots)^T.$$

令

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}_b\tilde{R}(\lambda) \end{pmatrix} + r_{bb}(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{\xi}(\lambda) \end{pmatrix} (1, \alpha_b \tilde{R}(\lambda)).$$

其中

$$r_{bb}(\lambda) = \frac{1}{C + \lambda + \lambda[\alpha_b \tilde{R}(\lambda), \tilde{\xi}]},$$

$$C = q_b - \lim_{\lambda \to \infty} \lambda[\alpha_b \tilde{R}(\lambda), \tilde{\xi}] \text{ 为常数.}$$

由分解定理知 $R(\lambda)$ 是 Q 过程. 从而 Q 是 $Q-$ 矩阵.

至此,当 Q 为单稳定态时,条件的充分性已成立.

至于 Q 为一般有限稳定时,可对稳定态集 E_1 的基数行归纳法.

当 $|E_1| = 1$ 时,已证成立. 现设 $|E_1| = n - 1$ 时成立,往证 $|E_1| = n$ 时亦成立.

任取 $b \in E_1$,按上面证明单稳定态的办法,将 b 转化为瞬时态,易知对原给的 Q 若满足 (N)、(S) 条件,则这样改变后的 $\tilde{Q}$ 亦满足 (N)、(S) 条件. 但对 $\tilde{Q}$ 而言,稳定态个数已为 $n-1$,从而由归纳假设,存在 $\tilde{Q}$ 过程.

注意到在单稳定态证明过程中,我们其实并未用到 $\tilde{Q}$ 的具体性质,仅仅要求 $\tilde{Q}$ 过程存在而已. 故现在仿照单稳定态情况的证明就可得,当 $|E_1| = n$ 时,也存在过程.

由归纳原理,充分性得证.

定理 6.2.2 设 Q 是带有限个稳定态无限个瞬时态的 $Q-$ 矩阵,那么存在无穷多个诚实 Q 过程.

证明 由于 Q 是 $Q-$ 矩阵,由定理 6.2.1,Q 满足 (N)、(S) 条件,不妨设无穷子集 K 是 (S) 条件中的一个安全因子,即 $\forall\, i \in E$ 有

$$\sum_{j \in K - \{i\}} q_{ij} < +\infty.$$

将 K 排序为 $K = \{k_1, k_2, k_3, \cdots\}$. 取一列正实数 $\{a_{k_{2l}}\}_{l=1}^{\infty}$ 使得

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_{k_{2l}} = +\infty.$$

令

$$\widetilde{E} = E \cup \{b\}, \widetilde{Q} = (\tilde{q}_{ij}; i, j \in \widetilde{E}),$$

其中

$$\tilde{q}_{ij} = \begin{cases} q_{ij}, & i, j \in E; \\ -\infty, & i = j = b; \\ a_{k_{2l}}, & i = b, j = k_{2l}; \\ 0, & \text{其它 } i, j. \end{cases}$$

易知 $\widetilde{Q}$ 是 $\widetilde{E} \times \widetilde{E}$ 上拟 Q－矩阵，含有限个稳定态无限个瞬时态，且 $\widetilde{Q}_E = Q$.

$\forall\, i, j \in \widetilde{E}, i \neq j$；若 $i \neq b, j \neq b$，则

$$\sum_{k \in \widetilde{E} - \{i, j\}} \tilde{q}_{ik} \wedge \tilde{q}_{jk} = \sum_{k \in E - \{i, j\}} q_{ik} \wedge q_{jk} < +\infty.$$

若 i, j 中有一个为 b，不妨设 $i = b$，则

$$\sum_{k \in \widetilde{E} - \{b, j\}} \tilde{q}_{bk} \wedge \tilde{q}_{jk} \leqslant \sum_{k \in K - \{j\}} q_{jk} < +\infty.$$

故 $\widetilde{Q}$ 满足 (N) 条件. 令 $\widetilde{K} = \{k_1, k_3, k_5, \cdots, k_{2l+1}, \cdots\}$，那么 $\forall\, i \in \widetilde{E}$，若 $i \neq b$，则

$$\sum_{j \in \widetilde{K} - \{i\}} \tilde{q}_{ij} \leqslant \sum_{j \in K - \{i\}} q_{ij} < +\infty.$$

若 $i = b$，则

$$\sum_{j \in \widetilde{K} - \{b\}} \tilde{q}_{bj} = 0.$$

故 $\widetilde{Q}$ 也满足 (S) 条件.

由定理 6.2.1 知，存在 $\widetilde{Q}$ 过程 $\widetilde{R}(\lambda)$，对 $\widetilde{R}(\lambda)$ 关于禁止状态 b，使用分解定理得

$$\widetilde{R}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}_b\widetilde{R}(\lambda) \end{pmatrix} + \tilde{r}_{bb}(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{\xi}(\lambda) \end{pmatrix} (1, \tilde{\eta}(\lambda)).$$

其中 ${}_b\widetilde{R}(\lambda)$ 是 Q 过程，$\tilde{\eta}(\lambda)\mathbf{1} < +\infty$，$\tilde{\eta}(\lambda) \geqslant a_b\widetilde{R}(\lambda)$，这里 $a = (a_i, i \in E)$ 是行向量，满足

$$a_i=\begin{cases}a_{k_{2l}}, & i=k_{2l}(l=1,2,\cdots);\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$$

由 $\sum_{l=1}^{\infty}a_{k_{2l}}=+\infty$ 可知 $\alpha 1=+\infty$；

由 $\alpha 1=+\infty$ 及 $\alpha_b\widetilde{R}(\lambda)1\leqslant\widetilde{\eta}(\lambda)1<+\infty$ 得

$$\inf_{i\in B}\sum_{j\in B}{}_b\widetilde{r}_{ij}(\lambda)=0.$$

从而可取 E 上非负行向量 β 使得

$$\beta 1=+\infty,\beta_b\widetilde{R}(\lambda)1<+\infty.$$

并且这种 β 的取法有无穷多种.

对于上述取定的 β，令

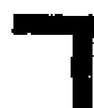
$$R^\beta(\lambda)={}_b\widetilde{R}(\lambda)+(1-\lambda_b\widetilde{R}(\lambda)1)\frac{\beta_b\widetilde{R}(\lambda)}{\lambda\beta_b\widetilde{R}(\lambda)1},$$

那么 $R^\beta(\lambda)$ 是诚实 Q 过程，当 β 取不同时(非倍数)，$R^\beta(\lambda)$ 也不同，从而证明了存在无穷多个诚实 Q 过程.

由定理 6.2.1 和定理 6.2.2 知定理 6.1.1 成立.

§3 补充与注记

在全瞬时态 Q 过程的存在性准则基础之上，陈安岳解决了含有限个稳定态无限个瞬时态 Q 过程的存在性问题. 本章取自于陈安岳[4].



有限瞬时态Q过程的存在性

前面三章(第四、五、六章)分别讨论了全稳定态,全瞬时态以及有限稳定态等三种情况下Q过程的存在性问题,分别得到了存在性准则.本章以及第八章分别讨论有限瞬时态情况和带无限个瞬时态及无限个稳定态(简称"双无限")情况下Q过程的存在性问题.

目前,对于有限瞬时态和"双无限"Q过程的存在性问题的研究不像全稳定态,全瞬时态以及有限稳定态三种情况那样有了完整的结果,我们仅仅得到了一些充分性条件和必要性条件,或者在一些特殊情况下得到了Q过程或诚实Q过程存在性准则.

在有限瞬时态Q过程存在性的研究中,单瞬时态占有重要的地位.本章§1专门讨论单瞬时态Q过程的存在性.§2讨论多瞬时态Q过程的存在性.

§1　单瞬时态Q过程的存在性

在本节,若无特别声明,恒设$Q=(q_{ij};i,j\in E)$为单瞬时态拟Q－矩阵,b为瞬时态.记

$$E_b=E-\{b\},\quad Q_b=(q_{ij};i,j\in E_b).$$

$$e=(q_{bj};j\in E_b),\quad m=(q_{ib};i\in E_b)^T.$$

$$d_i=q_i-\sum_{j\neq i}q_{ij},\quad (i\in E_b),\quad d=(d_i;i\in E_b)^T.$$

$$\tilde{d}_i=q_i-\sum_{j\neq i,b}q_{ij},\quad (i\in E_b),\quad \tilde{d}=(\tilde{d}_i;i\in E_b)^T.$$

显然,Q_b是全稳定拟Q－矩阵,由第四章全稳定Q过程存在定理,Q_b是Q－矩阵,用$\Phi(\lambda)=(\varphi_{ij}(\lambda))$表示最小$Q_b$过程.

定义 7.1.1 设 Q 是单瞬时态拟 Q — 矩阵,若

$$e\mathbf{1} = \sum_{j \neq b} q_{bj} < +\infty,$$

则称 Q 可和,否则称 Q 不可和. 若对一切 $i \in E_b, q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}$,则称 Q 是准保守的.

下面先给出 Q 过程存在的两个必要条件.

定理 7.1.1 若 Q 是 Q — 矩阵,则 $e\Phi(\lambda) \in L_{E_b}$,即

$$\sum_{i \in E_b} \sum_{j \in E_b} q_{bj} \varphi_{ji}(\lambda) < +\infty, \quad (\lambda > 0). \qquad (7.1.1)$$

证明 因 Q 是 Q — 矩阵,故存在 Q 过程 $R(\lambda)$,对 $R(\lambda)$ 禁止瞬时态 b,由分解定理得

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & {}_bR(\lambda) \end{pmatrix} + r_{bb}(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ \xi(\lambda) \end{pmatrix} (1, \eta(\lambda)).$$

其中${}_bR(\lambda)$ 是 Q_b 过程,$\eta(\lambda) \in L_{{}_bR(\lambda)}$, $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda \eta(\lambda) = e$.

由行协调族性质及 Fatou 引理易得

$$\eta(\lambda) \geqslant e_b R(\lambda), \quad (\lambda > 0). \qquad (7.1.2)$$

由 $\eta(\lambda)\mathbf{1} < +\infty$、${}_bR(\lambda) \geqslant \Phi(\lambda)$ 及(7.1.2) 可得

$$e\Phi(\lambda)\mathbf{1} \leqslant \eta(\lambda)\mathbf{1} < +\infty, \quad (\lambda > 0),$$

即 $e\Phi(\lambda) \in L_{E_b}$.

推论 7.1.1 设 Q 是不可和的 Q — 矩阵,则必有

$$\sum_{j \in E_b} \frac{q_{bj}}{\lambda + q_j} < +\infty, \quad (\lambda > 0). \qquad (7.1.3)$$

证明 由定理 7.1.1 立得.

定理 7.1.2 若 Q 是 Q — 矩阵,则关于 Q_b,(H) 条件不成立,即

$$\inf_{i \in E_b} \lambda \sum_{j \in E_b} \varphi_{ij}(\lambda) = 0, \quad (\lambda > 0). \qquad (7.1.4)$$

证明 设 $R(\lambda)$ 是一个 Q 过程,对 $R(\lambda)$ 关于 b 使用分解定理有

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & {}_bR(\lambda) \end{pmatrix} + r_{bb}(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ \xi(\lambda) \end{pmatrix} (1, \eta(\lambda)), \quad (\lambda > 0),$$

其中${}_bR(\lambda)$ 是 Q_b 过程，$\eta(\lambda)\in L_{{}_bR(\lambda)}$，$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda\eta(\lambda)1=+\infty$.

由于${}_bR(\lambda)\geqslant\Phi(\lambda)$，我们若能证明$\inf\limits_{i\in E_b}\lambda\sum\limits_{j\in E_b}{}_br_{ij}(\lambda)=0$，$(\lambda>0)$，则(7.1.4) 成立. 反设不真，则对某 $\lambda>0$，从而对一切 $\lambda>0$，$\inf\limits_{i\in E_b}\lambda\sum\limits_{j\in E_b}{}_br_{ij}(\lambda)=h_\lambda>0$. 由于 $\eta(\lambda)\in L_{{}_bR(\lambda)}$，从而

$$\eta(\lambda)1-\eta(\mu)1=(\mu-\lambda)\eta(\lambda){}_bR(\mu)1,$$

$$\eta(\mu)1-\eta(\lambda)1=\frac{\lambda-\mu}{\lambda}\lambda\eta(\lambda){}_bR(\mu)1$$

$$\geqslant\frac{\lambda-\mu}{\lambda}h_\mu\frac{1}{\mu}(\lambda\eta(\lambda)1),\quad(\lambda>\mu).$$

在上式中令 $\lambda\to+\infty$，注意$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\eta(\lambda)1=0$(见第三章 §1)，得

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\eta(\lambda)1\leqslant\frac{\mu}{h_\mu}\eta(\mu)1<-\infty.$$

这与 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda\eta(\lambda)1=+\infty$ 矛盾！从而定理得证.

推论 7.1.2 若 Q 是 $Q-$ 矩阵，则 Q_b 过程不唯一.

证明 由(7.1.4) 可取非负行向量 $\alpha=(\alpha_i,i\in E_b)$ 使得

$$\sum_{i\in E_b}\alpha_i=+\infty,$$

$$\sum_{i\in E_b}\sum_{j\in E_b}\alpha_i\varphi_{ij}(\lambda_0)<+\infty\quad,(\text{对某个 }\lambda_0>0).\qquad(7.1.5)$$

由 $\Phi(\lambda)$ 的 $K-C$ 方程可知，对一切 $\lambda>0$.

$$\alpha\Phi(\lambda)-\alpha\Phi(\lambda_0)=(\lambda_0-\lambda)\alpha\Phi(\lambda_0)\Phi(\lambda).\qquad(7.1.6)$$

由(7.1.5) 及(7.1.6) 可得

$$\alpha\Phi(\lambda)1=\sum_{i\in E_b}\sum_{j\in E_b}\alpha_i\varphi_{ij}(\lambda)<+\infty,\quad(\lambda>0).$$

令

$$\Psi(\lambda)=\Phi(\lambda)+(1-\lambda\Phi(\lambda)1)\frac{\alpha\Phi(\lambda)}{\lambda\alpha\Phi(\lambda)1}.$$

由定理3.5.2知，$\Psi(\lambda)$ 是一个不同于 $\Phi(\lambda)$ 的 Q_b 过程，从而 Q_b 过程不唯一.

推论 7.1.3 若 Q_b 有界，即$\sup\limits_{i\in E_b}q_i<+\infty$，则 Q 必不是 $Q-$ 矩

阵.

证明 由第四章最小过程的定义知，$\forall\ i \in E_b$，

$$\varphi_{ii}(\lambda) \geqslant \frac{1}{\lambda + q_i}.$$

若$\sup\limits_{i\in E_b} q_i < +\infty$，那么$\inf\limits_{i\in E_b}\sum\limits_{j\in E_b}\varphi_{ij}(\lambda) \geqslant \inf\limits_{i\in E_b}\frac{1}{\lambda + q_i} > 0$. 故(7.1.4)不成立，由定理 7.1.2，$Q$ 不是 Q — 矩阵.

下面在一些限制条件下来讨论 Q 过程或诚实 Q 过程的存在性.

当 Q 不可和且准保守时，定理 7.1.1 中给出的条件事实上也是存在 Q 过程和诚实 Q 过程的充分条件. 这可从以下定理得出.

定理 7.1.3 设 Q 是不可和拟 Q — 矩阵，且$\sup\limits_{i\in E_b} d_i < +\infty$，则 Q 是 Q — 矩阵当且仅当

$$\sum_{i\in E_b}\sum_{j\in E_b} q_{bj}\varphi_{ji}(\lambda) < +\infty, \quad (\lambda > 0). \tag{7.1.7}$$

当以上条件满足且 Q 准保守时，还存在诚实 Q 过程.

证明 必要性由定理 7.1.1 立得. 以下证明充分性.

令

$$\xi(\lambda) = 1 - \lambda\Phi(\lambda)1 - \Phi(\lambda)d, \quad \eta(\lambda) = e\Phi(\lambda).$$

由条件(7.1.7)知 $\eta(\lambda) \in L_{E_b}$，从而由第三章 §1 可得，$\eta(\lambda) \in L_{\Phi(\lambda)}$，而由 Q 不可和得

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\eta(\lambda)1 = e1 = +\infty.$$

由 $d \leqslant \tilde{d}$ 得，$0 \leqslant \xi(\lambda) \leqslant 1$，故 $\xi(\lambda) \in M_{\Phi(\lambda)}$. 注意到 $m = \tilde{d} - d$，有

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\xi(\lambda) = m.$$

以下证明

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\eta(\lambda)(1 - \xi) < +\infty,$$

其中 $\xi = \lim\limits_{\mu\to 0}\xi(\mu)$.

由定义

$$\lambda\eta(\lambda)(1 - \xi) = \lambda[\eta(\lambda), 1 - \lim_{\mu\to 0}(\mu\Phi(\mu)1)] +$$

$$+\lambda[\eta(\lambda),\lim_{\mu\to 0}(\Phi(\mu)d)]. \tag{7.1.8}$$

由单调收敛定理

$$\begin{aligned}\lambda[\eta(\lambda),\lim_{\mu\to 0}(\Phi(\mu)d)] &= \lim_{\mu\to 0}\lambda\eta(\lambda)\Phi(\mu)d \\ &= \lim_{\mu\to 0}\frac{\lambda}{\mu-\lambda}(\eta(\lambda)-\eta(\mu))d \\ &= \lim_{\mu\to 0}(\eta(\mu)d)-\eta(\lambda)d, \end{aligned}\tag{7.1.9}$$

其中上式最后一个等号利用了$\sup\limits_{i\in E_b}d_i<+\infty$.

由(7.1.9)式及$\Phi(\mu)d\leqslant 1$得

$$\lim_{\mu\to 0}(\eta(\mu)d)<+\infty.$$

再由(7.1.9)式得

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta(\lambda),\lim_{\mu\to 0}(\Phi(\mu)d)] = \lim_{\mu\to 0}(\eta(\mu)d)<+\infty.$$

又由命题 4.2.2 知,

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta(\lambda),\mathbf{1}-\lim_{\mu\to 0}(\mu\Phi(\mu)\mathbf{1})]<+\infty.$$

在(7.1.8)中让$\lambda\to+\infty$可得

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\eta(\lambda)(\mathbf{1}-\xi)<+\infty. \tag{7.1.10}$$

令

$$R(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \Phi(\lambda)\end{pmatrix}+r_{bb}(\lambda)\begin{pmatrix}1\\ \xi(\lambda)\end{pmatrix}(1,\eta(\lambda)).$$

其中$r_{bb}(\lambda)=(\lambda+\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda\eta(\lambda)(\mathbf{1}-\xi)+\lambda\eta(\lambda)\xi)^{-1}$.

由分解定理可知$R(\lambda)$是Q过程,从而Q是$Q-$矩阵.

若还有Q准保守,则$d=0$.从而$\xi(\lambda)=\mathbf{1}-\lambda\Phi(\lambda)\mathbf{1}$.故$r_{bb}(\lambda)=(\lambda+\lambda\eta(\lambda)\mathbf{1})^{-1}$,因此,$R(\lambda)$是诚实$Q$过程.

以下是当Q可和时存在Q过程的一个充分条件.

定理 7.1.4 设Q为可和拟$Q-$矩阵,且$\sup\limits_{i\in E_b}d_i<+\infty$,若方程

$$\begin{cases}V(\lambda)(\lambda I-Q_b)=\mathbf{0},\\ \mathbf{0}\leqslant V(\lambda)\in L_{E_b},\end{cases}\quad(\lambda>0) \tag{7.1.11}$$

有满足条件 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda\sum\limits_{j\in E_b}v_j(\lambda)=+\infty$ 的解 $V(\lambda)\in L_{\Phi(\lambda)}$，则 Q 为 $Q-$ 矩阵；若还有 Q 准保守，则存在诚实 Q 过程.

证明 令

$$\xi(\lambda)=\mathbf{1}-\lambda\Phi(\lambda)\mathbf{1}-\Phi(\lambda)d,\quad \eta(\lambda)=e\Phi(\lambda)-V(\lambda),$$

其中 $V(\lambda)$ 取成定理条件所保证的那个方程(7.1.11)的解. 同定理 7.1.3 证明中相同，可证 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda\eta(\lambda)(1-\xi)<+\infty$.

令

$$R(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \Phi(\lambda)\end{pmatrix}+r_{bb}(\lambda)\begin{pmatrix}1\\ \xi(\lambda)\end{pmatrix}(1,\eta(\lambda)).$$

其中 $r_{bb}(\lambda)=(\lambda+\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda\eta(\lambda)(\mathbf{1}-\xi)+\lambda\eta(\lambda)\xi)^{-1}$. 由分解定理，$R(\lambda)$ 是 Q 过程，其瞬时态条件由 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda V(\lambda)\mathbf{1}=+\infty$ 所保证. 因此 Q 是 $Q-$ 矩阵.

若还有 Q 准保守，则 $d=0$，$\xi(\lambda)=\mathbf{1}-\lambda\Phi(\lambda)\mathbf{1}$. 故 $r_{bb}(\lambda)=(\lambda+\lambda\eta(\lambda)\mathbf{1})^{-1}$ 因此，$R(\lambda)$ 是诚实 Q 过程.

在某些情况下，定理 7.1.4 的条件也是必要的.

定理 7.1.5 设 Q 是可和准保守拟 $Q-$ 矩阵，且 B 型 Q_b 过程唯一，则 Q 是 $Q-$ 矩阵当且仅当方程

$$\begin{cases}V(\lambda)(\lambda I-Q_b)=\mathbf{0},\\ \mathbf{0}\leqslant V(\lambda)\in L_{E_b}.\end{cases}\quad(\lambda>0)\tag{7.1.12}$$

有满足条件 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda\sum\limits_{j\in E_b}v_j(\lambda)=+\infty$ 的解 $V(\lambda)\in L_{\Phi(\lambda)}$. 当条件满足时还存在诚实 Q 过程.

证明 由准保守可得 $d=0$，由定理 7.1.4 可知充分性成立. 以下证明必要性.

设 Q 是 $Q-$ 矩阵，$R(\lambda)$ 是 Q 过程. 注意 Q 准保守，由分解定理易证 ${}_bR(\lambda)$ 是 B 型 Q_b 过程.

由定理条件得 ${}_bR(\lambda)$ 是最小 Q_b 过程 $\Phi(\lambda)$，从而由分解定理得

$$R(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \Phi(\lambda)\end{pmatrix}+r_{bb}(\lambda)\begin{pmatrix}1\\ \xi(\lambda)\end{pmatrix}(1,e\Phi(\lambda)+\bar{\eta}(\lambda)).$$

其中 $\bar{\eta}(\lambda) \in L_{\Phi(\lambda)}$，且 $\bar{\eta}(\lambda)$ 是方程(7.1.12)的解，$\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda(e\Phi(\lambda) + \bar{\eta}(\lambda))\mathbf{1} = +\infty$. 由 Q 可和得 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda e\Phi(\lambda)\mathbf{1} = e\mathbf{1} < +\infty$，故

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\bar{\eta}(\lambda)\mathbf{1} = +\infty .$$

从而必要性得证.

在本节的最后来讨论所谓最小生成类的构造.

定义 7.1.2 设 Q 是 $Q-$ 矩阵，$\Psi(\lambda)$ 是 Q_b 过程；称 Q 过程类

$$P_{\Psi(\lambda)}(Q) = \{R(\lambda); R(\lambda) \text{ 是 } Q \text{ 过程且}_b R(\lambda) = \Psi(\lambda)\}$$

为 $\Psi(\lambda)$ 生成类，其中$_bR(\lambda)$ 表示 $R(\lambda)$ 禁 b 所得的 Q_b 过程；特别，当 $\Psi(\lambda)$ 是最小 Q_b 过程 $\Phi(\lambda)$ 时，称 $P_{\Phi(\lambda)}(Q)$ 为最小生成类.

本节的最后任务就是要给出最小生成类非空的充要条件及全部构造.

为此，引入下列记号. $\forall\ \lambda > 0$，令

$$\mu_\lambda^+(\mathbf{1}) = \{\mu(\lambda); (\lambda I - Q_b)\mu(\lambda) = \mathbf{0}, \mathbf{0} \leqslant \mu(\lambda) \leqslant \mathbf{1}\}.$$

用 $\bar{X}(\lambda)$ 表示 $\mu_\lambda^+(\mathbf{1})$ 的最大元.

$$L_\lambda^+ = \{V(\lambda); V(\lambda)(\lambda I - Q_b) = \mathbf{0}, \mathbf{0} \leqslant V(\lambda) \in L_{E_b}\};$$

$$H = \{i \in E_b, d_i > 0\}, \quad \tilde{H} = \{i \in E_b, \tilde{d}_i > 0\} .$$

定理 7.1.6 设 Q 是不可和拟 $Q-$ 矩阵，则最小生成类 $P_{\Phi(\lambda)}(Q)$ 非空的充要条件为

$$\sum_{j\in E_b}\sum_{k\in E_b} q_{bk}(\lambda + d_j)\varphi_{kj}(\lambda) < +\infty, \quad (\lambda > 0). \quad (7.1.13)$$

证明 若 $P_{\Phi(\lambda)}(Q)$ 非空，则存在 Q 过程 $R(\lambda) \in P_{\Phi(\lambda)}(Q)$，由定理 7.1.1

$$\sum_{j\in E_b}\sum_{k\in E_b} q_{bk}\lambda\varphi_{kj}(\lambda) < +\infty, \quad (\lambda > 0). \qquad (7.1.14)$$

对 $R(\lambda)$ 关于 b 使用分解，由引理 3.1.7 知

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi(\lambda) \end{pmatrix} + r_{bb}(\lambda)\begin{pmatrix} 1 \\ \xi(\lambda) \end{pmatrix}(1, \eta(\lambda)) ,$$

此处

$$\xi(\lambda) = \Phi(\lambda)m + \bar{\xi}(\lambda), \quad \eta(\lambda) = e\Phi(\lambda) + \bar{\eta}(\lambda),$$

$$\bar{\xi}(\lambda) \in M_{\Phi(\lambda)} \cap \mu_{\lambda}^{+}(1), \quad \bar{\eta}(\lambda) \in L_{\Phi(\lambda)} \cap L_{\lambda}^{+}.$$

反设(7.1.13) 不成立，由(7.1.14) 可知，必存在 $\lambda_0 > 0$，使

$$\sum_{j \in E_b} \sum_{k \in E_b} q_{bk} d_j \varphi_{kj}(\lambda_0) = +\infty .$$

由单调收敛定理得

$$\sum_{j \in E_b} \sum_{k \in E_b} q_{bk} d_j \Gamma_{kj} = +\infty , \tag{7.1.15}$$

其中 $\Gamma_{kj} = \lim\limits_{\mu \to 0} \varphi_{kj}(\mu)$.

由 $\xi(\lambda) = \Phi(\lambda)m + \bar{\xi}(\lambda)$ 得

$$\xi(\lambda) \leqslant \Phi(\lambda)m + \bar{X}(\lambda) .$$

记 $\bar{X} = \lim\limits_{\mu \to 0} \bar{X}(\mu)$. 在上式中让 $\lambda \downarrow 0$，得

$$\xi_k \leqslant \sum_{j \in E_b} \Gamma_{kj} q_{jb} + \bar{X}_k, \quad (\forall\ k \in E_b).$$

但由引理 4.2.5 知

$$\bar{X}_k + X_k^0 + \sum_{j \in E_b} \Gamma_{kj} \tilde{d}_j = 1, \quad (\forall\ k \in E_b).$$

注意到 $\tilde{d}_j = d_j - q_{jb}$，立得

$$1 - \xi_k \geqslant \sum_{j \in E_b} \Gamma_{kj} d_j. \tag{7.1.16}$$

由分解定理知，存在与 λ 无关的常数 C，使

$$C \geqslant \lambda \eta(\lambda)(1 - \xi), \quad (\lambda > 0).$$

由 Fatou 引理得

$$\sum_{k \in E_b} q_{bk}(1 - \xi_k) \leqslant C < +\infty.$$

注意到(7.1.16) 式，更有

$$\sum_{k \in E_b} q_{bk} \sum_{j \in E_b} \Gamma_{kj} d_j < +\infty.$$

这与(7.1.15) 式矛盾，所得矛盾证明了(7.1.13) 式正确，必要性得证.

反之，若(7.1.13) 式成立，令

$$\eta_{bj}(\lambda) = \sum_{k \in E_b} q_{bk} \varphi_{kj}(\lambda), \quad (j \in E_b) ,$$

$$\xi_{ib}(\lambda) = 1 - \sum_{k \in E_b} (\lambda + d_k) \varphi_{ik}(\lambda), \quad (i \in E_b),$$

$$r_{bb}(\lambda) = (\lambda + \sum_{k \in E_b} (\lambda + d_k) \eta_{bk}(\lambda))^{-1},$$

$$r_{ib}(\lambda) = \xi_{ib}(\lambda) r_{bb}(\lambda), \quad (i \in E_b),$$

$$r_{bj}(\lambda) = r_{bb}(\lambda) \eta_{bj}(\lambda), \quad (j \in E_b),$$

$$r_{ij}(\lambda) = \varphi_{ij}(\lambda) + \xi_{ib}(\lambda) r_{bb}(\lambda) \eta_{bj}(\lambda), \quad (i, j \in E_b).$$

由条件(7.1.13),上述定义合理.令

$$R(\lambda) = (r_{ij}(\lambda); i, j \in E).$$

直接验证可知$R(\lambda)$是Q过程,由分解定理可知$R(\lambda) \in P_{\Phi(\lambda)}(Q)$.充分性得证.定理证毕.

推论 7.1.4 设Q是不可和准保守拟Q—矩阵,则$P_{\Phi(\lambda)}(Q)$非空的充要条件是

$$\sum_{j \in E_b} \sum_{k \in E_b} q_{bk} \varphi_{kj}(\lambda) < +\infty, \quad (\lambda > 0).$$

证明 由定理 7.1.6 立得.

定理 7.1.7 设Q是不可和Q—矩阵,满足$P_{\Phi(\lambda)}(Q)$非空的条件,任取$\bar{\xi}(\lambda) \in M_{\Phi(\lambda)} \cap \mu_\lambda^+(1)$,$\bar{\eta}(\lambda) \in L_{\Phi(\lambda)} \cap L_\lambda^+$使得

$$[e, \bar{X} + \sum_{a \in H} \Gamma_{\cdot a} d_a - \bar{\xi}] < +\infty, \tag{7.1.17}$$

$$W_\lambda = \lambda[\bar{\eta}(\lambda), \bar{X} + \sum_{a \in H} \Gamma_{\cdot a} da - \bar{\xi}] \uparrow W < +\infty, \tag{7.1.18}$$

取常数C使

$$C \geqslant [e, X^0] + \bar{\sigma}^0 + [e, \bar{X} + \sum_{a \in H} \Gamma_{\cdot a} d_a - \bar{\xi}] + W, \tag{7.1.19}$$

其中$H = \{i \in E_b, d_i > 0\}$,$\bar{X} = \lim\limits_{\mu \to 0} \bar{X}(\mu)$,$X^0$见引理 4.2.5,而$\bar{\sigma}^0 = \lambda[\bar{\eta}(\lambda), X^0] < +\infty$是与$\lambda$无关的常数(见命题 4.2.2).令

$$\eta(\lambda) = e\Phi(\lambda) + \bar{\eta}(\lambda), \tag{7.1.20}$$

$$\xi(\lambda) = \Phi(\lambda) m + \bar{\xi}(\lambda), \tag{7.1.21}$$

$$r_{bb}(\lambda) = (C + \lambda + \lambda \eta(\lambda) \xi)^{-1}. \tag{7.1.22}$$

再令

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Phi(\lambda) \end{pmatrix} + r_{bb}(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ \xi(\lambda) \end{pmatrix} (1, \eta(\lambda)). \tag{7.1.23}$$

则 $R(\lambda) \in P_{\Phi(\lambda)}(Q)$，且 $P_{\Phi(\lambda)}(Q)$ 中每一元均可如此得到.

证明 注意 $P_{\Phi(\lambda)}(Q)$ 非空，任取 $R(\lambda) \in P_{\Phi(\lambda)}(Q)$，则由分解定理及引理 3.1.7 − 8 可知(7.1.20) ~ (7.1.23) 成立，且(7.1.22)中的常数 C 满足

$$C \geqslant \lambda\eta(\lambda)(1 - \xi) = \lambda[e\Phi(\lambda), 1 - \xi] + \lambda[\bar{\eta}(\lambda), 1 - \xi].$$

由(7.1.21)， $1 - \xi = 1 - \Gamma m - \bar{\xi}$，从而

$$\lambda[e\Phi(\lambda), 1 - \xi] \uparrow [e, X^0 + \sum_{a \in \tilde{H}} \tilde{X}^a + \bar{X} - \bar{\xi} - \Gamma m] \quad (\lambda \uparrow +\infty)$$

$$\lambda[\bar{\eta}(\lambda), 1 - \xi] \uparrow \bar{\sigma}^0 + W \quad (\lambda \uparrow +\infty),$$

这里 $\tilde{H} = (i \in E_b; \tilde{d}_i > 0)$，$\tilde{X}^a_i = \Gamma_{ia}\tilde{d}_a$， $(i \in E_b)$.

再注意 $\tilde{d}_i - d_i = q_{ib} = m_i \quad (i \in E_b)$ 可得(7.1.17)、(7.1.18)和(7.1.19)均成立. 必要性证毕. 由分解定理可得充分性成立. 定理证毕.

定理 7.1.8 设 Q 是不可和拟 Q－矩阵，则 $P_{\Phi(\lambda)}(Q)$ 非空且含有诚实过程的充要条件是以下两条同时成立：

(i) Q 准保守；

(ii) $\sum_{j \in E_b}\sum_{k \in E_b} q_{bk}\varphi_{kj}(\lambda) < +\infty, \quad (\lambda > 0).$

进一步，$P_{\Phi(\lambda)}(Q)$ 中诚实过程唯一的充要条件是 Q_b 零流入，即 $L_\lambda^+ = \{0\}$.

证明 先证必要性，设 $R(\lambda) \in P_{\Phi(\lambda)}(Q)$ 是一个诚实 Q 过程. 由定理 7.1.1 知(ii) 必成立. 其次，对 $R(\lambda)$ 禁止状态 b 分解得

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Phi(\lambda) \end{pmatrix} + r_{bb}(\lambda)\begin{pmatrix} 1 \\ \xi(\lambda) \end{pmatrix}(1, \eta(\lambda)).$$

注意到 $R(\lambda)$ 是诚实的，得

$$\xi(\lambda) = 1 - \lambda\Phi(\lambda)1.$$

故

$$m = \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda\xi(\lambda) = \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda(1 - \lambda\Phi(\lambda)1) = \tilde{d}.$$

因此，$d = \tilde{d} - m = 0$，即 Q 准保守，从而(i) 成立.

再证充分性，当(i)、(ii) 同时成立时，定理 7.1.6 充分性证明

中所造的过程 $R(\lambda) \in P_{\Phi(\lambda)}(Q)$ 还是诚实的，故 $P_{\Phi(\lambda)}(Q)$ 含有诚实过程.

最后，当 Q_b 零流入时，易知满足条件 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda\eta(\lambda) = e$ 的 $\eta(\lambda) \in L_{\Phi(\lambda)}$ 必唯一，即 $\eta(\lambda) = e\Phi(\lambda)$. 又由过程是诚实的可知 $\xi(\lambda) = 1 - \lambda\Phi(\lambda)\mathbf{1}$，$r_{bb}(\lambda) = (\lambda + \lambda e\Phi(\lambda)\mathbf{1})^{-1}$ 均唯一，从而 $P_{\Phi(\lambda)}(Q)$ 中诚实过程唯一.

而当 Q_b 非零流入时，由引理 4.2.3，$L_\lambda^+ \cap L_{\Phi(\lambda)} \neq \{\mathbf{0}\}$，任取非零 $\bar{\eta}(\lambda) \in L_{\Phi(\lambda)} \cap L_\lambda^+$，然后令

$$\eta_1(\lambda) = e\Phi(\lambda), \quad \eta_2(\lambda) = e\Phi(\lambda) + \bar{\eta}(\lambda).$$

由定理 7.1.6 充分性证明过程知，可造两个不同的诚实 Q 过程，且这两个诚实 Q 过程均属于 $P_{\Phi(\lambda)}(Q)$. 定理 7.1.8 证毕.

我们指出，当 Q_b 非零流入时，由定理 7.1.8 的证明可看出，$P_{\Phi(\lambda)}(Q)$ 中一切诚实过程均可构造出来，在此就从略了.

下面讨论 Q 可和的情况，即 Q 满足

$$e\mathbf{1} = \sum_{j\in E_b} q_{bj} < +\infty .$$

定理7.1.9 设 Q 是可和拟 Q — 矩阵，则 $P_{\Phi(\lambda)}(Q)$ 非空的充要条件是方程

$$\begin{cases} V(\lambda)(\lambda I - Q_b) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{0} \leqslant V(\lambda) \in L_{E_b} \end{cases} \tag{7.1.24}$$

有满足如下两条件的解 $V(\lambda) \in L_{\Phi(\lambda)}$：

(i) $$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda \sum_{j\in E_b} v_j(\lambda) = +\infty; \tag{7.1.25}$$

(ii) $$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda \sum_{j\in E_b} v_j(\lambda) \sum_{a\in H} \Gamma_{ja} d_a < +\infty. \tag{7.1.26}$$

证明 若 $P_{\Phi(\lambda)}(Q)$ 非空，任取 $R(\lambda) \in P_{\Phi(\lambda)}(Q)$，对 $R(\lambda)$ 禁止 b 进行分解，由分解定理可得 $\eta(\lambda)$ 的形式为：

$$\eta(\lambda) = e\Phi(\lambda) + \bar{\eta}(\lambda) ,$$

其中 $\bar{\eta}(\lambda) \in L_{\Phi(\lambda)} \cap L_\lambda^+$. 由于 b 为瞬时态，必须要求 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda\eta(\lambda)\mathbf{1} = +\infty$，但由于 Q 可和，从而必须有

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\bar{\eta}(\lambda)1 = +\infty .$$

这得证(7.1.25)式。其次注意

$$C \geqslant \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\eta(\lambda)(1-\xi) \geqslant \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda[\bar{\eta}(\lambda), \bar{X} - \bar{\xi} + \sum_{a\in H} \Gamma_{\cdot a} d_a],$$

其中 C 为有限常数，$\xi(\lambda) = \Phi(\lambda)m + \bar{\xi}(\lambda)$ 由分解定理所得，$\bar{\xi} = \lim_{\mu\to 0}\bar{\xi}(\mu)$.

由于 $\bar{X} \geqslant \bar{\xi}$，由上式立得

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda[\bar{\eta}(\lambda), \sum_{a\in H} \Gamma_{\cdot a} d_a] < +\infty.$$

这得证(7.1.26)式. 必要性得证.

反之，任取满足(7.1.24)、(7.1.25)和(7.1.26)的解 $V(\lambda) \in L_{\Phi(\lambda)}$. 令

$$\eta(\lambda) = e\Phi(\lambda) + V(\lambda) ,$$
$$\xi(\lambda) = \Phi(\lambda)m + \bar{X}(\lambda) .$$

由(7.1.26)易证明 $\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\eta(\lambda)(1-\xi) < +\infty$.

取常数 $C \geqslant \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\eta(\lambda)(1-\xi)$，令

$$r_{bb}(\lambda) = (C + \lambda + \lambda\eta(\lambda)\xi)^{-1},$$

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Phi(\lambda) \end{pmatrix} + r_{bb}(\lambda)\begin{pmatrix} 1 \\ \xi(\lambda) \end{pmatrix}(1, \eta(\lambda)) .$$

由(7.1.25)及分解定理知 $R(\lambda) \in P_{\Phi(\lambda)}(Q)$. 定理 7.1.9 证毕.

推论 7.1.5 设 Q 是可和准保守拟 Q — 矩阵，则 $P_{\Phi(\lambda)}(Q)$ 非空的充要条件为方程

$$\begin{cases} V(\lambda)(\lambda I - Q_b) = 0, \\ 0 \leqslant V(\lambda) \in L_{E_0}. \end{cases}$$

存在满足条件 $\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda V(\lambda)1 = +\infty$ 的解 $V(\lambda) \in L_{\Phi(\lambda)}$.

证明 由定理 7.1.9 立得.

定理 7.1.10 设 Q 是可和拟 Q — 矩阵，则 $P_{\Phi(\lambda)}(Q)$ 非空且含有诚实过程的充要条件为下列两条同时成立：

(i) Q 准保守；

(ii) 方程

$$\begin{cases} V(\lambda)(\lambda I - Q_b) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{0} \leqslant V(\lambda) \in L_{E_b}. \end{cases}$$

存在满足条件 $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda V(\lambda)\mathbf{1} = +\infty$ 的解 $V(\lambda) \in L_{\Phi(\lambda)}$.

证明 仿定理 7.1.8 的证明方法，利用定理 7.1.9 易得证本定理.

定理 7.1.11 设 Q 是可和 $Q-$ 矩阵，满足 $P_{\Phi(\lambda)}(Q)$ 非空的条件，任取满足(7.1.24)、(7.1.25) 和(7.1.26) 的一个解 $\bar{\eta}(\lambda) \in L_{\Phi(\lambda)}$，取 $\bar{\xi}(\lambda) \in M_{\Phi(\lambda)} \cap \mu_i^+(\mathbf{1})$ 使满足

$$W_\lambda = \lambda[\bar{\eta}(\lambda), \bar{X} - \bar{\xi} + \sum_{a \in H} \Gamma_{\cdot a} d_a] \uparrow W < +\infty \quad (\lambda \uparrow +\infty),$$

取常数 C 满足

$$C \geqslant [e, X^0] + \bar{\sigma}^0 + [e, \bar{X} - \bar{\xi} + \sum_{a \in H} \Gamma_{\cdot a} d_a] + W \ ,$$

其中 $X^0, \bar{\sigma}^0$ 等的意义与定理 7.1.7 中相同.

令

$$\eta(\lambda) = e\Phi(\lambda) + \bar{\eta}(\lambda),$$
$$\xi(\lambda) = \Phi(\lambda)m + \bar{\xi}(\lambda),$$
$$r_{bb}(\lambda) = (C + \lambda + \lambda\eta(\lambda)\xi)^{-1}.$$

最后令

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi(\lambda) \end{pmatrix} + r_{bb}(\lambda)\begin{pmatrix} 1 \\ \xi(\lambda) \end{pmatrix}(1, \eta(\lambda)) \ .$$

则 $R(\lambda)$ 属于 $P_{\Phi(\lambda)}(Q)$，且 $P_{\Phi(\lambda)}(Q)$ 中的每个过程均可如此构造出来.

证明 仿定理 7.1.7 可证得定理.

我们指出，与 Q 不可和一样，在 Q 可和下也容易得到 $P_{\Phi(\lambda)}(Q)$ 中诚实过程的构造，此处同样略去.

在结束本节之前，我们给出最小生成类构造的一个应用.

定义 7.1.3 称一个拟 $Q-$ 矩阵 $Q = (q_{ij}; i, j \in E)$ 为 Williams 矩阵，如果存在 $b \in E$，使得

$$\liminf_j q_{bj} > 0 \tag{7.1.27}$$

成立.

注 (7.1.27) 表示存在一个常数 δ，使得 $q_{bj} \geq \delta$ 仅对有限个 $j \in E$ 不成立.

显然，对于 Williams 矩阵，$\{q_{bj}; j \in E - \{b\}\}$ 中至多出现有限个零.

由分解定理及下面关于 Williams 矩阵的研究可知，出现有限个零与不出现零没有本质的区别，只是在细节的陈述与证明中需适当作一些变动. 为了简明，不仿假设存在一个常数 $\delta > 0$，使得

$$q_{bj} \geq \delta, (\forall\ j \in E - \{b\}) \tag{7.1.28}$$

成立.

由(7.1.27)或(7.1.28)可知，b 必为瞬时态. Williams[2] 对满足条件(7.1.28)的 Q，给出了诚实 Q 过程存在的充要条件. 下面我们将分别给出 Q 过程存在和诚实 Q 过程存在的充要条件，而且构造了全部 Q 过程.

定理 7.1.12 设 Q 是 Williams 矩阵，那么

(i) Q 过程存在的充要条件是 Q 仅有一个瞬时态 b 且有

$$\sum_{j \in E_b} \sum_{k \in E_b} q_{bj}(\lambda + d_k)\varphi_{jk}(\lambda) < +\infty, \quad (\lambda > 0), \tag{7.1.29}$$

其中 $E_b = E - \{b\}$，$d_k = q_k - \sum\limits_{l \in E - \{k\}} q_{kl}$，$\Phi(\lambda)$ 是最小 Q_b 过程.

(ii) 诚实 Q 过程存在当且仅当 Q 是单瞬时态准保守的且有

$$\sum_{j \in E_b} \sum_{k \in E_b} q_{bj}\varphi_{jk}(\lambda) < +\infty, \quad (\lambda > 0). \tag{7.1.30}$$

(iii) 若 Q 是 $Q-$ 矩阵，那么一切 Q 过程均属于最小生成类 $P_{\Phi(\lambda)}(Q)$；从而按定理 7.1.7，可以将全部 Q 过程构造出来.

证明 由定理 7.1.6、定理 7.1.7 和定理 7.1.8 以及(7.1.28)可知，为完成本定理的证明，只需证明若 Q 是 $Q-$ 矩阵，则 Q 必是单瞬时态的，而且一切 Q 过程均属于最小生成类即可. 以下引理 7.1.1 证明 Q 是单瞬时态的，引理 7.1.2 证明一切 Q 过程均属于最小生成类 $P_{\Phi(\lambda)}(Q)$.

引理 7.1.1 若 William 矩阵 Q 是 $Q-$ 矩阵，则 Q 必是单瞬时

态的，即

$$q_j < +\infty \quad \forall\ j \in E_b = E - \{b\}\ . \qquad (7.1.31)$$

证明　设 Q 是 Q — 矩阵，$R(\lambda)$ 是一个 Q 过程. 对 $R(\lambda)$ 禁止状态 b 可得 Q_b 过程${}_bR(\lambda)$，由分解定理及 Fatou 引理可得 $e_b R(\lambda)\mathbf{1} < +\infty$，此处 $e = (q_{bj}, j \in E_b)$，注意(7.1.28) 可得

$$\sum_{i\in E_b}\sum_{j\in E_b} {}_b r_{ij}(\lambda) < +\infty, \quad (\lambda > 0)\ . \qquad (7.1.32)$$

反设(7.1.31) 不成立，那么必存在 $k \in E_b$，使 $q_k = +\infty$. 记 $E_{bk} = E_b - \{k\}$，$Q_{bk} = (q_{ij}; i, j \in E_{bk})$.

对${}_bR(\lambda)$ 禁止状态 k 由分解定理

$${}_bR(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Psi(\lambda) \end{pmatrix} + r_{bb}(\lambda)\begin{pmatrix} 1 \\ \xi(\lambda) \end{pmatrix}(1, \eta(\lambda)), \qquad (7.1.33)$$

其中 $\Psi(\lambda)$ 是 Q_{bk} 过程，$\xi(\lambda) \in M_{\Psi(\lambda)}$，$\eta(\lambda) \in L_{\Psi(\lambda)}$，且存在正常数 $C < +\infty$，使

$$\lambda\eta(\lambda)(\mathbf{1} - \xi) \leqslant C \quad (\lambda > 0), \qquad \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\eta(\lambda)\xi = +\infty\ .$$

由(7.1.32) 得

$$\sum_{j\in E_b} {}_b r_{ij}(\lambda) \to 0 \quad (i \to \infty,) \quad (\text{视 } E_b \text{ 已按某种方式排序}).$$

注意上述结论，由(7.1.33) 得

$$\xi_i(\lambda) \to 0, \quad \sum_{j\in E_{bk}} \psi_{ij}(\lambda) \to 0, \quad (i \to \infty).$$

由第三章列协调族的性质有 $\xi = \xi(\lambda) + \lambda\Psi(\lambda)\xi \leqslant \xi(\lambda) + \lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1}$. 结合上式得

$$\xi_i \to 0, \quad (i \to \infty).$$

故对任意 $0 < \varepsilon < 1$，存在有限集 $N \subset E_{bk}$，当 $i \in E_{bk} - N$ 时

$$\xi_i < \varepsilon,$$

从而

$$\begin{aligned} C &\geqslant \lambda\eta(\lambda)(\mathbf{1} - \xi) \\ &\geqslant \sum_{i\in E_{bk}-N} \lambda\eta_i(\lambda)(1 - \xi_i) \end{aligned}$$

$$\geqslant (1-\varepsilon) \sum_{i \in E_{bk}-N} \lambda \eta_i(\lambda) .$$

因此

$$\sum_{i \in E_{bk}} \lambda \eta_i(\lambda) \xi_i \leqslant \sum_{i \in E_{bk}} \lambda \eta_i(\lambda)$$

$$\leqslant \sum_{i \in N} \lambda \eta_i(\lambda) + \frac{C}{1-\varepsilon}$$

$$\to \sum_{i \in N} q_{ki} + \frac{C}{1-\varepsilon} < +\infty \qquad (\lambda \uparrow +\infty),$$

与 $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda \eta(\lambda) \xi = +\infty$ 矛盾！从而(7.1.31)成立.

引理 7.1.2 若 Williams 矩阵 Q 是 $Q-$ 矩阵，则一切 Q 过程均属于最小生成类 $P_{\Phi(\lambda)}(Q)$.

证明 设 Q 是 $Q-$ 矩阵，$R(\lambda)$ 是任一 Q 过程，我们证明 $R(\lambda) \in P_{\Phi(\lambda)}(Q)$.

对 $R(\lambda)$ 禁止状态 b，由分解定理有

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Psi(\lambda) \end{pmatrix} + r_{bb}(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ \xi(\lambda) \end{pmatrix} (1, \eta(\lambda)).$$

我们首先证明 $\Psi(\lambda)$ 是 B 型 Q_b 过程.

由(7.1.32)式可得

$$\sum_{k \in E_b} \psi_{kj}(\lambda) < +\infty, \quad (\forall\, j \in E_b). \qquad (7.1.34)$$

但由第一章全稳定态转移概率的下列性质

$$p'_{ij}(t) \leqslant |p'_{ij}(t)| \leqslant 2q_i,$$

可得

$$\lambda^2 \psi_{ij}(\lambda) \leqslant 2q_i, \quad (i \neq j).$$

从而

$$\lambda^2 \psi_{ik}(\lambda) \psi_{kj}(\mu) \leqslant 2q_i \psi_{kj}(\mu), \quad (\forall\, \lambda, \mu > 0, i \neq k) .$$

注意上式及(7.1.34)，由控制收敛定理可得

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \sum_{k \neq i} \lambda^2 \psi_{ik}(\lambda) \psi_{kj}(\mu) = \sum_{k \neq i} q_{ik} \psi_{kj}(\mu) . \qquad (7.1.35)$$

再由 $\Psi(\lambda)$ 的预解方程

$$\psi_{ij}(\lambda)-\psi_{ij}(\mu)=(\mu-\lambda)\sum_{k\in E_b}\psi_{ik}(\lambda)\psi_{kj}(\mu),$$

可得

$$\mu\psi_{ij}(\mu)-\lambda\psi_{ij}(\lambda)=\frac{\lambda-\mu}{\lambda}\lambda(\lambda\psi_{ii}(\lambda)-1)\psi_{ij}(\mu)$$
$$+\frac{\lambda-\mu}{\lambda}\sum_{k\neq i}\lambda^2\psi_{ik}(\lambda)\psi_{kj}(\mu).$$

在上式中令 $\lambda\to\infty$，注意(7.1.35)得

$$\mu\psi_{ij}(\mu)-\delta_{ij}=\sum_{k\in E_b}q_{ik}\psi_{kj}(\mu),\quad (i,j\in E_b).$$

故 $\Psi(\lambda)$ 确为 B 型 Q_b 过程.

以下证明 $\Psi(\lambda)$ 是最小 Q_b 过程，从而 $R(\lambda)\in P_{\Phi(\lambda)}(Q)$.

令

$$\bar{\xi}(\lambda)=\Psi(\lambda)\mathbf{1}-\Phi(\lambda)\mathbf{1},$$

那么 $\mathbf{0}\leqslant\bar{\xi}(\lambda)\leqslant\mathbf{1}$，我们只需证明 $\bar{\xi}(\lambda)=0$ 即可.

首先由 $\Psi(\lambda)$ 和 $\Phi(\lambda)$ 是 B 型 Q_b 过程可知，$\bar{\xi}(\lambda)$ 是方程

$$\begin{cases}(\lambda I-Q_b)U(\lambda)=\mathbf{0},\\ \mathbf{0}\leqslant U(\lambda)\leqslant\mathbf{1}\end{cases}\tag{7.1.36}$$

的解.

由(7.1.32)式知

$$\sum_{i\in E_b}\sum_{j\in E_b}\psi_{ij}(\lambda)<+\infty,$$

故更有

$$\sum_{j\in E_b}\psi_{ij}(\lambda)\to 0,\quad (i\to\infty).$$

从上式可得

$$\bar{\xi}_i(\lambda)\to 0,\quad (i\to\infty).\tag{7.1.37}$$

反设 $\bar{\xi}(\lambda)\neq 0$，那么 $\sup\limits_{i\in E_b}\bar{\xi}_i(\lambda)>0$，由(7.1.37)必存在 $i_0\in E_b$，$\lambda_0>0$，使得

$$\bar{\xi}_{i_0}(\lambda_0)=\sup_{i\in E_b}\bar{\xi}_i(\lambda_0).$$

令

$$\hat{\xi}(\lambda) = \frac{1}{\sup\limits_{i\in E_b}\bar{\xi}_i(\lambda)}\bar{\xi}(\lambda).$$

那么 $\hat{\xi}(\lambda)$ 仍是方程(7.1.6)的解，若用 $\bar{X}(\lambda)$ 表示(7.1.6)的最大解，则

$$\hat{\xi}(\lambda) \leqslant \bar{X}(\lambda).$$

故

$$1 \geqslant \bar{X}_{i_0}(\lambda_0) \geqslant \hat{\xi}_{i_0}(\lambda_0) = 1.$$

但由定理 4.2.1

$$\lambda\Phi(\lambda)1 \leqslant 1 - \bar{X}(\lambda),$$

从而

$$0 \leqslant \lambda_0 \sum_{j\in E_b} \varphi_{i_0 j}(\lambda_0) \leqslant 1 - \bar{X}_{i_0}(\lambda_0) = 0.$$

与 $\Phi(\lambda)$ 是最小 Q_b 过程的定义矛盾！故 $\bar{\xi}(\lambda) = 0, R(\lambda) \in P_{\Phi(\lambda)}(Q)$. 引理 7.1.2 证毕.

§2 多瞬时态 Q 过程的存在性

在上节中，我们讨论了单瞬时态 Q 过程的存在性，利用多维分解定理，单瞬时态的结果大部分可以推广到有限瞬时态情况；由于在推证中与单瞬时态有许多类似之处，我们将从简叙述证明过程.

本节先把单瞬时态 Q 过程存在性的若干必要条件以及最小生成类的构造推广到有限瞬时态的情况. 然后，对不满足 (S) 条件的拟 Q — 矩阵分别给出 Q 过程和诚实 Q 过程存在的充要条件以及全部 Q 过程的构造.

在本节中，恒设 $Q = (q_{ij}; i, j \in E)$ 为有限瞬时态拟 Q — 矩阵，$B = \{b, q_b = +\infty\}$ 为瞬时态集. 令

$$E_B = E - B, \quad Q_B = (q_{ij}; i, j \in E_B),$$

$$e^b = (q_{bj}, j \in E_B), \quad m^b = (q_{ib}, i \in E_B)^T, \quad (\forall\, b \in B),$$

$$d_i = q_i - \sum_{j\in E-\{i\}} q_{ij}, \quad \bar{d}_i = q_i - \sum_{j\in E_B-\{i\}} q_{ij}, \quad (i \in E_B),$$

$$d = (d_i, i \in E_B), \quad \tilde{d} = (\tilde{d}_i, i \in E_B).$$

显然，$\tilde{d} = d + \sum_{b \in B} m^b, Q_B$ 是全稳定 Q — 矩阵，用 $\Phi(\lambda) = (\varphi_{ij}(\lambda); i, j \in E_B)$ 表示最小 Q_B 过程.

定理 7.2.1 若 Q 是 Q — 矩阵，则 $\forall\, b \in B$，$e^b\Phi(\lambda) \in L_{E_B}$从而

$$\sum_{b \in B} \sum_{k \in E_B} \sum_{j \in E_B} q_{bj}\varphi_{jk}(\lambda) < +\infty, \quad (\lambda > 0). \tag{7.2.1}$$

证明 使用多维分解定理，类似于定理 7.1.1 的证明易证得本定理.

有时判断某些特殊的 Q 不是 Q — 矩阵，下述推论使用起来比定理 7.2.1 更方便.

推论 7.2.1 若 Q 是 Q — 矩阵，则 $\forall\, b \in B$ 必有

$$\sum_{j \in E_B} \frac{q_{bj}}{\lambda + q_j} < +\infty, \quad (\lambda > 0). \tag{7.2.2}$$

定理 7.2.2 若 Q 是 Q — 矩阵，则关于 Q_B，(II) 条件不成立，即

$$\inf_{i \in E_B} \sum_{j \in E_B} \varphi_{ij}(\lambda) = 0. \tag{7.2.3}$$

证明 使用多维分解定理，类似于定理 7.1.2 的证明易证得本定理.

推论 7.2.2 若 Q 是 Q — 矩阵，则 Q_B 过程不唯一.

证明 类似于推论 7.1.2 的证明可证得本推论.

推论 7.2.3 若 Q_B 有界，即$\sup_{i \in E_B} q_i < +\infty$，则 Q 不是 Q — 矩阵.

证明 仿推论 7.1.3 的证明可证得本推论.

下面来给出多瞬时态最小生成类的构造. 原则上说来，利用有限维分解定理这一工具，沿着单瞬时态研究的思路，就可得到有限瞬时态最小生成类的构造，由于在推证中有许多类似于单瞬时态之处，我们将从简叙述证明过程. 另外，由于从单瞬时态到双瞬时态有些新的东西出现，而从双瞬时态到一般有限瞬时态已没有什么新鲜东西了. 因此，为了简单明了，我们将双瞬时态的结果和证

明单独写出，而对一般有限瞬时态只需给出结果不必证明了.

定义 7.2.1 设 Q 是 Q－矩阵，$\Psi(\lambda)$ 是 Q_B 过程；称 Q 过程类

$$P_{\Psi(\lambda)}(Q) = \{R(\lambda); R(\lambda) \text{ 是 } Q \text{ 过程且 } {}_BR(\lambda) = \Psi(\lambda)\}$$

为 $\Psi(\lambda)$ 生成类，其中 ${}_BR(\lambda)$ 表示 $R(\lambda)$ 禁止 B 所得的 Q_B 过程；特别，当 $\Psi(\lambda)$ 是最小 Q_B 过程 $\Phi(\lambda)$ 时，称 $P_{\Phi(\lambda)}(Q)$ 为最小生成类.

与单瞬时态一样，我们也引入下列记号.

令

$$\mu_\lambda^-(1) = \{U(\lambda); (\lambda I - Q_B)U(\lambda) = 0, 0 \leqslant U(\lambda) \leqslant 1\}.$$

用 $\overline{X}(\lambda)$ 表示 $\mu_\lambda^+(1)$ 的最大元.

$$L_\lambda^+ = \{V(\lambda); 0 \leqslant V(\lambda) \in L_{E_B}, V(\lambda)(\lambda I - Q_B) = 0\},$$

$$H = \{i \in E_B, d_i > 0\}, \quad \widetilde{H} = \{i \in E_B, \tilde{d}_i > 0\}.$$

定理 7.2.3 设 Q 是双瞬时拟 Q－矩阵，$a \neq b$ 为瞬时态，且

$$\sum_{j \neq a} q_{aj} = +\infty, \quad \sum_{j \neq b} q_{bj} = +\infty, \tag{7.2.4}$$

则最小生成类非空的充分必要条件为如下两条同时成立.

(i)
$$\begin{cases} \sum\limits_{k \in E_B} \sum\limits_{j \in E_B} q_{aj} \varphi_{jk}(\lambda) < +\infty \\ \sum\limits_{k \in E_B} \sum\limits_{j \in E_B} q_{bj} \varphi_{jk}(\lambda) < +\infty \end{cases} \quad (\lambda > 0); \tag{7.2.5}$$

(ii) 方程

$$\begin{cases} (\lambda I - Q_B)U(\lambda) = 0, \\ 0 \leqslant U(\lambda) \leqslant 1. \end{cases} \tag{7.2.6}$$

存在满足如下条件的两个解 $\{\bar{\xi}^a(\lambda), \bar{\xi}^b(\lambda)\} \subset M_{\Phi(\lambda)}$

$$\bar{\xi}^a(\lambda) + \bar{\xi}^b(\lambda) \leqslant \overline{X}(\lambda), \tag{7.2.7}$$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda[e^a\Phi(\lambda), H^b + \overline{X} - \bar{\xi}^a] < +\infty, \tag{7.2.8}$$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda[e^b\Phi(\lambda), H^a + \overline{X} - \bar{\xi}^b] < +\infty, \tag{7.2.9}$$

其中 $H_i^b = \sum\limits_{j \in E_B} \Gamma_{ij} d_j + \sum\limits_{j \in E_B} \Gamma_{ij} q_{jb}$，$H_i^a = \sum\limits_{j \in E_B} \Gamma_{ij} d_j + \sum\limits_{j \in E_B} \Gamma_{ij} q_{ja}$.

当上述条件满足时，任取满足(7.2.7)、(7.2.8)及(7.2.9)的

一对解$\{\bar{\xi}^a(\lambda),\bar{\xi}^b(\lambda)\}\subset \mu_\lambda^+(1)\cap m_{\Phi(\lambda)}$. 再取满足下述条件的一对解$\{\bar{\eta}^a(\lambda),\bar{\eta}^b(\lambda)\}\subset L_\lambda^+\cap L_{\Phi(\lambda)}$, ($\bar{\eta}^a(\lambda)$, $\bar{\eta}^b(\lambda)$ 可取 0).

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda[\bar{\eta}^a(\lambda),H^b+\bar{X}-\bar{\xi}^a]<+\infty, \qquad (7.2.10)$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda[\bar{\eta}^b(\lambda),H^a+\bar{X}-\bar{\xi}^b]<+\infty. \qquad (7.2.11)$$

令

$$\eta^a(\lambda)=e^a\Phi(\lambda)+\bar{\eta}^a(\lambda),\quad \eta^b(\lambda)=e^b\Phi(\lambda)+\bar{\eta}^b(\lambda),$$

$$\xi^a(\lambda)=\Phi(\lambda)m^a+\bar{\xi}^a(\lambda),\quad \xi^b(\lambda)=\Phi(\lambda)m^b+\bar{\xi}^b(\lambda),$$

取常数矩阵$C=\begin{pmatrix} c_{11} & -c_{12}\\ -c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$满足

$$c_{12}=q_{ab}+\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta^a(\lambda),\xi^b],$$

$$c_{21}=q_{ba}+\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta^b(\lambda),\xi^a],$$

$$c_{11}\geqslant c_{12}+\lim_{\lambda\to-\infty}\lambda[\eta^a(\lambda),1-\xi^a-\xi^b],$$

$$c_{22}\geqslant c_{21}+\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta^b(\lambda),1-\xi^a-\xi^b],$$

再令

$$\eta(\lambda)=\begin{pmatrix}\eta^a(\lambda)\\ \eta^b(\lambda)\end{pmatrix},\quad \xi(\lambda)=(\xi^a(\lambda),\xi^b(\lambda)),$$

$$A(\lambda)=(C+\lambda I+\lambda[\eta(\lambda),\xi])^{-1},$$

最后令

$$R(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \Phi(\lambda)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}A(\lambda) & A(\lambda)\eta(\lambda)\\ \xi(\lambda)A(\lambda) & \xi(\lambda)A(\lambda)\eta(\lambda)\end{pmatrix}. \qquad (7.2.12)$$

则 $R(\lambda)$ 就是一个 Q 过程,属于最小类 $P_{\Phi(\lambda)}(Q)$.

反之,任何一个属于最小类的 Q 过程均可如此构造.

证明 设最小生成类 $P_{\Phi(\lambda)}(Q)$ 非空,则存在Q过程. 由定理 7.2.1 得(7.2.5) 成立.

任取 $R(\lambda)\in P_{\Phi(\lambda)}(Q)$,则 $R(\lambda)$ 必可表为形式(7.2.12),故 $\eta^a(\lambda)$, $\eta^b(\lambda)$, $\xi^a(\lambda)$, $\xi^b(\lambda)$ 均为关于最小解的协调族,从而由引理 3.1.7 — 3.1.8,必有表现

$$\eta^a(\lambda)=e^a\Phi(\lambda)+\bar{\eta}^a(\lambda),$$

$$\eta^b(\lambda) = e^b\Phi(\lambda) + \bar{\eta}^b(\lambda),$$

此处 $\bar{\eta}^a(\lambda), \bar{\eta}^b(\lambda) \in L_{\Phi(\lambda)} \cap L_\lambda^+$.

$$\xi^a(\lambda) = \Phi(\lambda)m^a + \bar{\xi}^a(\lambda),$$

$$\xi^b(\lambda) = \Phi(\lambda)m^b + \bar{\xi}^b(\lambda),$$

此处 $\bar{\xi}^a(\lambda), \bar{\xi}^b(\lambda) \in M_{\Phi(\lambda)} \cap \mu_\lambda^+(1)$.

由二维分解定理，必有

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda[e^a\Phi(\lambda) + \bar{\eta}^a(\lambda), 1 - \Gamma m^a - \bar{\xi}^a] < +\infty,$$

从而

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda[e^a\Phi(\lambda), 1 - \Gamma m^a - \bar{\xi}^a] < +\infty, \qquad (7.2.13)$$

且

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda[\bar{\eta}^a(\lambda), 1 - \Gamma m^a - \bar{\xi}^a] < +\infty. \qquad (7.2.14)$$

由引理 4.2.5

$$\begin{aligned} 1 &= X_i^0 + \bar{X}_i + \sum_{j \in E_B} \Gamma_{ij} \bar{d}_j \\ &= X_i^0 + \bar{X}_i + \sum_{j \in E_B} \Gamma_{ij} d_j + \sum_{j \in E_B} \Gamma_{ij} q_{jb} + \sum_{j \in E_B} \Gamma_{ij} q_{ja}, \end{aligned}$$

故

$$1 - \Gamma m^a - \bar{\xi}^a = X^0 + \bar{X} + H^b - \bar{\xi}^a.$$

但对任意协调族 $\eta(\lambda)$ 恒有 $\lambda[\eta(\lambda), X^0] < +\infty$，且与 λ 无关(见命题 4.2.2)．因此，由(7.2.13)得到(7.2.8)，由(7.2.14)得到(7.2.10)．

同理可证(7.2.9)和(7.2.11)．

由分解定理可知(7.2.7)也成立．必要性得证．

至于充分性可由上面的构造方法得到，且注意条件(7.2.4)保证了构造的过程确为双瞬时态，详细推证由二维分解定理易得．

定理 7.2.3 考虑的是两个瞬时态满足(7.2.4)的情况，当(7.2.4)中两个级数均可和，或一个可和而另一个不可和时，相应结论分别见下面两个定理，由于结论类似，故从简陈述，至于证明，自然可以免去．

定理 7.2.4 设 Q 是双瞬时拟 Q – 矩阵，$a \neq b$ 为瞬时态，且

$$\sum_{j\in E-\{a\}} q_{aj} < +\infty, \quad \sum_{j\in E-\{b\}} q_{bj} < +\infty.$$

则最小生成类 $P_{\Phi(\lambda)}(Q)$ 非空的充要条件为方程

$$\begin{cases}(\lambda I - Q_B)U(\lambda) = 0, \\ 0 \leqslant U(\lambda) \leqslant 1\end{cases}$$

及

$$\begin{cases}V(\lambda)(\lambda I - Q_B) = 0, \\ 0 \leqslant V(\lambda) \in L_{E_B}\end{cases}$$

分别存在两个解 $\bar{\xi}^a(\lambda), \bar{\xi}^b(\lambda) \in M_{\Phi(\lambda)}$ 及 $\bar{\eta}^a(\lambda), \bar{\eta}^b(\lambda) \in L_{\Phi(\lambda)}$ 满足如下条件：

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\bar{\eta}^a(\lambda)1 = +\infty, \quad \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\bar{\eta}^b(\lambda)1 = +\infty,$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda[\bar{\eta}^a(\lambda), H^b + \bar{X} - \bar{\xi}^a] < +\infty,$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda[\bar{\eta}^b(\lambda), H^a + \bar{X} - \bar{\xi}^b] < +\infty,$$

且当上述条件满足时，最小生成类中每个过程均可按类似于定理 7.2.3 的方法全部构造出来.

定理 7.2.5 设 Q 是双瞬时拟 Q — 矩阵，$a \neq b$ 为瞬时态，且

$$\sum_{j\in E-\{a\}} q_{aj} < +\infty \quad , \sum_{j\in E-\{b\}} q_{bj} = +\infty.$$

则最小生成类 $P_{\Phi(\lambda)}(Q)$ 非空的充分必要条件为如下两条同时成立：

(i) $\sum_{k\in E_B}\sum_{j\in E_B} q_{bj}\varphi_{jk}(\lambda) < +\infty, \quad (\lambda > 0).$

(ii) 方程

$$\begin{cases}(\lambda I - Q_B)U(\lambda) = 0, \\ 0 \leqslant U(\lambda) \leqslant 1\end{cases}$$

存在两个解 $\bar{\xi}^a(\lambda), \bar{\xi}^b(\lambda) \in M_{\Phi(\lambda)}$；而方程

$$\begin{cases}V(\lambda)(\lambda I - Q_B) = 0, \\ 0 \leqslant V(\lambda) \in L_{E_B}\end{cases}$$

存在一个解 $\bar{\eta}^a(\lambda) \in L_{\Phi(\lambda)}$，满足条件：

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\bar{\eta}^a(\lambda)1 = +\infty,$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda[\bar{\eta}^a(\lambda),H^b+\bar{X}-\bar{\xi}^a]<+\infty,$$
$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda[e^b\Phi(\lambda),H^a+\bar{X}-\bar{\xi}^b]<+\infty,$$

且当上述条件满足时，最小生成类中的每个过程均可按类似于定理 7.2.3 的方法构造出来.

现在给出一般有限瞬时态最小生成类的构造.

定理 7.2.6 设 Q 是有限瞬时态拟 $Q-$ 矩阵，B 为瞬时态集，令

$$B_1=\{i;i\in B,\sum_{j\in E-\{i\}}q_{ij}<+\infty\},$$
$$B_2=\{i;i\in B,\sum_{j\in E-\{i\}}q_{ij}=+\infty\},$$

此处 B_1 或者 B_2 可以是空集.

则最小生成类 $P_{\Phi(\lambda)}(Q)$ 非空的充分必要条件为如下两条同时成立：

(i) $\sum_{k\in E_B}\sum_{j\in E_B}q_{bj}\varphi_{jk}(\lambda)<+\infty,\quad(\forall\ b\in B_2)$;

(ii) 方程

$$\begin{cases}(\lambda I-Q_B)U(\lambda)=\mathbf{0},\\ \mathbf{0}\leqslant U(\lambda)\leqslant\mathbf{1},\end{cases}\quad(\lambda>0)$$

存在 $|B|$ 个解 $\{\bar{\xi}^b(\lambda);b\in B\}\subset M_{\Phi(\lambda)}$；而方程

$$\begin{cases}V(\lambda)(\lambda I-Q_B)=\mathbf{0},\\ \mathbf{0}\leqslant V(\lambda)\in L_{E_B}\end{cases}$$

存在 $|B_1|$ 个解 $\{\bar{\eta}^b(\lambda);b\in B_1\}\subset L_{\Phi(\lambda)}$，满足条件

$$\sum_{b\in B}\bar{\xi}^a(\lambda)\leqslant\bar{X}(\lambda),$$
$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\bar{\eta}^b(\lambda)\mathbf{1}=+\infty,\quad(\forall\ b\in B_1),$$
$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda[\bar{\eta}^b(\lambda),\mathbf{1}-\Gamma m^b-\bar{\xi}^b]<+\infty,\quad(\forall\ b\in B_1),$$
$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda[e^b\Phi(\lambda),\mathbf{1}-\Gamma m^b-\bar{\xi}^b]<+\infty,\quad(\forall\ b\in B_2).$$

当上述条件满足时，任取一组满足上述条件的 $|B|$ 个解 $\{\bar{\xi}^b(\lambda);b\in B\}\subset\mu_\lambda^+(1)\cap M_{\Phi(\lambda)}$ 及 $|B_1|$ 个解 $\{\bar{\eta}^b(\lambda);b\in B_1\}\subset L_\lambda^+\cap L_{\Phi(\lambda)}$；再取 $|B_2|$ 个解 $\{\bar{\eta}^b(\lambda);b\in B_2\}\subset L_\lambda^+\cap L_{\Phi(\lambda)}$ 满足

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda[\bar{\eta}^b(\lambda),1-\Gamma m^b-\bar{\xi}^b]<+\infty,\quad(\forall\, b\in B_2).$$

令

$$\eta^b(\lambda)=e^b\Phi(\lambda)+\bar{\eta}^b(\lambda),\quad(\forall\, b\in B),$$
$$\xi^b(\lambda)=\Phi(\lambda)m^b+\bar{\xi}^b(\lambda),\quad(\forall\, b\in B).$$

再取常数矩阵 C 为 $|B|\times|B|$ 阶方阵，其中对角线元素 c_{ii} 非负，非对角线元素为 $-c_{ij}$ 非正，满足

$$c_{ij}=q_{ij}+\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta^i(\lambda),\xi^j],\quad(i\neq j,i,j\in B),$$
$$c_{ii}=\sum_{j\in B-\{i\}}q_{ij}+\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta^i(\lambda),1-\xi^i],\quad(i\in B).$$

然后令

$$A(\lambda)=(C+\lambda I+\lambda[\eta(\lambda),\xi])^{-1},$$
$$R(\lambda)=\begin{pmatrix}0&0\\0&\Phi(\lambda)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}A(\lambda)&A(\lambda)\eta(\lambda)\\\xi(\lambda)A(\lambda)&\xi(\lambda)A(\lambda)\eta(\lambda)\end{pmatrix},$$

其中

$$\eta(\lambda)=(\eta^b(\lambda);b\in B)^T,$$
$$\xi(\lambda)=(\xi^b(\lambda);b\in B).$$

则 $R(\lambda)$ 是一个属于最小生成类 $P_{\Phi(\lambda)}(Q)$ 的 Q 过程，而且 $P_{\Phi(\lambda)}(Q)$ 中每个 Q 过程均可如此构造.

证明　由多维分解定理，对比二维情况，易证得本定理.

D. Williams[3] 研究全瞬时态 $Q-$ 矩阵时引入了 (N)、(S) 条件（见定理 5.1.1）. 由定理 5.2.1 知，任意 $Q-$ 矩阵 Q 必满足 (N) 条件，但是 Q 不必满足 (S) 条件（例如，本章中研究的 Williams 矩阵）. 因此，按是否满足 (S) 条件，所有 $Q-$ 矩阵可以分为两类.

在本节的最后，讨论不满足 (S) 条件的拟 $Q-$ 矩阵，将分别给出 Q 过程和诚实 Q 过程存在的充要条件以及所有 Q 过程的构造.

设 $Q=(q_{ij};i,j\in E)$ 是拟 $Q-$ 矩阵，Q 满足 (S) 条件是指下述条件成立：

(S)　存在 E 的无穷子集 K，使得

$$\sum_{j\in K-\{i\}}q_{ij}<+\infty,\quad(\forall\, i\in E),\tag{7.2.15}$$

其中，K 称为 Q 的安全因子.

我们先给出两个引理.

引理7.2.1 设 Q 是可数集 E 上任意全稳定 $Q-$ 矩阵，那么方程

$$\begin{cases}(\lambda I - Q)U = \mathbf{0}, \\ \mathbf{0} \leqslant U \leqslant \mathbf{1}, \\ \sum_{j\in E} U_j < +\infty, \end{cases} \qquad (\lambda > 0)$$

只有零解.

证明 仿引理 7.1.2 证明的后半部分易得证本引理.

引理7.2.2 若 Q 是不满足 (S) 条件的 $Q-$ 矩阵，那么必存在唯一的有限集 $B \subset E$，使以下三条成立：

(i) $\liminf\limits_{j\in E} \sum\limits_{b\in B} q_{bj} > 0$，

而且，$\forall\, b_0 \in B$ 有

$$\liminf_{j\in E} \sum_{b\in B-\{b_0\}} q_{bj} = 0;$$

(ii) $q_b = \sum\limits_{j\in E-\{b\}} q_{bj} = +\infty, \quad (\forall\, b \in B)$,

$q_j < +\infty, \qquad (\forall\, j \in E - B \triangleq E_B)$,

(从而，Q 是带 $|B|$ 个瞬时态的 $Q-$ 矩阵).

(iii) 如果 $R(\lambda)$ 是任意一个 Q 过程，那么 $R(\lambda)$ 禁止瞬时态集 B 所得的 ${}_BR(\lambda)$ 是最小 Q_B 过程 $\Phi(\lambda)$，即 ${}_BR(\lambda) = \Phi(\lambda)$. 此处 $Q_B = (q_{ij}; i, j \in E_B)$

注 我们假定 E 已按某种方式排序，从而不难理解 $\liminf\limits_{j\in E}$

证明 由引理 5.2.1 知，(S) 条件等价于以下 (S^*) 条件

(S^*) 对于 E 的任意有限子集 A，均有

$$\liminf_{j\in E} \sum_{i\in A} q_{ij} = 0.$$

若 Q 是不满足 (S) 条件的 $Q-$ 矩阵，那么 Q 也不满足 (S^*) 条件. 因此，存在有限集 $A_0 \subset E$，使得

$$\liminf_{j\in E} \sum_{i\in A_0} q_{ij} > 0.$$

利用上式及 Q 满足(N)条件，易证明存在最小有限集 $B \subset E$，使得

$$\liminf_{j \in E} \sum_{i \in B} q_{ij} > 0. \tag{7.2.16}$$

由 B 的最小性可得(i)成立.

由(i)可知

$$q_b = \sum_{j \in E - \{b\}} q_{bj} = +\infty, \quad (\forall\ b \in B).$$

再利用(7.2.16)式，仿引理 7.1.1 的证明方法，易证得

$$q_j < +\infty, \quad (j \in E_B)$$

故(ii)成立.

如果 $R(\lambda)$ 是任意 Q 过程，那么利用(7.2.16)式仿引理 7.1.2 的证明可得 ${}_BR(\lambda)$ 是 B 型 Q_B 过程且 $\sum_{i \in E_B} \sum_{j \in E_B} {}_Br_{ij}(\lambda) < +\infty$，利用引理 7.2.1，仿引理 7.1.2 的证明易得证 ${}_BR(\lambda) = \Phi(\lambda)$，故(iii)成立.

定理 7.2.7 设 Q 是不满足(S)条件的拟 Q－矩阵，那么

(i) 存在 Q 过程的充要条件是以下 C_1、C_2 和 C_3 同时成立.

(ii) 存在诚实 Q 过程的充要条件是以下 C_1、C_2、C_3 和 C_4 同时成立.

(iii) 如果 Q 是 Q－矩阵，则所有 Q 过程为最小生成类，从而可按定理 7.2.6 把所有 Q 过程构造出来.

C_1 存在 E 的有限集 B，使得

$$\liminf_{j \in E} \sum_{i \in B} q_{ij} > 0,$$

$$\liminf_{j \in E} \sum_{i \in B, i \neq k} q_{ij} = 0, \quad (\forall\ k \in B),$$

$$q_b = \sum_{j \in E - \{b\}} q_{bj} = +\infty, \quad (\forall\ b \in B),$$

$$q_j < +\infty, \qquad (j \in E_B).$$

C_2 $e^b \Phi(\lambda) 1 = \sum_{j,k \in E_B} q_{bj} \varphi_{jk}(\lambda) < +\infty, \quad (\forall\ b \in B).$

C_3 方程

$$\begin{cases} (\lambda I - Q_B) U(\lambda) = 0, \\ 0 \leqslant U(\lambda) \leqslant 1, \end{cases} \quad (\lambda > 0) \tag{7.2.17}$$

有满足以下条件的 $|B|$ 个解 $\{\bar{\xi}^b(\lambda), b \in B\} \subset M_{\Phi(\lambda)}$.

$$\sum_{b \in B} \bar{\xi}^b(\lambda) \leqslant \bar{X}(\lambda),$$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda e^b \Phi(\lambda)(1 - \Gamma m^b - \bar{\xi}^b) < +\infty, \quad (\forall\, b \in B).$$

C_4　Q 的稳定态全保守.

证明　若存在 Q 过程,则由引理 7.2.2,C_1 成立,并且对任意 Q 过程 $R(\lambda)$,${}_B R(\lambda) = \Phi(\lambda)$,从而最小生成类 $P_{\Phi(\lambda)}(Q)$ 非空,由定理 7.2.6 及 C_1 可知 C_2 和 C_3 成立.进一步,若存在诚实 Q 过程 $R(\lambda)$,那么由 ${}_B R(\lambda) = \Phi(\lambda)$ 是 B 型 Q_B 过程,$R(\lambda)$ 是诚实的以及多维分解定理易证 C_4 也成立.

反之,若 C_1、C_2 和 C_3 成立,则任取 $b_0 \in B$,令

$$\eta^b(\lambda) = e^b \Phi(\lambda), \quad (\forall\, b \in B),$$

$$\xi^b(\lambda) = \Phi(\lambda) m^b + \bar{\xi}^b(\lambda), \quad (\forall\, b \in B - \{b_0\}),$$

$$\xi^{b_0}(\lambda) = \Phi(\lambda) m^{b_0} + \bar{X}(\lambda) - \sum_{a \in B - \{b_0\}} \bar{\xi}^a(\lambda)$$

$$\geqslant \Phi(\lambda) m^{b_0} + \bar{\xi}^{b_0}(\lambda).$$

再取 $|B| \times |B|$ 阶常数矩阵 C,其中对角线元 c_{ii} 非负,非对角线元为 $-c_{ij}$ 非正,满足

$$c_{ij} = q_{ij} + \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda[\eta^i(\lambda), \xi^j], \quad (i, j \in B; i \neq j),$$

$$c_{ii} = \sum_{j \in B - \{i\}} q_{ij} + \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda[\eta^i(\lambda), 1 - \xi^i], \quad (i \in B).$$

然后令

$$A(\lambda) = (C + \lambda I + \lambda[\eta(\lambda), \xi])^{-1},$$

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Phi(\lambda) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A(\lambda) & A(\lambda)\eta(\lambda) \\ \xi(\lambda)A(\lambda) & \xi(\lambda)A(\lambda)\eta(\lambda) \end{pmatrix},$$

其中

$$\eta(\lambda) = (\eta^b(\lambda); b \in B)^T,$$

$$\xi(\lambda) = (\xi^b(\lambda); b \in B).$$

那么由多维分解定理可知 $R(\lambda)$ 是一个 Q 过程.进一步,若还有 C_4 成立,则不难验证 $R(\lambda)$ 还是诚实的.

因此,(i)、(ii) 成立.由引理 7.2.2 可知(iii) 也成立.至此,定

理证毕.

§3 补充与注记

关于含有限个瞬时态 Q 过程的研究，早期文献有 Kolmogorov[3]、Williams[2]、Reuter[1]和陈木法、程汉生[1]等. 陈安岳给出了单瞬时态和有限瞬时态最小生成类存在的充要条件，并构造了它们. 刘再明[5]给出了不满足(S)条件 Q 过程的存在性准则. §1 以及 §2 前半部分取自于陈安岳[4]，§2 后半部分取自于刘再明[1].

关于单瞬时态和有限瞬时态 Q 过程的存在性问题，尽管已经取得了一系列的结果，但都没有彻底解决. 第九章中将给出若干解决比较彻底的典型例子.

8 无限个瞬时态无限个稳定态 Q 过程的存在性

为了方便,我们把含无限个瞬时态无限个稳定态的拟 Q — 矩阵、Q — 矩阵以及 Q 过程分别简称为“双无限”拟 Q — 矩阵、Q — 矩阵和 Q 过程. 设 Q 是“双无限”拟 Q — 矩阵,令

$$E_1 = \{i \in E; q_i < +\infty\}, \quad E_2 = E - E_1$$

显然 E_1、E_2 均为无限集,用 $Q_{E_k} = (q_{ij}; i, j \in E_k)$ 表示 Q 在 E_k 上的限制($k = 1,2$).

在含瞬时态 Q 过程的研究中最困难的是有关“双无限”Q 过程的研究,到目前为止还没有得到“双无限”Q 过程的存在性准则. 本章给出“双无限”Q 过程存在的若干必要条件和一些充分条件.

§1 “双无限”Q — 矩阵的若干特征

先给出几个引理.

下述引理 8.1.1 给出了 Q 过程的一种时间变换.

给定 E 上转移矩阵 $P(t)$,设 $\{x(t,\omega), 0 \leqslant t < \sigma(\omega)\}$ 是定义于某完备概率空间 (Ω, F, P) 上 Borel 可测的马氏过程,以 $P(t)$ 为转移函数具有某初始分布及最小状态空间 E,对几乎一切 ω,样本函数 $x(\cdot, \omega)$ 右下半连续(例如 $x(t)$ 取成 Chung K. L. [1] 中 x_+). 从而 $x(t)$ 具有强马氏性.

设 $J \subset E, J \neq \varnothing$. 定义

$$\tau_J(t,\omega) \triangleq \text{meas}\{s; x(s,\omega) \in J, 0 \leqslant s < t\}, \quad (0 \leqslant t \leqslant \sigma(\omega)). \tag{8.1.1}$$

其中meas 表示 Lebesgue 测度.

$$\tau_J(t,\omega) \triangleq \inf\{s;r_J(s,\omega) > t\}, \quad (0 \leqslant t < r_J(\sigma,\omega)). \tag{8.1.2}$$

$$x_J(t,\omega) \triangleq \begin{cases} x(\tau_J(t,\omega),\omega) & x(\tau_J(t,\omega),\omega) \in J, \\ \infty & x(\tau_J(t,\omega),\omega) \overline{\in} J, \end{cases}$$
$$(0 \leqslant t < r_J(\sigma,\omega)). \tag{8.1.3}$$

由 Williams[1] 或 Freedman[1] 知，若 $P(x(0)=j)>0,(\forall\ j\in J)$，$P(x(0)\in J)=1$，则 $\{x_J(t);0\leqslant t<r_J(\sigma,\omega)\}$ 是 Borel 可测的、几乎一切样本轨道右下半连续的齐次马尔可夫过程，具有最小状态空间 J. 记其转移函数为 $P^J(t)$，则 $P^J(t)$ 仅依赖于 $P(t)$ 及 J.

用 $R(\lambda)$、$R^J(\lambda)$ 分别表示 $P(t)$ 和 $P^J(t)$ 的拉氏变换，Q、Q^J 分别表示 $P(t)$ 和 $P^J(t)$ 的密度矩阵.

引理 8.1.1 若 $J\subset E, J\neq\varnothing$，则

(i) $$r_{ij}^J(\lambda) \geqslant r_{ij}(\lambda), \quad (\lambda>0,i,j\in J). \tag{8.1.4}$$

$$q_{ij}^J \geqslant q_{ij}, \qquad (i,j\in J). \tag{8.1.5}$$

(ii) $$\lim_{J\uparrow E} r_{ij}^J(\lambda) = r_{ij}(\lambda), \quad (\lambda>0,i,j\in E). \tag{8.1.6}$$

$$\lim_{J\uparrow E} q_{ij}^J = q_{ij}, \qquad (i,j\in E). \tag{8.1.7}$$

证明 以下某些叙述是对几乎一切 ω 成立，为了方便将不再一一加以说明.

由 Chung[1]，$\forall\ t\in[0,\sigma(\omega)]$，

$$t=\sum_{i\in E}\text{meas}\{s;x(s)=i,0\leqslant s<t\},$$

因此，$r_J(t,\omega)\uparrow t\quad(J\uparrow E)$. 故 $\forall\ t\in[0,\sigma(\omega))$，当 $J\uparrow E$ 时，$\tau_J(t,\omega)\downarrow t$（只要 $\tau_J(t,\omega)$ 有定义）.

$\forall\ i,j\in J$ 及 $t\geqslant 0$

$$\int_0^t p_{ij}^J(s)ds=\int_0^t ds\int_\Omega I_{\{j\}}(x(\tau_J(s)))I_{[0,r_J(\sigma)]}(s)dp_i$$
$$=E_i\,\text{meas}\{s;x(\tau_J(s))=j,0\leqslant s<t\wedge r_J(\sigma)\}$$
$$=E_i\,\text{meas}\{s;x(s)=j,0\leqslant s<\tau_J(t)\wedge\sigma(\omega)\}$$
$$\downarrow E_i\,\text{meas}\{s;x(s)=j,0\leqslant s<t\wedge\sigma(\omega)\}$$
$$=\int_0^t p_{ij}(s)ds\quad(J\uparrow E).$$

其中 I 表示示性函数；第三个等号成立可由 Williams[1] 中 Lemma . 1 稍作修改导出；当 $t \in [\tau_J(\sigma,\omega),\infty)$ 时，显然 $\tau_J(t) \wedge \sigma(\omega) = \sigma(\omega)$. 因此，

$$\int_0^t p_{ij}^J(s)ds \geqslant \int_0^t p_{ij}(s)ds, \quad (i,j \in J).$$

从而可得

$$r_{ij}^J(\lambda) \geqslant r_{ij}(\lambda), \quad (\lambda > 0, i, j \in J).$$

故

$$\begin{aligned} q_{ij}^J &= \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda(\lambda r_{ij}^J(\lambda) - \delta_{ij}) \\ &\geqslant \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda(\lambda r_{ij}(\lambda) - \delta_{ij}) \\ &= q_{ij}, \quad (i,j \in J). \end{aligned}$$

因此，( ) 成立. 由

$$\int_0^t p_{ij}^J(s)ds \downarrow \int_0^t p_{ij}(s)ds, \quad (J \uparrow E).$$

得

$$r_{ij}^J(\lambda) \downarrow r_{ij}(\lambda) \quad (J \uparrow E)$$

由此及“预解式收敛可导出 Q — 矩阵的上极限不等式”(Rogers、Williams[1] 引理 3.1) 可得(ii) 也成立.

注 如果读者不了解 Q 过程的上述时间变换，只要默认引理 8.1.1 的结论，将不会影响本书的阅读.

引理 8.1.2 设 Q 是 Q — 矩阵，H 是若干稳定态所成之集，如果 Q_H 满足 (H) 条件，那么对于任意 Q 过程 $P(t)$，禁止概率半群 ${}_HP(t) = ({}_HP_{ij}(t); i,j \in E - H)$ 在 $E - H$ 上有标准性. 其中 Q_H 是 Q 在 H 上的限制，禁止概率定义见 Chung K. L. [1] Ⅱ § 11.

证明 反设结论不真，那么必存在瞬时态 $i_0 \in E - H$，使 $\lim\limits_{t \to 0} {}_Hp_{i_0 i_0}(t) = 1$ 不成立. 由 Chung[1] Ⅱ § 11 有

$$\lim_{t \to 0} {}_Hp_{i_0 i_0}(t) = 0. \tag{8.1.8}$$

再由 Chung[1] Ⅱ § 11 定理 4 之系，存在 $\{i_\nu\} \subset H$，使得

$$p_{i_0 j}(t) = \lim_{\nu \to \infty} p_{i_\nu j}(t), \quad (t > 0, j \in E).$$

用 $\Psi(\lambda)$ 和 $_H\Psi(\lambda)$ 分别表示 $P(t)$ 和 $_HP(t)$ 的拉氏变换，由上式可得

$$\psi_{i_\nu i_0}(\lambda) = \lim_{\nu\to\infty}\psi_{i_\nu i_0}(\lambda), \quad (\lambda > 0). \tag{8.1.9}$$

对 $\Psi(\lambda)$ 关于 i_0 使用分解定理得

$$\Psi(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & {}_{i_0}\Psi(\lambda) \end{pmatrix} + \psi_{i_0 i_0}(\lambda)\begin{pmatrix} 1 \\ \xi(\lambda) \end{pmatrix}(1,\eta(\lambda)), \tag{8.1.10}$$

其中 $1 - \lambda_{i_0}\Psi(\lambda)1 \geqslant \xi(\lambda)$.

由上式及(8.1.9)、(8.1.10) 可得

$$\lim_{\nu\to\infty}\lambda\sum_{j\in E-\{i_0\}}{}_{i_0}\psi_{i_\nu j}(\lambda) = 0, \quad (\lambda > 0). \tag{8.1.11}$$

由禁止概率定义可知

$$_{E_0}\psi_{ij}(\lambda) \leqslant {}_{i_0}\psi_{ij}(\lambda), \ (\lambda > 0, i, j \in H), (E_0 = E - H). \tag{8.1.12}$$

若用 $\Phi(\lambda)$ 表示最小 Q_H 过程，那么 $\Phi(\lambda) \leqslant {}_{E_0}\Psi(\lambda)$；由(8.1.11)、(8.1.12) 得

$$\lim_{\nu\to\infty}\lambda\sum_{j\in H}\varphi_{i_\nu j}(\lambda) = 0.$$

从而

$$\inf_{i\in H}\lambda\sum_{j\in H}\varphi_{ij}(\lambda) = 0 .$$

即 Q_H 不满足(H) 条件，与引理假设矛盾！从而引理成立.

引理 8.1.3 设 Q 是 $Q-$ 矩阵，$P(t)$ 是 Q 过程，$H \subset E$；如果禁止概率半群 $_HP(t)$ 在 $E-H$ 上具有标准性，那么 $_HP(t)$ 的密度矩阵是 Q 在 $E-H$ 上的限制，即 $_HP(t)$ 是 Q_{E_0} 过程. 其中 $E_0 = E - H$.

证明 如果 H 是有限集，那么由 Chung[1] Ⅱ § 11 可知，$_HP(t)$ 在 E_0 上具有标准性且是 Q_{E_0} 过程.

当 H 是无穷集时，取有限集 $H_n \uparrow H \quad (n\to\infty)$，由禁止概率的定义得

$$_{H_n}P(t) \downarrow {}_HP(t), \quad (n\to\infty). \tag{8.1.13}$$

由引理的条件知，$_HP(t)$ 在 E_0 上有标准性，再由 Chung[1] Ⅱ § 11 知，$_HP(t)$ 是 E_0 上马氏过程. 用 $_{H_n}\Psi(\lambda)$，$_H\Psi(\lambda)$ 分别表示 $_{H_n}P(t)$

和${}_{H}P(t)$ 的拉氏变换，Q^n, Q^H 分别表示${}_{H_n}P(t)$，${}_{H}P(t)$ 的密度矩阵；由(8.1.13)式得

$$_{H_n}\Psi(\lambda) \downarrow {}_{H}\Psi(\lambda), \quad (n \to \infty). \tag{8.1.14}$$

$$q_{ij}^n \geqslant q_{ij}^H, \quad (i,j \in E_0). \tag{8.1.15}$$

由于 Q^n 是 Q 在 $E - H_n$ 上的限制，从而

$$q_{ij} \geqslant q_{ij}^H, \quad (i,j \in E_0). \tag{8.1.16}$$

另一方面，由(8.1.14)知，预解式${}_{H_n}\Psi(\lambda)$ 收敛于预解式${}_{H}\Psi(\lambda)$，从而密度矩阵有如下关系(见 Rogers、Williams[1] 引理 3.1)

$$q_{ij} = \limsup_{n\to\infty} q_{ij}^n \leqslant q_{ij}^H, \quad (i,j \in E_0). \tag{8.1.17}$$

综合(8.1.16)，(8.1.17)两式可得 $Q^H = Q_{E_0}$.

引理证毕.

推论 8.1.1 引理 8.1.2 中${}_{H}P(t)$ 是 Q_{E_0} 过程.

证明 综合引理 8.1.2 和引理 8.1.3 即可.

以下给出"双无限"Q 过程存在的若干必要条件和充分条件.

定理 8.1.1 若 Q 是"双无限"Q－矩阵，则 Q 既满足(N)条件也满足(S)条件.

证明 在第五章中已证明了任何 Q－矩阵均满足(N)条件；另一方面，注意 Q 含无限个瞬时态，由引理 7.2.2. 可得 Q 也满足(S)条件.

定理 8.1.2 若 Q 是"双无限"Q－矩阵，则

(i) $\forall\, i \in E_2, \sum\limits_{j,k\in E_1} q_{ij}\varphi_{jk}(\lambda) < +\infty, \quad (\lambda > 0)$.

(ii) $\forall\, i,j \in E_2, i \neq j, e^{(i)}\Phi m^{(j)} < +\infty$.

此处 $\Phi(\lambda)$ 是最小 Q_{E_1} 过程；$e^{(i)} = (q_{ij}; j \in E_1)$，$m^{(j)} = (q_{kj}; k \in E_1)^T$ 分别是行向量和列向量；$\Phi m^{(j)} = \lim\limits_{\lambda\to 0}(\Phi(\lambda)m^{(j)})$

证明 设 $\Psi(\lambda)$ 是一个 Q 过程，$\forall\, i,j \in E_2$，对 $\Psi(\lambda)$ 关于 $\{i,j\}$ 使用二维分解定理得

$$\Psi(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & {}_{\{i,j\}}\Psi(\lambda) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A(\lambda) & A(\lambda)\eta(\lambda) \\ \xi(\lambda)A(\lambda) & \xi(\lambda)A(\lambda)\eta(\lambda) \end{pmatrix},$$

其中

$$\eta(\lambda)=\begin{pmatrix}\eta^{(i)}(\lambda)\\ \eta^{(j)}(\lambda)\end{pmatrix},\xi(\lambda)=(\xi^{(i)}(\lambda),\xi^{(j)}(\lambda)).$$

对于 $k\in\{i,j\}$

$$\eta^{(k)}(\lambda)\in L_{\{i,j\}\Psi(\lambda)};\xi^{(k)}(\lambda)\in M_{\{i,j\}\Psi(\lambda)},$$

$$\eta^{(k)}(\lambda)\geqslant\bar{e}^{(k)}_{\{i,j\}}\Psi(\lambda),\xi^{(k)}(\lambda)\geqslant_{\{i,j\}}\Psi(\lambda)\bar{m}^{(k)},$$

此处

$$\bar{e}^{(k)}=(q_{kl};l\in E-\{i,j\}),\bar{m}^{(k)}=(q_{lk};l\in E-\{i,j\})^{T}.$$

由二维分解定理,$\eta^{(k)}(\lambda)1<+\infty$, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda\eta^{(k)}(\lambda)(1-\xi^{(k)})<+\infty$.

注意 $\Phi(\lambda)$ 是最小 Q_{E_1} 过程以及禁止概率的定义可得

$$\varphi_{kl}(\lambda)\leqslant_{E_2}\psi_{kl}(\lambda)\leqslant_{\{i,j\}}\psi_{kl}(\lambda),\qquad(k,l\in E_1).\quad(8.1.18)$$

因此,由 $\eta^{(i)}(\lambda)1<+\infty,\eta^{(i)}(\lambda)\geqslant\bar{e}^{(i)}_{\{i,j\}}\Psi(\lambda)$ 及(8.1.18)式得(i)成立.又

$$1-\xi^{(j)}=1-\lim_{\lambda\to0}\xi^{(j)}(\lambda)\geqslant\lim_{\lambda\to0}{}_{\{i,j\}}\Psi(\lambda)m^{(j)},$$

故 $1-\xi^{(j)}$ 限制于 E_1 上不小于$\lim\limits_{\lambda\to0}\Phi(\lambda)m^{(j)}=\Phi m^{(j)}$,因此

$$\begin{aligned}e^{(i)}\Phi m^{(j)}&=\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda e^{(i)}\Phi(\lambda)\Phi m^{(j)}\\&\leqslant\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda e^{(i)}_{\{i,j\}}\Psi(\lambda)(1-\xi^{(j)})\\&\leqslant\lambda\eta^{(i)}(\lambda)(1-\xi^{(j)})<+\infty.\end{aligned}$$

从而(ii)也成立.

推论 8.1.2 若 Q 是"双无限"$Q-$矩阵,且存在 $b\in E_2$,使

$$\sum_{j\in E_1}q_{bj}=+\infty,$$

那么,Q_{E_1} 不满足(H)条件,即

$$\inf_{i\in E_1}\lambda\sum_{j\in E_1}\Phi_{ij}(\lambda)=0,\qquad(\lambda>0).\qquad(8.1.19)$$

从而 Q_{E_1} 过程不唯一.

证明 由定理 8.1.2 及 $\sum\limits_{j\in E_1}q_{bj}=+\infty$ 得(8.1.19)成立,即 Q_{E_1} 不满足(H)条件,从而可构造不同于 $\Phi(\lambda)$ 的 Q_{E_1} 过程.故 Q_{E_1} 过程

不唯一.

定理8.1.3 设Q是"双无限"拟Q—矩阵,满足(N)条件;$\forall i \in E_2, c^{(i)}1 = \sum_{j\in E_1} q_{ij} < +\infty$,$Q_{E_2}$满足$(S)$条件,那么$Q$为$Q$—矩阵,而且还存在诚实$Q$过程.

证明 先假设Q的稳定态全保守,令

$$d_i = \begin{cases} \sum_{j\in E_2} q_{ij}, & i \in E_1; \\ \sum_{j\in E_1} q_{ij}, & i \in E_2. \end{cases}$$

由给出的条件,$d_i < +\infty$,$(i \in E)$. 令$d^1 = (d_i; i \in E_1)^T$,$d^2 = (d_i; i \in E_2)^T$,$d = (d_i; i \in E)^T$分别是E_1、E_2和E上列向量.

由定理的条件,$Q_{E_2} = (q_{ij}; i,j \in E_2)$作为$E_2$上的拟$Q$—矩阵,满足$(N)$、$(S)$条件. 定义$\{\Delta\} \cup E_2$上全瞬时拟$Q$—矩阵$Q^{(2)} = (q_{ij}^{(2)}; i,j \in E_2 \cup \{\Delta\})$如下

$$q_{ij}^{(2)} = \begin{cases} q_{ij}, & i,j \in E_2; \\ -\infty, & i = j = \Delta; \\ d_i, & i \in E_2, j = \Delta; \\ 0, & i = \Delta, j \in E_2. \end{cases}$$

显然$Q^{(2)}$也满足(N)、(S)条件,由第五章全瞬时态过程存在性的结论知,$Q^{(2)}$是Q—矩阵且存在诚实$Q^{(2)}$过程,设$\Psi^{(2)}(\lambda)$是一个诚实$Q^{(2)}$过程.

对$\Psi^{(2)}(\lambda)$关于Δ使用分解定理得

$$\Psi^{(2)}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & {}_\Delta\Psi^{(2)}(\lambda) \end{pmatrix} + \psi_{\Delta\Delta}^{(2)}(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ \xi^\Delta(\lambda) \end{pmatrix} (1, \eta^\Delta(\lambda)),$$

其中${}_\Delta\Psi^{(2)}(\lambda)$是$Q_{E_2}$过程,且

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda(1 - \lambda {}_\Delta\Psi^{(2)}(\lambda)1) = \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\xi^\Delta(\lambda) = d^2. \qquad (8.1.20)$$

用$\Phi(\lambda)$表示最小Q_{E_1}过程,那么

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda(1 - \lambda\Phi(\lambda)1) = d^1. \qquad (8.1.21)$$

令

$$\Psi(\lambda) = \begin{pmatrix} \Phi(\lambda) & 0 \\ 0 & \Psi^{(2)}(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{8.1.22}$$

则 $\Psi(\lambda)$ 是 $\bar{Q}$ 过程，其中

$$\bar{Q} = \begin{pmatrix} Q_{E_1} & 0 \\ 0 & Q_{E_2} \end{pmatrix},$$

并且

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda(1 - \lambda\Psi(\lambda)1) = d \quad , \tag{8.1.23}$$

$$\Psi(\lambda)d \leqslant 1 - \lambda\Psi(\lambda)1 \quad . \tag{8.1.24}$$

令 $v^{(i)} = (v_j^{(i)}; j \in E), d^{(i)} = (d_j^{(i)}; j \in E)^T$ 分别是 E 上行向量和列向量，其中

$$v_j^{(i)} = \begin{cases} 0, & i,j \in E_1 \text{ 或者 } i,j \in E_2; \\ q_{ij}, & \text{其它}. \end{cases}$$

$$d_j^{(i)} = \begin{cases} d_i, & i = j; \\ 0, & i \neq j \quad . \end{cases}$$

显然

$$v^{(i)}1 = d_i, \quad \sum_{i\in E} d^{(i)} = d \,. \tag{8.1.25}$$

将 E 的元素排序为 $E = \{i_1, i_2, \cdots\}$ 令

$$\Psi^{(i_1)}(\lambda) = \Psi(\lambda) + \Psi(\lambda)d^{(i_1)} \frac{v^{(i_1)}\Psi(\lambda)}{C^{(i_1)} + \lambda v^{(i_1)}\Psi(\lambda)\Psi d^{(i_1)}}. \tag{8.1.26}$$

其中

$$\Psi d^{(i_1)} = \lim_{\lambda\to 0}(\Psi(\lambda)d^{(i_1)}),$$

$$C^{(i_1)} = \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda v^{(i_1)}\Psi(\lambda)(1 - \Psi d^{(i_1)}) \leqslant v^{(i_1)}1 = d_{i_1} < +\infty \,.$$

若 $v^{(i_1)} = 0$，则在(8.1.26) 中规定 $\frac{0}{0} = 0$.

由定理 3.5.2. 可知 $\Psi^{(i_1)}(\lambda)$ 是 $Q^{(i_1)}$ 过程，$Q^{(i_1)}$ 满足

$$q_{ij}^{(i_1)} = \begin{cases} q_{i_1 j}, & i = i_1, j \in E; \\ \bar{q}_{ij}, & i \neq i_1, j \in E \,. \end{cases}$$

并且

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda(1-\lambda\sum_{j\in E}\Psi_{ij}^{(i_1)}(\lambda))=\begin{cases}0, & i=i_1;\\ d_i, & i\neq i_1.\end{cases}$$

再令

$$\Psi^{(i_2)}(\lambda)=\Psi^{(i_1)}(\lambda)+\Psi^{(i_1)}(\lambda)d^{(i_2)}\frac{v^{(i_2)}\Psi^{(i_1)}(\lambda)}{C^{(i_2)}+\lambda v^{(i_2)}\Psi^{(i_1)}(\lambda)\Psi^{(i_1)}d^{(i_2)}}.$$

(8.1.27)

同理可知,$\Psi^{(i_2)}(\lambda)$ 是 $Q^{(i_2)}$ 过程,$Q^{(i_2)}$ 满足

$$q_{ij}^{(i_2)}=\begin{cases}q_{ij}, & i\in\{i_1,i_2\},j\in E;\\ \bar{q}_{ij}, & i\notin\{i_1,i_2\},j\in E.\end{cases}$$

并且

$$\Psi(\lambda)\leqslant\Psi^{(i_1)}(\lambda)\leqslant\Psi^{(i_2)}(\lambda),$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda(1-\lambda\sum_{j\in E}\psi_{ij}^{(i_2)}(\lambda))=\begin{cases}0, & i\in\{i_1,i_2\};\\ d_i, & i\notin\{i_1,i_2\}.\end{cases}$$

依次下去,可归纳定义一列马氏过程$\{\Psi^{(i_n)}(\lambda);n\geqslant 1\}$,满足下列(8.1.28)至(8.1.30)

$$\Psi^{(i_{n+1})}(\lambda)$$

$$=\Psi^{(i_n)}(\lambda)+\Psi^{(i_n)}(\lambda)d^{(i_{n+1})}\frac{v^{(i_{n+1})}\Psi^{(i_n)}(\lambda)}{C^{(i_{n+1})}+\lambda v^{(i_{n+1})}\Psi^{(i_n)}(\lambda)\Psi^{(i_n)}d^{(i_{n+1})}}.$$

(8.1.28)

从而

$$\Psi(\lambda)\leqslant\Psi^{(i_1)}(\lambda)\leqslant\Psi^{(i_2)}(\lambda)\leqslant\cdots\cdots,$$

而且 $\Psi^{(i_n)}(\lambda)$ 的 Q—矩阵 $Q^{(i_n)}$ 满足

$$q_{ij}^{(i_n)}=\begin{cases}q_{ij}, & i\in\{i_1,\cdots,i_n\},j\in E;\\ \bar{q}_{ij}, & \text{否则}.\end{cases}\qquad(8.1.29)$$

且

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda(1-\lambda\sum_{j\in E}\psi_{ij}^{(i_n)}(\lambda))=\begin{cases}0, & i\in\{i_1,\cdots,i_n\};\\ d_i, & \text{否则}.\end{cases}$$

(8.1.30)

令

$$\Psi^{(\infty)}(\lambda)=\lim_{n\to\infty}\Psi^{(i_n)}(\lambda).$$

注意每个 $\Psi^{(i_n)}(\lambda)$ 是 $Q^{(i_n)}$ 过程，由单调收敛定理得 $\Psi^{(\infty)}(\lambda)$ 是马氏过程.

由(8.1.29)及 $\Psi^{(\infty)}(\lambda) \geqslant \Psi^{(i_n)}(\lambda)$，$(\forall n \geqslant 1)$ 得

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda(1 - \lambda\Psi^{(\infty)}(\lambda)1) = 0 . \tag{8.1.31}$$

用 $Q^{(\infty)}$ 表示 $\Psi^{(\infty)}(\lambda)$ 的 Q－矩阵，以下证明 $Q^{(\infty)} = Q$.

$\forall\, i_0, j_0 \in E$，取 n 充分大，使 $i_0 \in \{i_1, \cdots, i_n\}$；由于 $\Psi^{(\infty)}(\lambda) \geqslant \Psi^{(i_n)}(\lambda)$. 从而

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \lambda(\lambda\psi_{i_0j_0}^{(\infty)}(\lambda) - \delta_{i_0j_0}) - \lambda(\lambda\psi_{i_0j_0}^{(i_n)}(\lambda) - \delta_{i_0j_0}) \\
&= \lambda^2\psi_{i_0j_0}^{(\infty)}(\lambda) - \lambda^2\psi_{i_0j_0}^{(i_n)}(\lambda) \\
&= \lambda(1 - \lambda\sum_{j\in E}\psi_{i_0j}^{(i_n)}(\lambda)) - \lambda(1 - \lambda\sum_{j\in E}\psi_{i_0j}^{(\infty)}(\lambda)) \\
&\quad + \lambda^2\sum_{j\in E-\{j_0\}}(\psi_{i_0j}^{(i_n)}(\lambda) - \psi_{i_0j}^{(\infty)}(\lambda)) \\
&\leqslant \lambda(1 - \lambda\sum_{j\in E}\psi_{i_0j}^{(i_n)}(\lambda)) - \lambda(1 - \lambda\sum_{j\in E}\psi_{i_0j}^{(\infty)}(\lambda)) \\
&\leqslant \lambda(1 - \lambda\sum_{j\in E}\psi_{i_0j}^{(i_n)}(\lambda)) .
\end{aligned}$$

由(8.1.30)有 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda(1 - \lambda\sum\limits_{j\in E}\psi_{i_0j}^{(i_n)}(\lambda)) = 0$. 故

$$q_{i_0j_0}^{(\infty)} = q_{i_0j_0}^{(i_n)} = q_{i_0j_0}.$$

因此 $Q^{(\infty)} = Q$.

这样就得到了一个 Q 过程 $\Psi^{(\infty)}(\lambda)$ 且满足(8.1.31)式；因此，Q 是 Q－矩阵.

任取 E 上一不恒等于零的非负可和行向量 $v = (v_i, i \in E)$. 令

$$\tilde{\Psi}(\lambda) = \Psi^{(\infty)}(\lambda) + (1 - \lambda\Psi^{(\infty)}(\lambda)1)\,\frac{v\Psi^{(\infty)}(\lambda)}{\lambda v\Psi^{(\infty)}(\lambda)1} .$$

由第三章 Q 过程的性质以及(8.1.31)式知 $\tilde{\Psi}(\lambda)$ 是诚实 Q 过程.

最后，假设"双无限"拟 Q－矩阵的稳定态不全保守. 由于 Q_{K_2} 满足(S)条件，不妨设 K 是 Q_{K_2} 的安全因子，将 K 分为两个无穷集 K_1, K_2 之并 $K = K_1 \cup K_2, K_1 \cap K_2 = \varnothing$.

任取 $b \overline{\in} E$，定义 $\{b\} \cup E$ 上"双无限"拟 Q — 矩阵 $\hat{Q} = (\hat{q}_{ij}; i, j \in \{b\} \cup E)$ 如下：

$$\hat{q}_{ij} = \begin{cases} q_{ij}, & i,j \in E; \\ -\infty, & i = j = b; \\ c_j, & i = b, j \in K_1; \\ q_i - \sum\limits_{k \in E - \{i\}} q_{ik}, & i \in E_1, j = b; \\ 0, & \text{其它 } i,j. \end{cases}$$

其中 $0 < c_j < +\infty \quad (j \in K_1), \sum\limits_{j \in K_1} c_j = +\infty$.

容易验证，$\hat{Q}$ 作为 $\{b\} \cup E$ 上的"双无限"拟 Q — 矩阵，满足定理 8.1.3 中的全部条件，其中 $\{i; \hat{q}_i < +\infty\} = E_1, \{i; \hat{q}_i = +\infty\} = \{b\} \cup E_2$. 并且 $\hat{Q}$ 的稳定态全保守，由上面证明的结果知，$\hat{Q}$ 是 Q — 矩阵. 设 $R(\lambda)$ 是一个 $\hat{Q}$ 过程.

对 $R(\lambda)$ 关于 b 使用分解定理有

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & {}_bR(\lambda) \end{pmatrix} + r_{bb}(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ \xi(\lambda) \end{pmatrix} (1, \eta(\lambda)).$$

其中 $\eta(\lambda)1 < +\infty$，且 $\eta(\lambda) \geqslant v_b R(\lambda)$，此处，$v = (\hat{q}_{bj}; j \in E)$ 是 E 上行向量，因此，$v_b R(\lambda) 1 < +\infty$. 令

$$\Psi(\lambda) = {}_bR(\lambda) + (1 - \lambda_b R(\lambda) 1) \frac{v_b R(\lambda)}{\lambda v_b R(\lambda) 1}.$$

注意 $v1 = \sum\limits_{j \in E} q_{bj} = \sum\limits_{j \in K_1} c_j = +\infty$，由第三章 Q 过程的性质可知，$\Psi(\lambda)$ 是诚实 Q 过程，故 Q 是 Q — 矩阵. 至此定理证毕.

§2 几类"双无限"Q — 矩阵

本节在一些限制条件下，将给出两类"双无限"拟 Q — 矩阵成为 Q — 矩阵的充要条件.

定理 8.2.1 设 Q 是"双无限"拟 Q — 矩阵，如果 Q_{E_1} 满足 (H) 条件，即 $\inf\limits_{i \in E_1} \sum\limits_{j \in E_1} \varphi_{ij}(\lambda) = C_\lambda > 0$，那么 Q 是 Q — 矩阵当且仅当下列

两条同时成立：

(i) $\sum_{j \in E_1} q_{ij} < +\infty, \quad (i \in E_2)$.

(ii) $Q_{E_2} = (q_{ij}; i, j \in E_2)$满足$(N)$、$(S)$ 条件，即Q_{E_2}是Q—矩阵.

当以上条件满足时还存在诚实Q过程.

证明 设Q是Q—矩阵，$\Psi(\lambda)$是一个Q过程；由定理 8.1.2 及Q_{E_1}满足(H)条件知(i)成立. 由引理 8.1.2 和引理 8.1.3 知Q_{E_2}是Q—矩阵，从而(ii)成立.

反之，如果(i)、(ii)成立，由定理 8.1.3，Q是Q—矩阵且存在诚实Q过程.

推论 8.2.1 设Q是"双无限"拟Q—矩阵，如果Q_{E_1}过程唯一，则Q是Q—矩阵当且仅当定理 8.2.1 中(i)、(ii)同时成立，当条件满足时还存在诚实Q过程.

证明 若Q_{E_1}不满足(H)条件，则Q_{E_1}过程必不唯一. 因此，由推论条件以及定理 8.2.1 知推论 8.2.1 成立.

推论 8.2.2 设Q是"双无限"拟Q—矩阵. 若$\sup_{i \in E_1} q_i < +\infty$，则$Q$是$Q$—矩阵当且仅当定理 8.2.1 中(i)、(ii)同时成立，当条件满足时还存在诚实Q过程.

证明 由于 $\varphi_{ii}(\lambda) \geq \frac{1}{\lambda + q_i}, \quad (\forall i \in E_1)$，由推论的条件 $\sup_{i \in E_1} q_i < +\infty$，因此，$\inf_{i \in E_1} \sum_{j \in E_1} \varphi_{ij}(\lambda) \geq \inf_{i \in E_1} \frac{1}{\lambda + q_i} > 0$，再由定理 8.2.1 得知推论成立.

由定理 8.1.1，若Q是"双无限"Q—矩阵，则Q必满足(S)条件，从而Q必有安全因子.

以下研究E_1不含Q的任何安全因子的"双无限"Q—矩阵.

设Q是"双无限"拟Q—矩阵，满足(N)条件，如果E_1不含Q的任何安全因子，即E_1的所有无限子集都不是Q的安全因子，由于Q满足(N)条件，仿引理 7.2.2(i) 的证明方法，不难证明，存在唯一

的有限子集 $H=\{b_1,\cdots,b_n\}\subset E_2$，使得

$$\liminf_{j\in E_1}\sum_{b\in H}q_{bj}>0,\qquad \liminf_{j\in E_1}\sum_{b\in H,b\neq b_k}q_{bj}=0,\quad(1\leqslant k\leqslant n).$$

$$(8.2.1)$$

而且

$$\sum_{j\in E_1}q_{ij}<+\infty,\qquad(i\in E_2-H).\tag{8.2.2}$$

定理 8.2.3 设 Q 是"双无限"拟 Q－矩阵，满足(N)条件，若 E_1 不含 Q 的任何安全因子，令 $H\subset E_2$ 是满足(8.2.1)、(8.2.2)的有限集，并且 $Q_{E_1\cup H}$ 的稳定态全保守．那么，Q 是 Q－矩阵的充要条件是下列(i)、(ii)同时成立，当条件满足时，还存在诚实 Q 过程．

(i) Q_{E_2} 是 Q－矩阵；即 Q_{E_2} 满足(N)、(S)条件；

(ii) $Q_{E_1\cup H}$ 是 Q－矩阵；即以下 C_1、C_2 同时成立：

C_1 $\quad\displaystyle\sum_{i,j\in E_1}q_{bi}\varphi_{ij}(\lambda)<+\infty,\qquad(\lambda>0,b\in H).$

C_2 方程

$$\begin{cases}(\lambda I-Q_{E_1})\bar{\xi}(\lambda)=\mathbf{0},\\ \mathbf{0}\leqslant\bar{\xi}(\lambda)\leqslant\mathbf{1}.\end{cases}(\lambda>0)\tag{8.2.3}$$

有满足以下条件的一族解 $\{\bar{\xi}^{(k)}(\lambda);k=1,\cdots,n\}\subset M_{\Phi(\lambda)}$：

$$\sum_{k=1}^{n}\bar{\xi}^{(k)}(\lambda)\leqslant\bar{X}(\lambda),\ \lim_{\lambda\to+\infty}\lambda e^{b_k}\Phi(\lambda)(\mathbf{1}-\Phi m^{b_k}-\bar{\xi}^{(k)})<+\infty.$$

其中，$\Phi(\lambda)$ 是最小 Q_{E_1} 过程，$\bar{X}(\lambda)$ 是方程(8.2.3)的最大解；$\Phi m^{b_k}=\lim\limits_{\lambda\to0}(\Phi(\lambda)m^{b_k})$，$\bar{\xi}^{(k)}=\lim\limits_{\lambda\to0}\bar{\xi}^{(k)}(\lambda)$；$e^{b_k}=(q_{b_kj};j\in E_1)$，$m^{b_k}=(q_{ib_k};i\in E_1)^T$ 分别是行向量和列向量．

证明 设 Q 是 Q－矩阵，$P(t)$ 是一个 Q 过程，由引理 8.1.1，$P^{E_1\cup H}(t)$ 是 $E_1\cup H$ 上马氏过程，设其 Q－矩阵为 $Q^{E_1\cup H}=(q_{ij}^{E_1\cup H};i,j\in E_1\cup H)$，则

$$q_{ij}^{E_1\cup H}\geqslant q_{ij},\qquad(i,j\in E_1\cup H).\tag{8.2.4}$$

由定理的条件 $Q_{E_1\cup H}$ 的稳定态全保守，故

$$q_{ij}^{E_1\cup H}=q_{ij},\qquad(i\in E_1,j\in E_1\cup H).\tag{8.2.5}$$

$$q_{b_k j}^{E_1 \cup H} \geqslant q_{b_k j}, \qquad (k = 1, \cdots, n; j \in E_1 \cup H). \quad (8.2.6)$$

使用 n 维分解定理易证，$Q^{E_1 \cup H}$ 中 $q_{b_k j}^{E_1 \cup H}$ $(k = 1, \cdots, n; j \in E_1 \cup H)$ 用 $q_{b_k j}$ 替换后的矩阵仍是 Q－矩阵，再注意(8.2.5)式得，$Q_{E_1 \cup H}$ 是 Q－矩阵. 由定理 7.2.7 知(ii)成立.

由于 Q 是 Q－矩阵，而 E_1 不含 Q 的任何安全因子，从而 E_2 必含有 Q 的安全因子，故 Q_{E_2} 满(S)条件；由于 Q 满足(N)条件，从而 Q_{E_2} 也满足(N)条件，故(i)成立.

下面证明条件的充分性.

设(i)、(ii)成立，令

$$d_i = \begin{cases} 0, & i \in E_1 \cup H; \\ \sum\limits_{j \in E_1} q_{ij}, & i \in E_2 - H. \end{cases} \qquad (8.2.7)$$

由(8.2.2)，$d_i < +\infty$. 设 $d^2 = (d_i; i \in E_2)$，$d = (d_i; i \in E)$ 分别是 E_2 上和 E 上列向量.

由(i)，Q_{E_2} 是全瞬时态 Q－矩阵，仿定理 8.1.3 的证明，可构造一个 Q_{E_2} 过程 ${}_d\Psi^{(2)}(\lambda)$，使得

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda(1 - \lambda_d \Psi^{(2)}(\lambda) 1) = d^2. \qquad (8.2.8)$$

对 ${}_d\Psi^{(2)}(\lambda)$ 关于 H 使用 n 维分解定理，有

$${}_d\Psi^{(2)}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Phi^{(2)}(\lambda) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A(\lambda) & A(\lambda)\eta(\lambda) \\ \xi(\lambda)A(\lambda) & \xi(\lambda)A(\lambda)\eta(\lambda) \end{pmatrix}, \qquad (8.2.9)$$

其中

$$\eta(\lambda) = \begin{pmatrix} \eta^1(\lambda) \\ \cdots \\ \eta^n(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \xi(\lambda) = (\xi^1(\lambda), \cdots, \xi^n(\lambda)),$$

$$\eta^k(\lambda) \in L_{\Phi^{(2)}(\lambda)}, \xi^k(\lambda) \in M_{\Phi^{(2)}(\lambda)};$$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda \eta_j^k(\lambda) = q_{b_k j}, \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda \xi_i^k(\lambda) = q_{ib_k}; \qquad (8.2.10)$$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda \eta^k(\lambda)(1 - \xi^k) < +\infty, \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda \eta^k(\lambda) \xi^m < +\infty, (m \neq k). \qquad (8.2.11)$$

设 $\Phi(\lambda)$ 是最小 Q_{E_1} 过程,令

$$\widetilde{\Phi}(\lambda) = \begin{pmatrix} \Phi(\lambda) & \\ & \Phi^{(2)}(\lambda) \end{pmatrix}, \tag{8.2.12}$$

$$\widetilde{\eta}^k(\lambda) = (e^{b_k}\Phi(\lambda), \eta^k(\lambda)),$$

$$\widetilde{\xi}^k(\lambda) = \begin{pmatrix} \Phi(\lambda)m^{b_k} + \bar{\xi}^{(k)}(\lambda), \\ \xi^k(\lambda) \end{pmatrix}, \tag{8.2.13}$$

$$\widetilde{\eta}(\lambda) = \begin{bmatrix} \widetilde{\eta}^1(\lambda) \\ \cdots \\ \widetilde{\eta}^n(\lambda) \end{bmatrix}, \widetilde{\xi}(\lambda) = (\widetilde{\xi}^1(\lambda), \cdots, \widetilde{\xi}^n(\lambda)), \tag{8.2.14}$$

$$\widetilde{\xi}^k = \lim_{\lambda\to 0}\widetilde{\xi}^k(\lambda), \tag{8.2.15}$$

$$\tilde{c}_{km} = -(q_{b_k b_m} + \lim_{\lambda\to +\infty} \lambda\widetilde{\eta}^k(\lambda)\widetilde{\xi}^m), \quad (m \neq k). \tag{8.2.16}$$

$$\tilde{c}_{kk} = \sum_{m=1, m\neq k}^{n} q_{b_k b_m} + \lim_{\lambda\to +\infty} \lambda\widetilde{\eta}^k(\lambda)(1 - \widetilde{\xi}^k). \tag{8.2.17}$$

显然,$\widetilde{\eta}^k(\lambda) \in L_{\widetilde{\Phi}(\lambda)}$,$\widetilde{\xi}^k(\lambda) \in M_{\widetilde{\Phi}(\lambda)}$.由(8.2.11)及定理条件可知,以上各式均有意义,$\tilde{c}_{km}$ 均为有限数.令

$$\widetilde{C} = (\tilde{c}_{km}; k, m = 1, \cdots, n);$$

$$[\widetilde{\eta}(\lambda), \widetilde{\xi}] = ([\widetilde{\eta}^k(\lambda), \widetilde{\xi}^m]; k, m = 1, \cdots, n).$$

由线性代数知识可知,$\widetilde{C} + \lambda I + \lambda[\widetilde{\eta}(\lambda), \widetilde{\xi}]$ 有非负逆矩阵,设 $\widetilde{A} = (\widetilde{C} + \lambda I + \lambda[\widetilde{\eta}(\lambda), \widetilde{\xi}])^{-1}$,令

$$\widetilde{\Psi}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{\Phi}(\lambda) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widetilde{A}(\lambda) & \widetilde{A}(\lambda)\widetilde{\eta}(\lambda) \\ \widetilde{\xi}(\lambda)\widetilde{A}(\lambda) & \widetilde{\xi}(\lambda)\widetilde{A}(\lambda)\widetilde{\eta}(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{8.2.18}$$

由 n 维分解定理,$\widetilde{\Psi}(\lambda)$ 是 E 上马氏过程,其 $Q-$ 矩阵 $\widetilde{Q} = (\tilde{q}_{ij}; i, j \in E)$ 满足

$$\tilde{q}_{ij} = \begin{cases} q_{ij}, & i \in E_1 \cup H, j \in E; \\ q_{ij}, & i \in E_2 - H, j \in E_2; \\ 0, & i \in E_2 - H, j \in E_1. \end{cases} \tag{8.2.19}$$

并且

$$\lim_{\lambda\to +\infty} \lambda(1 - \lambda\widetilde{\Psi}(\lambda)1) = d. \tag{8.2.20}$$

把 E_2-H 排序为 $E_2-H=\{i_1,i_2,\cdots\}$，仿定理8.1.3的证明方法，可构造一列马氏过程 $\{\widetilde{\Psi}^{(i_n)}(\lambda)\}_{n=1}^{\infty}$，满足

$$\widetilde{\Psi}(\lambda)\leqslant\widetilde{\Psi}^{(i_1)}(\lambda)\leqslant\cdots\cdots.$$

令

$$\widetilde{\Psi}^{(\infty)}(\lambda)=\lim_{n\to\infty}\widetilde{\Psi}^{(i_n)}(\lambda),$$

则 $\widetilde{\Psi}^{(\infty)}(\lambda)$ 是 Q 过程，且有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda(1-\lambda\widetilde{\Psi}^{(\infty)}(\lambda)1)=0. \tag{8.2.21}$$

因此，Q 是 $Q-$ 矩阵.

任取 E 上不恒为零的非负可和行向量 $\alpha=(\alpha_i;i\in E)$，令

$$R(\lambda)=\widetilde{\Psi}^{(\infty)}(\lambda)+(1-\lambda\widetilde{\Psi}^{(\infty)}(\lambda)1)\frac{\alpha\widetilde{\Psi}^{(\infty)}(\lambda)}{\lambda\alpha\widetilde{\Psi}^{(\infty)}(\lambda)1}.$$

由第三章 Q 过程的性质及(8.2.21)知，$R(\lambda)$ 是诚实 Q 过程. 到此定理证毕.

§3 补充与注记

关于“双无限”Q 过程的研究，由于缺少行之有效的方法，在此之前几乎没有什么结果. 刘再明在分解定理的基础上，应用 Q 过程的时间变换和极限方法来研究“双无限”Q 过程，讨论了它们的一系列性质；并且，在若干特殊情况之下，得到了 Q 过程的存在性准则. 但由于难度较大，离彻底解决 Q 过程的存在性问题还相距较远. 因此，有待于人们作出一番艰苦的努力. 本章取自于刘再明[1]；其中，定理 8.1.3 首先在侯振挺、费志凌[1] 中被提到.

9 带瞬时态Q—矩阵的若干例子

由第七、八两章知，对于有限瞬时无限稳定以及“双无限”两种情况，没有完全解决 Q 过程的存在性问题. 本章将讨论几种特殊的含瞬时态的拟 Q — 矩阵. 一方面，它们在 Q 过程理论和应用中占有重要的和特殊的地位；另一方面，对这些拟 Q — 矩阵，Q 过程及诚实 Q 过程的存在性问题解决较彻底，而且对它们的研究往往是产生解决一般 Q — 矩阵问题的思想和方法的源泉.

§1 含瞬时态的对角型 Q — 矩阵

定义 9.1.1 称拟 Q — 矩阵 $Q=(q_{ij})$ 为对角型的，如果满足条件

$$q_{ij}=0,\quad (i\neq j). \tag{9.1.1}$$

记 $E_1=\{i\in E: q_i<+\infty\}$， $E_2=\{i\in E: q_i=+\infty\}$.

定理 9.1.1 设 Q 是含瞬时态的对角型拟 Q — 矩阵，则

(i) 若 E_2 是有限集，那么 Q 是 Q — 矩阵的充要条件是

$$\sup_{i\in E_1} q_i=+\infty. \tag{9.1.2}$$

(ii) 若 E_2 是无穷集，那么 Q 必为 Q — 矩阵.

而且在上述两种情况下，只要 Q 是 Q — 矩阵，则均存在无穷多个诚实 Q 过程.

证明 先证(ii).

若 E_1 为空集或有限集，则 Q 为全瞬时态或有限个稳定态无限个瞬时态的对角型拟 Q — 矩阵，显然 Q 满足(N)、(S) 条件，由定理 5.1.1 和定理 6.1.1 知，Q 是 Q — 矩阵，且存在无穷多个诚实 Q 过程.

若 E_1 为无穷集，不妨设 $E_1 = \{i_1, i_2, i_3, \cdots\}$，由于 E_2 为无穷集，从而可把 E_2 分解为 $E_2 = E_{21} \cup E_{22} \cup E_{23} \cup \cdots$，其中每个 $E_{2k}(k = 1,2,\cdots)$ 均为无穷集，且两两互不相交. 令

$$E_{(k)} = \{i_k\} \cup E_{2k}, \qquad (k = 1,2,\cdots). \tag{9.1.3}$$

则

$$E = E_{(1)} \cup E_{(2)} \cup \cdots.$$

从而 Q 可写为

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{(1)} & & \\ & Q_{(2)} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}, \tag{9.1.4}$$

其中 $Q_{(k)}$ 是 Q 在 $E_{(k)}$ 上的限制，它是含一个稳定态无穷个瞬时态的对角型拟 Q — 矩阵，由前面证明的结论知 $Q_{(k)}$ 是 Q — 矩阵，且存在无穷多个诚实 $Q_{(k)}$ 过程. 若设 $\Psi^{(k)}(\lambda)$ 是 $Q_{(k)}$ 过程，显然

$$\Psi(\lambda) = \begin{pmatrix} \Psi^{(1)}(\lambda) & & \\ & \Psi^{(2)}(\lambda) & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \tag{9.1.5}$$

是 Q 过程. 由此可知，Q 是 Q — 矩阵且存在无穷多个诚实 Q 过程.

(i) 的证明.

先证明只要对 E_2 为单点集证明了(i) 即可. 事实上，若 E_2 为单点集时(i) 成立，则当 E_2 为有限集时，不妨设 $E_2 = \{i_1, \cdots, i_N\}$，由于 $\sup\limits_{i \in E_1} q_i = +\infty$，存在$\{E_{1k}\}_{k=1}^{N}$ 满足

$$\sup_{i \in E_{1k}} q_i = +\infty, \quad (k = 1, \cdots, N),$$

$$E_1 = \bigcup_{k=1}^{N} E_{1k},$$

$$E_{1k} \cap E_{1m} = \varnothing, \quad (k \neq m). \tag{9.1.6}$$

令

$$E_{(k)} = \{i_k\} \cup E_{1k}, \qquad (k = 1, \cdots, N),$$

则

$$E = E_{(1)} \cup E_{(2)} \cdots \cup E_{(N)}.$$

然后仿照(ii) 的后半部分证明，可证 Q 是 Q — 矩阵，且存在无穷多

个诚实 Q 过程.

因此,我们只要证明下述论断即可:如果单瞬时态对角型拟 Q - 矩阵 Q 满足,$\sup_{i\in E_1} q_i = +\infty$,则 Q 是 Q - 矩阵且存在无穷多个诚实 Q 过程;而这一论断是以下 §2 中主要定理的一种特殊情况(见推论 9.2.1),为了避免重复,在此就不证明了.

§2　单瞬时态加边对角型 Q - 矩阵

设 $E = \{0,1,2,\cdots\}$

$$Q = \begin{pmatrix} -\infty & b_1 & b_2 & \cdots \\ & -q_1 & & \\ & & -q_2 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}, \tag{9.2.1}$$

其中 $0 \leqslant b_i < +\infty$, $0 \leqslant q_i < +\infty$, $(i = 1,\cdots)$.

D. Williams[3] 中,使用以上这种矩阵对应的 Q 过程来构造全瞬时态过程,但他没有讨论(9.2.1) 中 Q 成为 Q - 矩阵的充要条件,下述定理给出了回答.

定理 9.2.1　设 Q 形如(9.2.1),则 Q 成为 Q - 矩阵的充要条件是以下两条同时成立:

(i)　对某 $\lambda > 0$(从而对一切 $\lambda > 0$),

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{\lambda + q_i} < +\infty, \tag{9.2.2}$$

(ii)　存在无穷集 $K \subset \{1,2,\cdots\}$,使

$$\sum_{i\in K} b_i < +\infty, \tag{9.2.3}$$

$$\sup_{i\in K} q_i = +\infty. \tag{9.2.4}$$

当以上条件满足时,存在无穷多个诚实 Q 过程.

为了证明以上定理,先给出几个引理.

引理 9.2.1　设 $0 \leqslant a_i < \infty$, $0 \leqslant b_i < \infty$, $(i = 1,2,\cdots)$,满足条件

$$\forall\ \varepsilon > 0,\quad \sup_{i\in\{i:b_i<\varepsilon\}} a_i = +\infty, \tag{9.2.5}$$

则存在无穷子集 $K \subset \{1,2,\cdots\}$，使

$$\sum_{i\in K} b_i < +\infty, \tag{9.2.6}$$

$$\sup_{i\in K} a_i = -\infty. \tag{9.2.7}$$

证明 令

$$A_k = \{i:b_i < 1/k^2\},\quad (k = 1,2,\cdots).$$

由(9.2.5)得

$$\sup_{i\in A_k} a_i = +\infty,\quad (k = 1,2,\cdots).$$

从而每个 A_k 均为无穷集且可找 $i_k \in A_k (k = 1,2,\cdots)$，满足

$$i_1 < i_2 < \cdots,\qquad a_{i_k} \geqslant k. \tag{9.2.8}$$

令

$$K = \{i_1, i_2, \cdots\}.$$

则 K 是无穷集且 $K \subset \{1,2,\cdots\}$，由 A_k 的定义及 $i_k \in A_k$ 得

$$\sum_{i\in K} b_i = \sum_{k=1}^{\infty} b_{i_k} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty.$$

由(9.2.8)得

$$\sup_{i\in K} a_i = \sup\{a_{i_k}, k = 1,2,\cdots\} = +\infty.$$

故(9.2.6)、(9.2.7)成立. 引理 9.2.1 证毕.

引理 9.2.2 设 $0 \leqslant a_i < +\infty, 0 \leqslant b_i < +\infty,\quad (i = 1,2,\cdots)$，若存在无穷子集 $K \subset \{1,2,\cdots\}$，使(9.2.6)、(9.2.7)成立，则存在无穷多个无穷集 $B_n, (n = 1,2,\cdots)$，使

$$B_i \cap B_j = \varnothing, (i \neq j);\quad \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \{1,2,\cdots\}; \tag{9.2.9}$$

且满足

$$\sum_{i\in B_n} b_i < +\infty;\quad \sup_{i\in B_n} a_i = +\infty, (n = 1,2,\cdots). \tag{9.2.10}$$

证明 由于 $\{1,2,\cdots\}$ 的任何子集至多可数，故不妨假定 $K = \{1,2,\cdots\}$，且 $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots, \lim\limits_{i\to+\infty} a_i = +\infty$；否则，可将不满足这些条件的元素 $\{i\}$ 分散，在每个满足(9.2.10)的集合 B_n 中各

添加至多一个这样的 i,(9.2.10) 仍然成立.

将 $\{a_i\}_1^\infty$ 按下列规则排列:

$$
\begin{array}{ccccc}
a_1 & a_2 & a_4 & a_7 & \cdots \\
a_3 & a_5 & a_8 & \cdots & \cdots \\
a_6 & a_9 & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{10} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

取上述排列的第 n 行为 $B_n, n=1,2,\cdots$. 这样得到的 $\{B_n\}_1^\infty$ 显然满足 (9.2.9)、(9.2.10).

引理 9.2.3 设 Q 是 Q — 矩阵,$P(t)=(p_{ij}(t))$ 是一个 Q 过程,$H \subsetneqq E$. 若

$$q \doteq \sup_{i\in H} < +\infty,$$

则 ${}_HP(t)=({}_Hp_{ij}(t); i,j \in E-H)$ 是 $Q_{(E-H)}$ 过程.

此处 ${}_Hp_{ij}(t)$ 表示禁止概率(见 K. L. Chung[1] Ⅱ § 11),$Q_{(E-H)}=(q_{ij}; i,j\in E-H)$ 是 Q 在 $E-H$ 上的限制.

证明 由引理 8.1.2 和引理 8.1.3 立得引理成立.

引理 9.2.4 设 Q 形如(9.2.1),若 Q 是 Q — 矩阵,则对任意 $\varepsilon>0$,

$$\sup_{i\in\{i; b_i<\varepsilon\}} q_i = +\infty. \tag{9.2.11}$$

证明 记 $E_0=\{1,2,\cdots\}$,0 为 Q 的瞬时态,设 $P(t)$ 是一个 Q — 矩阵. 假如引理结论不真,则存在 $\varepsilon_0>0$,使

$$q=\sup_{i\in H} q_i < +\infty. \tag{9.2.12}$$

此处 $H=\{i\in E_0; b_i<\varepsilon_0\}$.

记 $F_1=E_0-H, F_2=E-H$,由引理 9.2.3 ${}_HP(t)$ 是 Q_{F_2} 过程,注意 $i\in E_1, b_i\geqslant\varepsilon_0$. 由定理 7.1.12 有

$$\sum_{j,k\in F_1} b_j\varphi_{jk}(\lambda)(\lambda+d_k)<+\infty, \tag{9.2.13}$$

其中 d_k 表示 Q_{F_2} 的状态 k 的非保守量,$(\varphi_{jk}(\lambda); j,k\in F_1)$ 是最小 Q_{F_1} 过程.

注意 Q_{F_1} 为对角型矩阵，知

$$\varphi_{jk}(\lambda) = \frac{\delta_{jk}}{\lambda + q_j}.$$

而

$$d_k = q_k - \sum_{j \in F_2 - \{k\}} q_{kj} = q_k,$$

故(9.2.13) 等价于

$$\sum_{j \in F_1} b_j \frac{1}{\lambda + q_j}(\lambda + q_j) < +\infty,$$

即

$$\sum_{j \in F_1} b_j < +\infty. \tag{9.2.14}$$

注意 F_1 必为无穷集，否则 $F_2 = \{0\} \cup F_1$ 为有限集，而 $_{H}P(t)$ 是有限个状态马氏过程与 0 是瞬时态矛盾. 于是由 $b_j \geqslant \varepsilon_0 (j \in F_1)$ 及 F_1 是无限集知(9.2.14) 不成立，矛盾！从而引理成立.

引理 9.2.5 设 F 为非空集，$0 \leqslant a_i < +\infty, 0 \leqslant b_i < +\infty (i \in F)$，若对某 $\lambda > 0$

$$\sum_{j \in F} \frac{b_i}{\lambda + a_i} < +\infty, \tag{9.2.15}$$

则对一切 $\lambda > 0$，(9.2.15) 成立.

证明 显然.

引理 9.2.6 设 Q 是任意一个全稳定 Q − 矩阵，$\Phi(\lambda)$ 是最小 Q 过程，令 $Z(\lambda) = 1 - \lambda\Phi(\lambda)1$. 若 Q 过程 $\Psi(\lambda) = (\psi_{ij}(\lambda))$ 有如下形式：

$$\psi_{ij}(\lambda) = \varphi_{ij}(\lambda) + Z_i(\lambda)F_j(\lambda), \qquad (\lambda > 0). \tag{9.2.16}$$

这里 $F(\lambda) = (F_j(\lambda))$ 为非负可和行向量，则 $F(\lambda) - F(\mu) + (\lambda - \mu)F(\lambda)\Psi(\mu) = 0 \quad (\lambda, \mu > 0).$ (9.2.17)

证明 $\lambda, \mu > 0$，利用

$$Z(\lambda) - Z(\mu) + (\lambda - \mu)\Phi(\lambda)Z(\mu) = 0,$$

$$\Phi(\lambda) - \Phi(\mu) + (\lambda - \mu)\Phi(\lambda)\Phi(\mu) = 0,$$

$$\Psi(\lambda) - \Psi(\lambda) + (\lambda - \mu)\Psi(\lambda)\Psi(\mu) = 0.$$

这三个恒等式及(9.2.16)立得(9.2.17).

引理 9.2.7 设 Q 为对角形

$$Q = \begin{pmatrix} -q_1 & & & \\ & -q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}, \qquad (0 \leqslant q_i < +\infty). \tag{9.2.18}$$

且 $\sup\limits_{i \geqslant 1} q_i = +\infty$,取 $\alpha = (\alpha_i; i \geqslant 1)$ 满足

$$\alpha \geqslant \mathbf{0}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = +\infty, \tag{9.2.19}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{q_i} < +\infty, \tag{9.2.20}$$

这里若 $q_i = 0$,则取 $\alpha_i = 0$ 并约定 $0/0 = 0$.

再取 $c \geqslant 0$,然后令

$$\psi_{ij}(\lambda) = \frac{\delta_{ij}}{\lambda + q_i} + \frac{q_i}{\lambda + q_i} \frac{\alpha_j/(\lambda + q_j)}{c + \lambda \sum\limits_k \alpha_k/(\lambda + q_k)}, \qquad (\lambda > 0), \tag{9.2.21}$$

则 $\Psi(\lambda) = (\psi_{ij}(\lambda))$ 是 Q 过程.

证明 直接验证或由定理 3.6.2 可得

$$\Psi(\lambda) \geqslant \mathbf{0}, \lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1} \leqslant \mathbf{1},$$

$$\Psi(\lambda) - \Psi(\mu) + (\lambda - \mu)\Psi(\lambda)\Psi(\mu) = \mathbf{0},$$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda(\lambda\Psi(\lambda) - I) = Q,$$

故 $\Psi(\lambda)$ 是 Q 过程. 引理证毕.

以下证明定理 9.2.1.

首先,由引理 9.2.5 知,对一切 $\lambda > 0$,(9.2.2)或者恒成立,或者恒不成立.

必要性 设 Q 是一个 Q — 矩阵,由推论 7.1.1 得

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{\lambda + q_i} < +\infty, \quad (\lambda > 0),$$

即(9.2.2)成立,从而条件(i)是必要的. 又由引理 9.2.4 和引理 9.

2.1 知，条件(ii) 也是必要的.

充分性　设(i)，(ii) 成立. 由(ii) 和引理 9.2.2 知，存在无穷多个无穷集 $B_n, n = 1,2,\cdots$；使

$$B_i \cap B_j = \varnothing \quad (i \neq j), \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \{1,2,\cdots\},$$

且

$$\sum_{i \in B_n} b_i < +\infty,$$

$$\sup_{i \in B_n} q_i = +\infty \quad (n = 1,2,\cdots). \tag{9.2.22}$$

对每个 n，作对角型 Q - 矩阵 $Q^{(n)} = (q_{ij}^{(n)}; i,j \in B_n)$，其中

$$q_{ij}^{(n)} = \begin{cases} -q_i, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (i,j \in B_n).$$

对每个 $Q^{(n)}$，取 $\alpha^{(n)} = (\alpha_i^{(n)}; i \in B_n)$，使

$$\alpha^{(n)} \geqslant 0, \quad \sum_{i \in B_n} \alpha_i^{(n)} = +\infty, \quad \sum_{i \in B_n} \frac{\alpha_i^{(n)}}{q_i} < \frac{1}{n^2}. \tag{9.2.23}$$

(当 $q_i = 0$ 时，取相应的 $\alpha_i^{(n)} = 0$)，由(9.2.22)，这样的 $\alpha^{(n)}$ 总可取到. 又取常数 $c^{(n)} \geqslant \max\{\sum_{i \in B_n} b_i, 1\}$. 然后令

$$\psi_{ij}^{(n)}(\lambda) = \frac{\delta_{ij}}{\lambda + q_i} + \frac{q_i}{\lambda + q_i} \frac{\alpha_j^{(n)}/(\lambda + q_j)}{c^{(n)} + \lambda \sum_{k \in B_n} \alpha_k^{(n)}/(\lambda + q_k)},$$

$$(\lambda > 0; i,j \in B_n).$$

则由引理 9.2.7，$\Psi^{(n)}(\lambda) = (\psi_{ij}^{(n)}(\lambda))$ 是 B_n 上的 $Q^{(n)}$ 过程，其密度矩阵 $Q^{(n)}$ 是 Q 在 B_n 上的限制. 令

$$\overline{Q} = \begin{pmatrix} Q^{(1)} & & \\ & Q^{(2)} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}.$$

则 $\overline{Q}$ 是 Q 在 $E_0 = \{1,2,\cdots\}$ 上的限制(除了排列次序可能不同以外). 又令

$$\Psi(\lambda) = \begin{pmatrix} \Psi^{(1)}(\lambda) & & \\ & \Psi^{(2)}(\lambda) & \\ & & \ddots \end{pmatrix},$$

则 $\Psi(\lambda)$ 是 $\overline{Q}$ 过程.

对每个 n,令

$$\xi_i^{(n)}(\lambda) = 1 - \lambda \sum_{j\in B_n} \psi_{ij}^{(n)}(\lambda), \quad (i \in B_n). \tag{9.2.24}$$

$$\eta_j^{(n)}(\lambda) = \sum_{i\in B_n} b_i \psi_{ij}^{(n)}(\lambda) + \frac{\alpha_j^{(n)}}{\lambda + q_j} \frac{c^{(n)}}{c^{(n)} + \lambda \sum_{k\in B_n} \alpha_k^{(n)}/(\lambda + q_k)}, \tag{9.2.25}$$

则由第三章 § 1 知,列向量 $\xi^{(n)}(\lambda) = (\xi_i^{(n)}(\lambda); i \in B_n)$ 是广义列协调族,即

$$\xi^{(n)}(\lambda) - \xi^{(n)}(\mu) + (\lambda - \mu)\Psi^{(n)}(\lambda)\xi^{(n)}(\mu) = \mathbf{0}, \quad (\lambda, \mu > 0), \tag{9.2.26}$$

由引理 9.2.6 知

$$\eta^{(n)}(\lambda) - \eta^{(n)}(\mu) + (\lambda - \mu)\eta^{(n)}(\lambda)\Psi^{(n)}(\mu) = \mathbf{0}, \quad (\lambda, \mu > 0), \tag{9.2.27}$$

即 $\eta^{(n)}(\lambda)$ 是广义行协调族,其中 $\eta^{(n)}(\lambda) = (\eta_i^{(n)}(\lambda); i \in B_n)$ 是可和行向量.

令

$$\xi(\lambda) = \begin{pmatrix} \xi^{(1)}(\lambda) \\ \xi^{(2)}(\lambda) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \eta(\lambda) = (\eta^{(1)}(\lambda) \quad \eta^{(2)}(\lambda) \quad \cdots).$$

则由(9.2.26),(9.2.27) 及 $\Psi(\lambda)$ 的定义知

$$\xi(\lambda) - \xi(\mu) + (\lambda - \mu)\Psi(\lambda)\xi(\mu) = \mathbf{0}, \quad (\lambda, \mu > 0), \tag{9.2.28}$$

$$\eta(\lambda) - \eta(\mu) + (\lambda - \mu)\eta(\lambda)\Psi(\mu) = \mathbf{0}, \quad (\lambda, \mu > 0). \tag{9.2.29}$$

由(9.2.24) 及 $\Psi^{(n)}(\lambda)$ 的定义得

$$\mathbf{0} \leqslant \xi(\lambda) \leqslant \mathbf{1}, \quad (\lambda > 0), \tag{9.2.30}$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\xi(\lambda) = \mathbf{0}. \tag{9.2.31}$$

显然有

$$\eta(\lambda) \geqslant \mathbf{0}, \quad (\lambda > 0). \tag{9.2.32}$$

往证

$$\eta(\lambda)\mathbf{1} < +\infty. \tag{9.2.33}$$

$$\eta(\lambda)\mathbf{1} = \sum_{n=1}^{\infty} \eta^{(n)}(\lambda)\mathbf{1} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j\in B_n} \eta_j^{(n)}(\lambda)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j\in B_n} \sum_{i\in B_n} b_i \psi_{ij}^{(n)}(\lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j\in B_n} \frac{\alpha_j^{(n)}}{\lambda + q_j} \frac{c^{(n)}}{c^{(n)} + \lambda \sum_{k\in B_n} \alpha_k^{(n)}/(\lambda + q_k)}.$$

$$\tag{9.2.34}$$

由于 $c^{(n)} \geqslant \sum_{i\in B_n} b_i$，故

$$\sum_{l\in B_n} \frac{b_l q_l}{\lambda + q_l} \left(c^{(n)} + \lambda \sum_{k\in B_n} \frac{\alpha_k^{(n)}}{\lambda + q_k}\right)^{-1} \leqslant \frac{\sum_{k\in B_n} b_k}{c^{(n)}} \leqslant 1.$$

$$\tag{9.2.35}$$

由条件(i) 及 $\Psi^{(n)}(\lambda)$ 的定义和(9.2.35)，得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j\in B_n} \sum_{i\in B_n} b_i \psi_{ij}^{(n)}(\lambda)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{\lambda + q_i} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j\in B_n} \frac{b_i q_i}{\lambda + q_i}\right)\left(c^{(n)}\right.$$

$$\left. + \lambda \sum_{i\in B_n} \alpha_k^{(n)}/(\lambda + q_k)\right)^{-1} \sum_{j\in B_n} \frac{\alpha_j^{(n)}}{\lambda + q_j}$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{\lambda + q_i} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty. \tag{9.2.36}$$

而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j\in B_n} \frac{\alpha_j^{(n)}}{\lambda + q_j} \frac{c^{(n)}}{c^{(n)} + \lambda \sum_{k\in B_n} \alpha_k^{(n)}/(\lambda + q_k)}$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j\in B_n} \frac{\alpha_j^{(n)}}{\lambda + q_j}$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty. \tag{9.2.37}$$

从而

$$\eta(\lambda)\mathbf{1} < +\infty.$$

由 $\eta(\lambda)$ 的定义易得

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\eta_j(\lambda) = b_j \qquad (j = 1,2,\cdots). \tag{9.2.38}$$

又因

$$\begin{aligned}
&\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\eta^{(n)}(\lambda)\mathbf{1} \\
&\geqslant c^{(n)} \lim_{\lambda\to\infty} \Big(\sum_{j\in B_n} \frac{\lambda\alpha_j^{(n)}}{\lambda+q_j}\Big/\big(c^{(n)} + \sum_{j\in B_n} \lambda\alpha_j^{(n)}/(\lambda+q_j)\big)\Big) \\
&= c^{(n)} \geqslant 1,
\end{aligned}$$

故

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\eta(\lambda)\mathbf{1} = +\infty. \tag{9.2.39}$$

最后，令

$$r_{00}(\lambda) = \frac{1}{\lambda + \lambda\eta(\lambda)\mathbf{1}}, \qquad (\lambda > 0),$$

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Psi(\lambda) \end{pmatrix} + r_{00}(\lambda)\begin{pmatrix} 1 \\ \xi(\lambda) \end{pmatrix}(1 \quad \eta(\lambda)), \quad (\lambda > 0). \tag{9.2.40}$$

由分解定理(定理 3.2.3)，$R(\lambda)$ 是诚实 Q 过程.

以下证明存在无穷多个诚实 Q 过程.

我们重新构造一个异于 $R(\lambda)$ 的诚实 Q 过程 $\tilde{R}(\lambda)$. 任取两个 B_i, B_j，不妨设为 B_1, B_2，在 B_2 中任取一元素 i_0，满足 $q_{i_0} > 0$. 以 $B_1 \cup \{i_0\}$ 和 $B_2 - \{i_0\}$ 分别作为以上构造 $R(\lambda)$ 时的 B_1 和 B_2，其它 B_i 不变，完全按照上述构造 $R(\lambda)$ 的程序来构造 $\tilde{\Psi}^{(n)}(\lambda), \tilde{\Psi}(\lambda)$，进而又得到一个诚实 Q 过程 $\tilde{R}(\lambda)$. 但由 $\Psi^{(n)}(\lambda)$ 的定义知，存在 $j \in B_2 - \{i_0\}$ 使 $\psi_{i_0j}^{(2)}(\lambda) > 0$，从而 $\psi_{i_0j}(\lambda) > 0$，但 $\forall\ j \in B_2 - \{i_0\}, \tilde{\psi}_{i_0j}(\lambda) = 0$，故 $\Psi(\lambda) \neq \tilde{\Psi}(\lambda)$，由(9.2.40)及分解定理中分解式的唯一性(定理 3.2.3)，得 $R(\lambda) \neq \tilde{R}(\lambda)$. 由于上述的 i_0 选择和 B_1, B_2 的选择有

无穷多种，故存在无穷多个不同的诚实 Q 过程.

推论 9.2.1 设 Q 形如

$$Q=\begin{pmatrix} -\infty & & & \\ & -q_1 & & \\ & & -q_2 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix},$$

其中，$0\leqslant q_i<\infty \quad i=1,2,\cdots$. 则 Q 是 $Q-$ 矩阵的充要条件是

$$\sup\{q_i;i=1,2,\cdots\}=\infty.$$

且当上述条件满足时存在无穷多个诚实 Q 过程.

证明 在定理 9.2.1 中取 $b_i=0, \quad i=1,2,\cdots$. 即得本推论.

§3 KOLMOGOROV 矩阵及其推广

A. N. Kolmogorov[3] 曾提出研究形如

$$Q=\begin{pmatrix} -\infty & 1 & 1 & \cdots \\ q_1 & -q_1 & & \\ q_2 & & -q_2 & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} \tag{9.3.1}$$

(其中 $0<q_j<+\infty, j\geqslant 1$) 的单瞬时拟 $Q-$ 矩阵.

我们称形如(9.3.1)的矩阵 Q 为 Kolmogorov 矩阵，简称柯氏矩阵. 关于柯氏矩阵的 Q 过程的存在性有以下结论.

定理 9.3.1 设 Q 形如(9.3.1)，则 Q 是 $Q-$ 矩阵的充要条件是

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{q_j}<+\infty. \tag{9.3.2}$$

并且，当以上条件满足时，存在唯一的诚实 Q 过程.

证明 若 Q 是 $Q-$ 矩阵，则推论 7.1.1 得

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda+q_j}<+\infty, \qquad (\lambda>0).$$

注意 $0 < q_j < +\infty$，知上式等价于(9.3.2)．从而(9.3.2)成立．

反之，若(9.3.2)成立．记 $E=\{0,1,2,\cdots\}$，$E_0=\{1,2,\cdots\}$，Q_{E_0} 是 Q 在 E_0 上的限制．由(9.3.2)可得．

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda+q_j}<+\infty. \tag{9.3.3}$$

令

$$\Phi(\lambda)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\lambda+q_1} & & \\ & \frac{1}{\lambda+q_2} & \\ & & \ddots\end{pmatrix}, \tag{9.3.4}$$

$$\eta(\lambda)=\left(\frac{1}{\lambda+q_1},\frac{1}{\lambda+q_2},\cdots\right), \tag{9.3.5}$$

$$\xi(\lambda)=1-\lambda\Phi(\lambda)1=\begin{pmatrix}\frac{q_1}{\lambda+q_1}\\ \frac{q_2}{\lambda+q_2}\\ \vdots\end{pmatrix}, \tag{9.3.6}$$

$$\psi_{00}(\lambda)=\frac{1}{\lambda+\lambda\eta(\lambda)1}=\frac{1}{\lambda+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda}{\lambda+q_j}}, \tag{9.3.7}$$

$$\Psi(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \Phi(\lambda)\end{pmatrix}+\psi_{00}(\lambda)\begin{pmatrix}1\\ \xi(\lambda)\end{pmatrix}(1 \quad \eta(\lambda)). \tag{9.3.8}$$

由(9.3.3)以上各式均有意义，由分解定理知，$\Psi(\lambda)$ 是一个诚实 Q 过程．

最后，若 $R(\lambda)$ 也是一个诚实 Q 过程，以下证明 $R(\lambda)=\Psi(\lambda)$，从而证明了存在唯一的诚实 Q 过程．

对 $R(\lambda)$ 关于瞬时态 0，使用分解定理得

$$R(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & {}_0R(\lambda)\end{pmatrix}+r_{00}(\lambda)\begin{pmatrix}1\\ \xi^{(0)}(\lambda)\end{pmatrix}(1 \quad \eta^{(0)}(\lambda)), \tag{9.3.9}$$

其中 ${}_0R(\lambda)$ 是 Q_{E_0} 过程，$\xi^{(0)}(\lambda)=1-\lambda{}_0R(\lambda)1$，

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta^{(0)}(\lambda) = (1,1,\cdots) \equiv e,$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\xi^{(0)}(\lambda) = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \equiv q.$$

注意 Q_{E_0} 的非保守量正好为 q,以及

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1-\lambda_0 R(\lambda)1) = \lim_{\lambda\to\infty}\lambda\xi^{(0)}(\lambda) = q$$

得${}_0R(\lambda)$ 是 B 型 Q_{E_0} 过程,注意 Q_{E_0} 是对角型矩阵,从而零流出,因此${}_0R(\lambda)$ 是最小 Q_{E_0} 过程,即

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda+q_1} & & \\ & \frac{1}{\lambda+q_2} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} = \Phi(\lambda). \tag{9.3.10}$$

从而

$$\xi^{(0)}(\lambda) = 1 - \lambda\Phi(\lambda)1 = \xi(\lambda). \tag{9.3.11}$$

注意 $\lambda\eta^{(0)}(\lambda) \to e \quad (\lambda\to+\infty)$,$Q_{E_0}$ 零流入,$\eta^{(0)}(\lambda)$ 是关于最小 Q_{E_0} 过程 $\Phi(\lambda)$ 的行协调族,由引理 3.1.7 得

$$\eta^{(0)}(\lambda) = e\Phi(\lambda) = \eta(\lambda). \tag{9.3.12}$$

再由 $R(\lambda)$ 是诚实的得

$$r_{00}(\lambda) = \frac{1}{\lambda+\lambda\eta^{(0)}(\lambda)1} = \frac{1}{\lambda+\lambda\eta(\lambda)1} = \psi_{00}(\lambda). \tag{9.3.13}$$

由 (9.3.10) — (9.3.13) 及 (9.3.8)、(9.3.9) 得 $R(\lambda) = \Psi(\lambda)$. 定理证毕.

若将柯氏矩阵的第一行进行推广,我们讨论以下形状的 Q,

$$Q = \begin{pmatrix} -\infty & b_1 & b_2 & \cdots \\ q_1 & -q_1 & & \\ q_2 & & -q_2 & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} \tag{9.3.14}$$

其中 $0 \leqslant b_j < +\infty, 0 \leqslant q_j < +\infty, \quad (j=1,2,\cdots)$.

关于上述矩阵 Q 有以下结果

定理 9.3.2 设 Q 形如(9.3.14)，则

(i) 若 $\sum_{j=1}^{\infty} b_j < +\infty$，那么 Q 不是 $Q-$ 矩阵.

(ii) 若 $\sum_{j=1}^{\infty} b_j = +\infty$，那么 Q 是 $Q-$ 矩阵的充要条件是

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{1+q_j} < +\infty. \tag{9.3.15}$$

并且，当(9.3.15)满足时，存在唯一的诚实 Q 过程.

证明 (i) 若 $\sum_{j=1}^{\infty} b_j < +\infty$，反设 Q 是 $Q-$ 矩阵，$R(\lambda)$ 是一个 Q 过程，对 $R(\lambda)$ 关于瞬时态 0 使用分解定理得

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & {}_0R(\lambda) \end{pmatrix} + r_{00}(\lambda)\begin{pmatrix} 1 \\ \xi^{(0)}(\lambda) \end{pmatrix}(1 \quad \eta^{(0)}(\lambda)), \tag{9.3.16}$$

其中

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\eta^{(0)}(\lambda) = (b_1, b_2, \cdots) \equiv b,$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\xi^{(0)}(\lambda) = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \equiv q.$$

从而 $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda(1 - \lambda\, {}_0R(\lambda)1) \geqslant \lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda\xi^{(0)}(\lambda) = q$.

由上式仿定理 9.3.1 中(9.3.10)、(9.3.13)的证明，可得

$${}_0R(\lambda) = \Phi(\lambda), \qquad (\Phi(\lambda) \text{ 由(9.3.4)定义}).$$

及

$$\eta^{(0)}(\lambda) = b\Phi(\lambda).$$

因此

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\eta^{(0)}(\lambda)1 = \lim_{\lambda\to\infty} b\lambda\Phi(\lambda)1 = b1 < +\infty.$$

与 0 是瞬时态矛盾！故 Q 不是 $Q-$ 矩阵. (i) 证毕.

(ii) 若 $\sum_{j=1}^{\infty} b_j = +\infty$，只要在定理 9.3.1 的证明中把 Q 的第

一行 $e=(1,1,\cdots)$ 换成 $b=(b_1,b_2,\cdots)$，类似于定理 9.3.1 的证明可证得，Q 是 Q — 矩阵的充要条件是

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{b_j}{\lambda+q_j}<+\infty,\qquad(\lambda>0).\qquad(9.3.17)$$

而且，当上述条件满足时存在唯一的诚实 Q 过程.

注意到(9.3.17)等价于(9.3.15)，故(ii)证毕.

如果进一步把柯氏矩阵的第一行和第一列进行推广，我们讨论如下形状的 Q

$$Q=\begin{pmatrix}-\infty & b_1 & b_2 & \cdots\\ m_1 & -q_1 & & \\ m_2 & & -q_2 & \\ \vdots & & & \ddots\end{pmatrix},\qquad(9.3.18)$$

其中 $0\leqslant b_j<\infty,0\leqslant q_j<\infty,0\leqslant m_j\leqslant q_j$.

关于上述矩阵 Q，有以下结论.

定理 9.3.3 设 Q 是形如(9.3.18)的拟 Q — 矩阵，则

(i) 若 $\sum_{i=1}^{\infty}b_i<+\infty$，则 Q 过程存在的充要条件是

$$\inf_{i\geqslant 1}\frac{1-m_i}{1+q_i}=0.\qquad(9.3.19)$$

当条件满足时，存在无穷多个诚实 Q 过程.

(ii) 若 $\sum_{i=1}^{\infty}b_i=+\infty$，则 Q 过程存在的充要条件是下列两条之一成立

(a) $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{b_i}{1+q_i}(1+q_i-m_i)<+\infty,\qquad(9.3.20)$

(b) 若(a)不成立，则存在无穷子集 $K\subset\{1,2,\cdots\}$，使

(b_1) $\inf_{i\in K}\frac{1+m_i}{1+q_i}=0,\qquad(9.3.21)$

(b_2) $\sum_{i\in K}b_i<+\infty,\qquad(9.3.22)$

$(b_3)\quad \sum_{i=1}^{\infty}\frac{b_i}{1+q_i}<+\infty.\qquad(9.3.23)$

(iii) 若 $\sum_{i=1}^{\infty}b_i=+\infty$，则诚实 Q 过程存在的充要条件是下列两条之一成立

$(c)\quad q_i=m_i\quad(i\geqslant 1)$，且 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{b_i}{1+q_i}<+\infty.\qquad(9.3.24)$

(d) 若 (c) 不成立，则存在无穷集 $K\subset\{1,2,\cdots\}$，使

$(d_1)\quad \inf_{i\in K}\frac{1+m_i}{1+q_i}=0,\qquad(9.3.25)$

$(d_2)\quad \sum_{i\in K}b_i<+\infty,\qquad(9.3.26)$

$(d_3)\quad \sum_{i=1}^{\infty}\frac{b_i}{1+q_i}<+\infty.\qquad(9.3.27)$

证明 综合定理 9.2.1 和定理 9.3.2 的证明方法，可以给出本定理的证明.

§4 带瞬时态的生灭 Q − 矩阵

定义 9.4.1 设 $E=\{0,1,2,\cdots\}$，称拟 Q − 矩阵

$$Q=\begin{pmatrix}-q_0 & q_{01} & & & \\ q_{10} & -q_1 & q_{12} & & \\ & q_{21} & -q_2 & q_{22} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots\end{pmatrix}\qquad(9.4.1)$$

为单边生灭矩阵(其中 $q_{ij}>0$, $|i-j|=1$；若 $q_i<+\infty$, $i\neq 0$，则 $q_i=q_{ii-1}+q_{ii+1}$).

设 $E=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$，称拟 Q − 矩阵

$$Q=\begin{bmatrix} \ddots & \ddots & & & & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & q_{-1-2} & -q_{-1} & q_{-10} & & & \\ & & q_{0-1} & -q_0 & q_{01} & & \\ & & & q_{10} & -q_1 & q_{12} & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \quad (9.4.2)$$

为双边生灭矩阵(其中 $q_{ij}>0$; $|i-j|=1$; 若 $q_i<+\infty$, 则 $q_i=q_{ii-1}+q_{ii+1}$).

将单边生灭矩阵和双边生灭矩阵统称为生灭矩阵.

如果生灭矩阵 Q 不含瞬时态,则 Q 是全稳定拟 $Q-$ 矩阵,故 Q 是 $Q-$ 矩阵. 因此,只要考虑含瞬时态的生灭矩阵.

本节圆满地给出了生灭矩阵成为 $Q-$ 矩阵的充分必要条件,即生灭 Q 过程的存在性准则. 并且,得到了诚实生灭 Q 过程的存在性准则. 当 Q 仅含有限个瞬时态时,还构造了全部生灭 Q 过程.

为此,我们分两种情况来讨论. 若生灭矩阵 Q 含无穷多个瞬时态,则由定理 5.1.1、定理 6.1.1 以及定理 8.1.3 知,Q 是 $Q-$ 矩阵且存在无穷多个诚实 Q 过程. 因此,只剩下 Q 含有限个瞬时态的情况要讨论. 以下来完成这一工作.

我们先给出一个引理.

引理 9.4.1 设 Q 是任一含有限个瞬时态的 $Q-$ 矩阵,记 $E_0=\{i:q_i<+\infty\}$, Q_{E_0} 是 Q 在 E_0 上的限制,如果 Q_{E_0} 的非保守量 d 有界,即

$$\sup_{i\in E_0}\{d_i:d_i=q_i-\sum_{j\in E_0-\{i\}}q_{ij}\}<+\infty, \qquad (9.4.3)$$

则方程

$$\begin{cases}(\lambda I-Q_{E_0})\xi_1=\mathbf{0},\\ \mathbf{0}\leqslant\xi\leqslant\mathbf{1}(\lambda>0)\end{cases} \qquad (9.4.4)$$

的线性独立解的个数不少于 Q 的瞬时态个数.

证明 不妨设 Q 的瞬时态个数为 n, 且 $\{i:q_i=+\infty\}=\{1,$

$\cdots,n\}$，故 $E=\{1,\cdots,n\}\cup E_0$.

反设方程(9.4.4)的线性独立解的个数 $m<n$，以下来导出矛盾.

注意 Q_{E_0} 是全稳定 Q — 矩阵，用 $\Phi(\lambda)$ 表示最小 Q_{E_0} 过程，回忆 $\mu_\lambda^+(1)$，L_λ^+，$M_{\Phi(\lambda)}$，$L_{\Phi(\lambda)}$ 的定义.

由于方程(9.4.4)的线性独立解的个数为 m，由引理 4.2.3 知，存在 $\{X^{b_i}(\lambda),i=1,\cdots,m\}\subset\mu_\lambda^+(1)\cap M_{\Phi(\lambda)}$，使得 μ_λ^+ 中的元是 $X^{b_i}(\lambda)(i=1,\cdots,m)$ 的线性组合. 记 $B=\{b_1,\cdots,b_m\}$，H 为 Q_{E_0} 的非保守状态集，即 $H=\{i:d_i\neq 0\}$.

设 $R(\lambda)$ 是一个 Q 过程，对 $R(\lambda)$ 关于瞬时态集 $\{1,\cdots,n\}$ 使用 n 维分解定理(定理 3.4.1)得

$$R(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \Psi(\lambda)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}A(\lambda) & A(\lambda)\eta(\lambda)\\ \xi(\lambda)A(\lambda) & \xi(\lambda)A(\lambda)\eta(\lambda)\end{pmatrix}. \tag{9.4.5}$$

其中 $\Psi(\lambda)$ 是 Q_{E_0} 过程，

$$\eta(\lambda)=\begin{bmatrix}\eta^{(1)}(\lambda)\\ \vdots\\ \eta^{(n)}(\lambda)\end{bmatrix},$$

$$\xi(\lambda)=(\xi^{(1)}(\lambda),\cdots,\xi^{(n)}(\lambda)),$$

$$\eta^{(k)}(\lambda)\in L_{\Psi(\lambda)},\xi^{(k)}(\lambda)\in M_{\Psi(\lambda)}\qquad(k=1,\cdots,n),$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta^{(k)}(\lambda)=e^{(k)},$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\xi^{(k)}(\lambda)=f^{(k)}. \tag{9.4.6}$$

这里 $e^{(k)}=(q_{kj},j\in E_0)$，$f^{(k)}=(q_{jk},j\in E_0)^T$ 是 E_0 上行向量和列向量.

$$\sum_{k=1}^{n}\xi^{(k)}(\lambda)\leqslant 1-\lambda\Psi(\lambda)1. \tag{9.4.7}$$

若记 $\xi^{(k)}=\lim\limits_{\lambda\downarrow 0}\xi^{(k)}(\lambda)$，则还满足

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta^{(k)}(\lambda)(1-\xi^{(k)})<+\infty,\quad(k=1,\cdots,n), \tag{9.4.8}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta^{(k)}(\lambda)\xi^{(k)}=+\infty,\quad(k=1,\cdots,n). \tag{9.4.9}$$

由(9.4.7)、(9.4.8)可得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta^{(k)}(\lambda)\xi^{(l)}<+\infty,\quad (k\neq l). \tag{9.4.10}$$

由杨向群[1]中的定理6.18.1,定理6.16.3知$\Psi(\lambda)$有下列表现

$$\Psi(\lambda)=\Phi(\lambda)+\sum_{a\in H\cup B}X^a(\lambda)F^a(\lambda). \tag{9.4.11}$$

其中$X^a(\lambda)=\varphi_{\cdot a}(\lambda)d_a\in M_{\Phi(\lambda)}\quad (a\in H)$;$F^a(\lambda)\in L_{\Psi(\lambda)},\lambda F^a(\lambda)1\leqslant 1,\quad a\in H\cup B$.

以下证明:$\forall\ 1\leqslant k\leqslant n$,均存在非负有界列向量$u^{(k)}\in M_{E_0}$及实数$t_b^{(k)}(b\in B)$使得

$$\xi^{(k)}=\Phi u^{(k)}+\sum_{b\in B}t_b^{(k)}X^b,\quad \sum_{b\in B}t_b^{(k)}X^b\geqslant \mathbf{0}. \tag{9.4.12}$$

此处$\Phi=\lim_{\lambda\downarrow 0}\Phi(\lambda)$,$X^b=\lim_{\lambda\downarrow 0}X^b(\lambda)$.

事实上,由(9.4.11)得

$$I+(\mu-\lambda)\Psi(\lambda)=I+(\mu-\lambda)\Phi(\lambda)-(\mu-\lambda)\sum_{a\in H\cup B}X^a(\lambda)F^a(\lambda),\quad \lambda,\mu>0. \tag{9.4.13}$$

注意$\xi^{(k)}(\lambda)\in M_{\Psi(\lambda)}$,由上式得

$$\begin{aligned}\xi^{(k)}(\lambda)&=(I+(\mu-\lambda)\Psi(\lambda))\xi^{(k)}(\lambda)\\&=(I+(\mu-\lambda)\Phi(\lambda))\xi^{(k)}(\mu)\\&\quad+(\mu-\lambda)\sum_{a\in H\cup B}X^a(\lambda)F^a(\lambda)\xi^{(k)}(\mu)\\&=(I+(\mu-\lambda)\Phi(\lambda))\xi^{(k)}(\mu)\\&\quad+\sum_{a\in H\cup B}X^a(\lambda)(\mu F^a(\mu)\xi^{(k)}-\lambda F^a(\lambda)\xi^{(k)}).\end{aligned} \tag{9.4.14}$$

最后等号成立,利用了$(\mu-\lambda)F^a(\lambda)\xi^{(k)}(\mu)=\mu F^a(\mu)\xi^{(k)}-\lambda F^a(\lambda)\xi^{(k)}$这由引理3.1.3(ii)得到.

由(9.4.14)得

$$\xi^{(k)}(\lambda)+\sum_{a\in H\cup B}X^a(\lambda)\lambda F^a(\lambda)\xi^{(k)}$$

$$=(I+(\mu-\lambda)\Phi(\lambda))(\xi^{(k)}(\mu)+\sum_{a\in H\cup B}X^a(\mu)\mu F^a(\mu)\xi^{(k)}),\quad \lambda,\mu>0.$$

由上式注意(9.4.7),(9.4.11)得

$$T^{(k)}(\lambda) \equiv \xi^{(k)}(\lambda) + \sum_{a\in H\cup B} X^{a}(\lambda)\lambda F^{a}(\lambda)\xi^{(k)} \in M_{\Phi(\lambda)}.$$

由引理 3.1.8,存在非负列向量 $u^{(k)}$,使得

$$0 \leqslant T^{(k)}(\lambda) - \Phi(\lambda)u^{(k)} \in M_{\Phi(\lambda)} \cap \mu_{\lambda}^{+}(1),$$

$$\lambda T^{(k)}(\lambda) \to u^{(k)}, \quad (\lambda \uparrow \infty).$$

从而,存在实数 $t_b^{(k)}(b \in B)$ 使得

$$T^{(k)}(\lambda) = \Phi(\lambda)u^{(k)} + \sum_{b\in B} t_b^{(k)} X^{b}(\lambda). \tag{9.4.15}$$

注意 $\xi^{(k)}(\lambda) \in M_{\Psi(\lambda)}$,由引理 3.1.2(iii) 得

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}\lambda\Psi(\lambda)\xi^{(k)} = 0.$$

由(9.4.11),$\Psi(\lambda) \geqslant \sum_{a\in H\cup B} X^{a}(\lambda)F^{a}(\lambda)$,故

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}\sum_{a\in H\cup B} X^{a}(\lambda)\lambda F^{a}(\lambda)\xi^{(k)} = 0.$$

由(9.4.15) 及 $T^{(k)}(\lambda)$ 的定义得

$$\xi^{(k)} = \lim_{\lambda\downarrow 0}T^{(k)}(\lambda) = \Phi u^{(k)} + \sum_{b\in B} t_b^{(k)} X^{b}. \tag{9.4.16}$$

因为

$$\lambda F^{a}(\lambda)\xi^{(k)} \leqslant \lambda F^{a}(\lambda)1 \leqslant 1,$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{a\in H}\lambda X^{a}(\lambda) = d, \qquad \lim_{\lambda\to\infty}\sum_{a\in B}\lambda X^{a}(\lambda) = 0.$$

由 $T^{(k)}(\lambda)$ 的定义得

$$u^{(k)} \leqslant f^{(k)} + d \leqslant 2d. \tag{9.4.17}$$

从而 $u^{(k)} \in M_{E_0}$,故(9.4.12) 成立.

以下证明:$\forall\ 1 \leqslant k \leqslant n, \lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta^{(k)}(\lambda)\Phi d < +\infty$. (9.4.18)

事实上,注意 $\eta^{(k)}(\lambda) \in L_{\Psi(\lambda)}$,$d$ 有界,固定 $\mu > 0$,让 $\lambda > \mu$,则

$$(\lambda - \mu)\eta^{(k)}(\lambda)\Psi(\mu) = \eta^{(k)}(\mu) - \eta^{(k)}(\lambda).$$

注意 $\Phi d \leqslant 1$,从而

$$(\lambda - \mu)\eta^{(k)}(\lambda)\Phi(\mu)\Phi d \leqslant \eta^{(k)}(\mu)\Phi d - \eta^{(k)}(\lambda)\Phi d.$$

故

$$(\lambda - \mu)\eta^{(k)}(\lambda)\frac{\Phi d - \Phi(\mu)d}{\mu}.$$

$$\leqslant \eta^{(k)}(\mu)\Phi d - \eta^{(k)}(\lambda)\Phi d.$$

因此

$$\begin{aligned}
&(\lambda-\mu)\eta^{(k)}(\lambda)\Phi d \\
&\leqslant \mu\eta^{(k)}(\mu)\Phi d - \mu\eta^{(k)}(\lambda)\Phi d + (\lambda-\mu)\eta^{(k)}(\lambda)\Psi(\mu)d \\
&= \mu\eta^{(k)}(\mu)\Phi d - \mu\eta^{(k)}(\lambda)\Phi d + (\eta^{(k)}(\mu)-\eta^{(k)}(\lambda))d.
\end{aligned}$$

在上式中令 $\lambda\to\infty$ 得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta^{(k)}(\lambda)\Phi d \leqslant \mu\eta^{(k)}(\mu)\Phi d + \eta^{(k)}(\mu)d < +\infty.$$

因此，(9.4.18) 成立.

由(9.4.17) 和(9.4.18) 得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta^{(k)}(\lambda)\Phi u^{(k)} < +\infty, \qquad (k=1,\cdots,n). \quad (9.4.19)$$

最后，由(9.4.9)、(9.4.10)、(9.4.12) 以及(9.4.19) 得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta^{(k)}(\lambda)\sum_{b\in B}t_b^{(k)}X^b = +\infty, \qquad (1\leqslant k\leqslant n), (9.4.20)$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta^{(k)}(\lambda)\sum_{b\in B}t_b^{(l)}X^b < +\infty, \qquad (k\neq l). \quad (9.4.21)$$

由 (9.4.20)、(9.4.21) 两式可得，$M=\{\sum_{b\in B}t_b^{(k)}X^b;k=1,\cdots,n\}$ 是 n 个线性独立的列向量.

注意 $B=\{b_1,\cdots,b_m\}$，$m<n$. 令 $L=\{\sum_{b\in B}t_bX^b;t_b\in R_1\}$，则 L 是至多不超过 m 维的线性空间. 但 $L\supset M$，即 L 包含了 n 个线性独立的元素，矛盾！

从而反设不真，故引理成立. 证毕.

定理 9.4.1 设 Q 是含有限个瞬时态的生灭 $Q-$ 矩阵，我们有下列结果：

(i) 若 Q 是单边生灭矩阵，则 Q 至多含一个瞬时态.

(ii) 若 Q 是双边生灭矩阵，则 Q 至多含两个瞬时态.

证明 设 Q 是含有限个瞬时态的生灭 $Q-$ 矩阵，则按引理 9.4.1 得到的 Q_{E_0} 只有有限个非保守状态，从而非保量 d 有界.

(i) 若 Q 是单边生灭矩阵，则容易验证方程

$$\begin{cases}(\lambda I-Q_{E_0})\xi = 0, \\ 0\leqslant \xi\leqslant 1,\end{cases} \qquad (\lambda>0) \qquad (9.4.22)$$

有且仅有一个线性独立解. 由引理 9.4.1,Q 至多含一个瞬时态.

(ii) 若 Q 是双边生灭矩阵,则容易验证方程

$$\begin{cases}(\lambda I - Q_{E_0})\xi = \mathbf{0}, \\ \mathbf{0} \leqslant \xi \leqslant \mathbf{1},\end{cases} \qquad (\lambda > 0) \tag{9.4.23}$$

有且仅有两个线性独立解. 由引理 9.4.1,Q 至多含两个瞬时态. 定理证毕.

由定理 9.4.1,我们以下只要分别讨论单瞬时态单边生灭矩阵,以及单瞬时态或双瞬时态双边生灭矩阵即可.

引理 9.4.2 设 Q 是单瞬时态单边生灭矩阵;$q_n = \infty$,即状态 n 是瞬时态,令 $E_n = \{n+1, n+2, \cdots\}$,$\overline{E}_n = \{n\} \cup E_n$;$Q_{\overline{E}_n}$ 是 Q 在 $\overline{E}_n$ 上的限制,则 Q 是 Q — 矩阵当且仅当单瞬时态单边生灭矩阵 $Q_{\overline{E}_n}$ 是 Q — 矩阵.

证明 注意 $E - \overline{E}_n = \{k; 0 \leqslant k < n\}$ 中的元是 Q 的稳定状态,由多维分解定理(定理 3.4.1)及其逆定理(定理 3.4.2)易得本引理的结论成立.

设 Q_{E_0} 是 $E_0 = \{1, 2, \cdots\}$ 上全稳定单边生灭 Q — 矩阵,

$$Q_{E_0} = \begin{pmatrix} -(q_{10} + q_{12}) & q_{12} & & \\ q_{21} & -(q_{21} + q_{23}) & q_{23} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{9.4.24}$$

其中 $q_{ij} > 0 \quad (i \neq j)$. 称

$$\begin{cases} z_0 = \dfrac{1}{q_{10}}, \\ z_1 = z_0 + \dfrac{1}{q_{12}}, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ z_n = z_0 + \dfrac{1}{q_{12}} + \cdots + \dfrac{q_{21}q_{32}\cdots q_{n,n-1}}{q_{12}q_{23}\cdots q_{n,n+1}} \qquad (n = 2, 3, \cdots) \end{cases} \tag{9.4.25}$$

为自然尺度；称

$$z = \lim_{n \to +\infty} z_n \tag{9.4.26}$$

为边界点；称

$$\mu_0 = 1, \quad \mu_n = \frac{q_{12}q_{23}\cdots q_{n,n-1}}{q_{21}q_{32}\cdots q_{n,n+1}} \quad (n > 1) \tag{9.4.27}$$

为标准测度.

通过自然尺度和标准测度可以将边界点 z 分类. 说边界点 z 为

正则　如果 $z < +\infty, \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i < +\infty$.

流出　如果 z 非正则，$\sum_{i=0}^{\infty} (z - z_i)\mu_i < +\infty$.

流入　如果 z 非正则，$\sum_{i=0}^{\infty} z_i \mu_i < +\infty$.

自然　其它情形.

引理 9.4.3　设 Q_{E_0} 是形如(9.4.24)的全稳定单边生灭 $Q-$ 矩阵，则方程

$$\begin{cases}(\lambda I - Q_{E_0})U = 0, \\ u_1 = 1\end{cases} \tag{9.4.28}$$

有唯一的解 $U = (u_1, u_2, \cdots)^T$，并且 u_i 关于 i 单调增加.

证明　由(9.4.28)得

$$\begin{gathered}
u_1 = 1, \\
-(\lambda + q_{10} + q_{12})u_1 + q_{12}u_2 = 0, \\
q_{21}u_1 - (\lambda + q_{21} + q_{23})u_2 + q_{23}u_3 = 0, \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
q_{n,n-1}u_{n-1} - (\eta(\lambda) + q_{n,n-1} + q_{n,n+1})u_n + q_{n,n+1}u_{n+1} = 0, \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots
\end{gathered}$$

从而

$$\begin{gathered}
u_1 = 1, \\
u_2 = \frac{\lambda + q_{10} + q_{12}}{q_{12}},
\end{gathered}$$

$$u_3 = \frac{\lambda + q_{21} q_{23}}{q_{23}} u_2 - \frac{q_{21}}{q_{23}} u_1,$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$u_{n+1} = \frac{\lambda + q_{n,n-1} + q_{n,n+1}}{q_{n,n+1}} u_n - \frac{q_{n,n-1}}{q_{n,n+1}} u_{n-1},$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

故 $U = (u_1, u_2, \cdots)^T$ 唯一确定. 显然 $u_1 \leqslant u_2$,假设 $u_{n-1} \leqslant u_n$ 则

$$u_{n+1} = \frac{\lambda + q_{n,n+1}}{q_{n,n+1}} u_n + \frac{q_{n,n-1}}{q_{n,n+1}} (u_n - u_{n-1}) \geqslant \frac{\lambda + q_{n,n+1}}{q_{n,n+1}} u_n \geqslant u_n$$

由归纳法知 u_i 关于 i 单调上升. 引理证毕.

定理 9.4.2 设 Q 是形如(9.4.1)的单瞬时态单边生灭矩阵,$q_n = +\infty$,即 n 是瞬时态,令 $E_n = \{n+1, n+2, \cdots\}$,$Q_{E_n}$ 是 Q 在 E_n 上的限制,则 Q 的 $Q-$矩阵当且仅当 Q_{E_n} 的边界点正则. 此处 Q_{E_n} 的边界点按(9.4.25)、(9.4.26)及(9.4.27)对 Q_{E_0} 定义.

证明 由引理 9.4.2,只要对 $n = 0$ 证明本定理即可.

必要性 设 Q 是 $Q-$矩阵,$q_0 = +\infty$,$R(\lambda)$ 是一个 Q 过程,对 $R(\lambda)$ 关于瞬时态 0 使用分解定理得

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Psi(\lambda) \end{pmatrix} + r_{00}(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ \xi(\lambda) \end{pmatrix} (1 \quad \eta(\lambda)), \tag{9.4.29}$$

其中 $\Psi(\lambda)$ 是 Q_{E_0} 过程,$\eta(\lambda) \in L_{\Psi(\lambda)}$,$\xi(\lambda) \in M_{\Psi(\lambda)}$.

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \eta(\lambda) = (q_{01}, 0, 0, \cdots) \equiv e,$$

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \xi(\lambda) = (q_{10}, 0, 0, \cdots)^T \equiv f$$

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \eta(\lambda) \mathbf{1} = +\infty, \lim_{\lambda \to \infty} \eta(\lambda) \mathbf{1} = 0.$$

由引理 3.1.7 和引理 3.1.8 得

$$\left.\begin{aligned} \eta(\lambda) &= e\Psi(\lambda) + \bar{\eta}(\lambda), \bar{\eta}(\lambda) \in L_\lambda^+ \cap L_{\Psi(\lambda)}, \\ \xi(\lambda) &= \Psi(\lambda) f + \bar{\xi}(\lambda), \bar{\xi}(\lambda) \in \mu_\lambda^+ \cap M_{\Psi(\lambda)}. \end{aligned}\right\} \tag{9.4.30}$$

(此处 L_λ^+ 相对于 Q_{E_0} 定义),而且

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \bar{\eta}(\lambda) \mathbf{1} = +\infty. \tag{9.4.31}$$

注意 Q 的稳定态全保守,利用分解式(9.4.29),易证明 $\Psi(\lambda)$ 是 B

型 Q_{E_0} 过程. 在等式

$$\eta(\lambda)\mathbf{1} - \eta(\mu)\mathbf{1} = (\mu - \lambda)\eta(\mu)\Psi(\lambda)\mathbf{1}$$

中固定 $\lambda > 0$, 令 $\mu \to +\infty$ 得

$$\lim_{\mu\to\infty}(\mu\eta(\mu)\Psi(\lambda)\mathbf{1}) = \eta(\lambda)\mathbf{1} < +\infty. \tag{9.4.32}$$

注意 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\mu\eta(\mu)\mathbf{1} = +\infty$, 如果 $\inf\limits_{i\in E_0}\sum\limits_{j\in E_0}\psi_{ij}(\lambda) > 0$, 则(9.4.32)式中左边等于 $+\infty$, 与(9.4.32)矛盾, 从而

$$\inf_{i\in E_0}\sum_{j\in E_0}\psi_{ij}(\lambda) = 0. \tag{9.4.33}$$

以下证明

$$\Psi(\lambda) = \Phi(\lambda). \tag{9.4.34}$$

反设(9.4.34)不成立, 由于 $\Psi(\lambda)$, $\Phi(\lambda)$ 是 B 型过程, 故 $U(\lambda) = \lambda(\Psi(\lambda)\mathbf{1} - \Phi(\lambda)\mathbf{1})$ 是方程

$$\begin{cases}(\lambda I - Q_{E_0})U = \mathbf{0}, \\ \mathbf{0} \leqslant U \leqslant \mathbf{1},\end{cases} \quad (\lambda > 0) \tag{9.4.35}$$

的非零解, 但由引理 9.4.3, (9.4.35)的非零解 $u = (\mu_1, u_2, \cdots)$ 的分量 u_i 关于 i 单调上升. 从而

$$\lambda\sum_j\psi_{ij}(\lambda) \geqslant \lambda(\sum_j\psi_{ij}(\lambda) - \sum_j\varphi_{ij}(\lambda))$$

关于 i 单调上升, 且不为零, 这与(9.4.33)矛盾, 故(9.4.34)成立. 从而

$$\eta(\lambda), \bar{\eta}(\lambda) \in L_{\Phi(\lambda)}, \quad \xi(\lambda), \bar{\xi}(\lambda) \in M_{\Phi(\lambda)}.$$

由分解定理, $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda\eta(\lambda)(\mathbf{1} - \xi) < +\infty$, 但 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda\eta(\lambda)\mathbf{1} = +\infty$. 从而

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta(\lambda)\xi = +\infty,$$

即

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta(\lambda)(\Phi f + \bar{\xi}) = +\infty, \tag{9.4.36}$$

此处 $\xi = \lim\limits_{\lambda\downarrow 0}\xi(\lambda)$, $\quad \Phi f = \lim\limits_{\lambda\downarrow 0}(\Phi(\lambda)f)$, $\quad \bar{\xi} = \lim\limits_{\lambda\downarrow 0}\bar{\xi}(\lambda)$.

仿引理 9.4.1 中(9.4.18)式的证明, 易证得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta(\lambda)\Phi f < +\infty. \tag{9.4.37}$$

由(9.4.36)、(9.4.37)得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta(\lambda)\bar{\xi}=+\infty.$$

因此 $\bar{\xi}(\lambda)\neq\mathbf{0}$,从而方程(9.4.35)有非零解.由杨向群[1]中的定理 5.3.1(ii)知 Q_{E_0} 的边界点 z 流出或正则.而由(9.4.30),(9.4.31)知,$\bar{\eta}(\lambda)\neq\mathbf{0}$ 且 $\bar{\eta}(\lambda)\in L_\lambda^+\cap L_{\Phi(\lambda)}$,由杨向群[1],引理 5.5.4 得 z 流入或正则.因此,z 必须正则.必要性证毕.

充分性　设 Q_{E_0} 的边界点 z 正则,我们来证明 Q 是 Q — 矩阵.由(杨向群[1],引理 5.5.4,引理 5.5.5)知,存在 $\bar{\eta}(\lambda)\in L_\lambda^+\cap L_{\Phi(\lambda)}$,满足

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\bar{\eta}(\lambda)\mathbf{1}=+\infty. \tag{9.4.38}$$

令

$$\eta(\lambda)=e\Phi(\lambda)+\bar{\eta}(\lambda),$$

$$e=(q_{01},0,0,\cdots),$$

$$\xi(\lambda)=\mathbf{1}-\lambda\Phi(\lambda)\mathbf{1},$$

$$R(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \Phi(\lambda)\end{pmatrix}+\frac{1}{\lambda+\lambda\eta(\lambda)\mathbf{1}}\begin{pmatrix}1\\ \xi(\lambda)\end{pmatrix}(1\quad \eta(\lambda)). \tag{9.4.39}$$

由分解定理知,$R(\lambda)$ 是 Q 过程且还是诚实的.定理证毕.

从定理 9.4.2 的证明过程及(9.4.34)可知,一切 Q 过程均属于最小生成类,从而可按第七章 §1 的方法将一切 Q 过程构造出来.

定理 9.4.3　设 Q 是单瞬时态单边生灭矩阵,满足定理 9.4.2 中 Q 过程存在条件,那么一切 Q 过程均属于最小生成类,因此,可按定理 7.1.11 把一切 Q 过程构造出来.

定理 9.4.4　设 Q 是形如(9.4.1)的单瞬时态单边生灭矩阵,n 是瞬时态,E_n,Q_{E_n} 的定义与定理 9.4.2 中相同,则

(i)　当 $n=0$ 时,存在诚实 Q 过程当且仅当 Q_{E_0} 的边界点正则.

(ii)　当 $n>0$ 时,存在诚实 Q 过程当且仅当 Q_{E_n} 的边界点正则,而且 $q_0=q_{01}$.

证明 (i) 的必要性由定理 9.4.2 得到，注意定理 9.4.2 充分性证明中(9.4.39) 构造的 $R(\lambda)$ 是诚实的得到(i) 的充分性.

(ii) 利用定理 9.4.2 和(i) 的结论，由 Q 的稳定态全保守及多维分解定理立得充分性. 为了证明必要性，由定理 9.4.2，只要证明下列论断成立即可： 若存在诚实 Q 过程，则 $q_0 = q_{01}$.

设 $R(\lambda)$ 是一个诚实 Q 过程，对 $R(\lambda)$ 关于 $\{0,\cdots,n\}$ 使用 $n+1$ 维分解定理可得

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & {}_{\{0,\cdots,n\}}R(\lambda) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A(\lambda) & A(\lambda)\eta(\lambda) \\ \xi(\lambda)A(\lambda) & \xi(\lambda)A(\lambda)\eta(\lambda) \end{pmatrix}, \tag{9.4.40}$$

其中，${}_{\{0,\cdots,n\}}R(\lambda)$ 是 B 型 Q_{E_0} 过程，$A(\lambda)$ 是 $R(\lambda)$ 在$\{0,\cdots,n\} \times \{0,\cdots,n\}$ 上的限制，

$$\eta(\lambda) = \begin{bmatrix} \eta^{(0)}(\lambda) \\ \vdots \\ \eta^{(n)}(\lambda) \end{bmatrix}, \qquad \xi(\lambda) = (\xi^{(0)}(\lambda),\cdots,\xi^{(n)}(\lambda)).$$

$$\eta^{(k)}(\lambda) \in L_{{}_{\{0,\cdots,n\}}R(\lambda)}, \quad \xi^{(k)}(\lambda) \in M_{{}_{\{0,\cdots,n\}}R(\lambda)}, \quad (k = 0,\cdots,n).$$

由引理 3.1.7，有

$$\begin{aligned} &\eta^{(0)}(\lambda) = e^{(0)} \cdot {}_{\{0,\cdots,n\}}R(\lambda) + \bar{\eta}^{(0)}(\lambda), \\ &\eta^{(n)}(\lambda) = e^{(n)} \cdot {}_{\{0,\cdots,n\}}R(\lambda) + \bar{\eta}^{(n)}(\lambda), \\ &\bar{\eta}^{(0)}(\lambda) \in L_\lambda^+, \bar{\eta}^{(n)}(\lambda) \in L_\lambda^+, \\ &\quad e^{(0)} = (q_{0,n+1}, q_{0,n+2}, \cdots) = (0,0,\cdots) \\ &\quad e^{(n)} = (q_{n,n+1}, 0, 0, \cdots) \end{aligned}$$

由于 n 是瞬时态，0 是稳定态，从而 $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda\bar{\eta}^{(n)}(\lambda)\mathbf{1} = +\infty$，$\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda\bar{\eta}^{(0)}(\lambda)\mathbf{1} < +\infty$. 注意 Q_{E_0} 是单边生灭矩阵，从而 L_λ^+ 的线性独立元素至多一个，但 $\bar{\eta}^{(n)}(\lambda) \neq \mathbf{0}$，从而 $\bar{\eta}^{(0)}(\lambda) = \mathbf{0}$. 因此，$\eta^{(0)}(\lambda) = e^{(0)} \cdot {}_{\{0,\cdots,n\}}R(\lambda)$.

注意 $R(\lambda)$ 是诚实的，而 $\eta^{(0)}(\lambda) = e^{(0)} \cdot {}_{\{0,\cdots,n\}}R(\lambda)$，由多维分解定理得

$$q_0 = \sum_{k=1}^{n} q_{0k} = q_{01}.$$

到此定理证毕.

以下讨论双边生灭矩阵,由定理 9.4.1 只要讨论单瞬时态或双瞬时态双边生灭矩阵即可.

设 $E=\{\cdots,-n,\cdots,-2-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$,$Q$ 是形如(9.4.2)的单瞬时态双边生灭矩阵.由于双边生灭 $Q-$ 矩阵的每个状态处于相似的地位(即每个状态向左右两个状态的转移概率密度均不为零).因此,不妨设唯一的瞬时态是 0,即 $q_0=+\infty$.

令

$$E_{0+}=\{1,2,\cdots,n,\cdots\},$$
$$E_{0-}=\{\cdots-n,\cdots,-2,-1\},$$
$$E_0=E_{0-}\cup E_{0+}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,1,2,\cdots,n,\cdots\}.$$

$Q_{E_0},Q_{E_{0+}},Q_{E_{0-}}$ 分别是 Q 在 E_0,E_{0+},E_{0-} 上的限制.均是全稳定 $Q-$ 矩阵.并且 $Q_{E_{0+}},Q_{E_{0-}}$ 均是全稳定单边生灭矩阵.而且

$$Q_{E_0}=\begin{pmatrix} Q_{E_{0-}} & 0 \\ 0 & Q_{E_{0+}} \end{pmatrix}. \tag{9.4.41}$$

仿照(9.4.25)、(9.4.26)及(9.4.27)对 $Q_{E_{0-}}$ 和 $Q_{E_{0+}}$ 可以分别定义自然尺度、边界点及标准测度,$z_n^-,z^-,\mu_n^-(n\leqslant 0)$ 和 $z_n^+,z^+,\mu_n^+(n\geqslant 0)$,并且利用自然尺度及标准测度进行类似的分类.

定理 9.4.5 设 Q 是形如(9.4.2)的单瞬时态双边生灭矩阵,$q_0=+\infty$,即 0 为瞬时态,则 Q 是 $Q-$ 矩阵当且仅当 $Q_{E_{0-}},Q_{E_{0+}}$ 的边界点 z^- 和 z^+ 至少有一个正则.并且当条件满足时,存在诚实 Q 过程.

证明 先证充分性 由于 z^- 和 z^+ 至少有一个正则,不仿设 z^+ 正则.

用 $\Phi(\lambda)$.$\Phi^+(\lambda)$ 和 $\Phi^-(\lambda)$ 分别表示最小 $Q_{E_0},Q_{E_{0+}}$ 和 $Q_{E_{0-}}$ 过程,显然

$$\Phi(\lambda)=\begin{pmatrix} \Phi^-(\lambda) & 0 \\ 0 & \Phi^+(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{9.4.42}$$

类似于定理 9.4.2 的充分性证明,可知方程

$$\begin{cases}(\lambda I - Q_{E_{0+}})U = \mathbf{0}, \\ \mathbf{0} \leqslant U \in L_{E_{0+}},\end{cases} \qquad (\lambda > 0).$$

存在非零解 $\bar{\eta}(\lambda) \in L_{\Phi^+(\lambda)}$，满足条件

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\bar{\eta}(\lambda)\mathbf{1} = +\infty. \tag{9.4.43}$$

记 $e^{(0)} = (q_{0j}; j \in E_0), f^{(0)} = (q_{i0}; i \in E_0)^T$,

$\bar{\eta}^{(0)}(\lambda) = (\mathbf{0}, \bar{\eta}(\lambda))$，此处 $\mathbf{0}$ 是 E_{0-} 上 $\mathbf{0}$ 行向量.

那么

$$\bar{\eta}^{(0)}(\lambda) \in L_{\Phi(\lambda)}, \qquad \lim_{\lambda\to\infty} \lambda\bar{\eta}^{(0)}(\lambda) = \mathbf{0},$$
$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\bar{\eta}^{(0)}(\lambda)\mathbf{1} = +\infty. \tag{9.4.44}$$

令

$$\eta^{(0)}(\lambda) = e^{(0)}\Phi(\lambda) + \bar{\eta}^{(0)}(\lambda),$$
$$\xi^{(0)}(\lambda) = \mathbf{1} - \lambda\Phi(\lambda)\mathbf{1},$$
$$r_{00}(\lambda) = \frac{1}{\lambda + \eta^{(0)}(\lambda)\mathbf{1}},$$
$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi(\lambda) \end{pmatrix}$$
$$+ r_{00}(\lambda)\begin{pmatrix} 1 \\ \xi^{(0)}(\lambda) \end{pmatrix}(1 \quad \eta^{(0)}(\lambda)). \tag{9.4.45}$$

由分解定理、(9.4.44)及 Q 稳定态均保守知 $R(\lambda)$ 是一个诚实 Q 过程.

以下证明必要性成立.

设 Q 是 Q — 矩阵，$R(\lambda)$ 是一个 Q 过程，我们将证明 z^-, z^+ 至少有一个正则.

对 $R(\lambda)$ 关于瞬时态 0 使用分解定理得

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}_0R(\lambda) \end{pmatrix} + r_{00}(\lambda)\begin{pmatrix} 1 \\ \xi(\lambda) \end{pmatrix}(1 \quad \eta(\lambda)), \tag{9.4.46}$$

其中${}_0R(\lambda)$ 是 Q_{E_0} 过程；$\lambda\eta(\lambda) \to e^{(0)}, \lambda\xi(\lambda) \to f^{(0)}, \lambda\eta(\lambda)\mathbf{1} \to +\infty$, $(\lambda \uparrow +\infty)$.

利用 $\eta(\lambda)\in L_{{}_0R(\lambda)}$，$\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda\eta(\lambda)1=+\infty$，与证明(9.4.33)相同，可证得

$$\inf_{i\in E_0}\sum_{j\in E_0}{}_0r_{ij}(\lambda)=0. \tag{9.4.47}$$

从而下列二式至少之一成立：

$$\inf_{i\in E_{0-}}\sum_{j\in E_0}{}_0r_{ij}(\lambda)=0, \tag{9.4.48}$$

或者

$$\inf_{i\in E_{0+}}\sum_{j\in E_0}{}_0r_{ij}(\lambda)=0. \tag{9.4.49}$$

若(9.4.48)不成立，则 $\inf\limits_{i\in E_{0-}}\sum\limits_{j\in E_0}{}_0r_{ij}(\lambda)>0(\lambda>0)$，我们将证明此时必有 ${}_{E_{0-}}R(\lambda)$ 是 $\{0\}\cup E_{0+}$ 上 $Q_{\{0\}\cup E_{0+}}$ 过程，由定理 9.4.2 得 z^+ 正则.(此处 ${}_{E_{0-}}R(\lambda)$ 表示 $R(\lambda)$ 禁止 E_{0-}.

事实上，由禁止概率的定义及引理 8.1.2 和引理 8.1.3 知，为了证明 ${}_{E_{0-}}R(\lambda)$ 是 $Q_{\{0\}\cup E_{0+}}$ 过程，只要证明

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\cdot{}_{E_{0-}}r_{00}(\lambda)=1. \tag{9.4.50}$$

如果(9.4.50)不成立，由 K. L. Chung[1] Ⅱ，§11 中的定理 4 之系知，存在 $\{i_\nu\}\subset E_{0-}$，使得

$$\lim_{\nu\to\infty}r_{i_\nu j}(\lambda)=r_{0j}(\lambda),\qquad(\forall\ j\in E,\lambda>0). \tag{9.4.51}$$

由上式及(9.4.46)得

$$\lim_{\nu\to\infty}\xi_{i_\nu}(\lambda)=1,\qquad(\lambda>0). \tag{9.4.52}$$

但由分解定理，$\xi(\lambda)\leqslant 1-\lambda\,{}_0R(\lambda)1$，因此(9.4.52)与 $\inf\limits_{i\in E_{0-}}\sum\limits_{j\in E_0}{}_0r_{ij}(\lambda)>0$ 矛盾！从而 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda_{E_{0-}}r_{00}(\lambda)=1$，${}_{E_{0-}}R(\lambda)$ 是 $Q_{\{0\}\cup E_{0+}}$ 过程，z^+ 正则.

同理，若(9.4.49)不成立，则 z^- 正则.

因此，为了完成必要性的证明，只需在(9.4.48)、(9.4.49)同时成立时证明 z^-、z^+ 有一个正则即可.

注意到 Q 的稳定态全保守，由分解定理容易证得 ${}_0R(\lambda)$ 是 B 型 Q_{E_0} 过程. 因此，$\lambda\,{}_0R(\lambda)1-\lambda\Phi(\lambda)1$ 是方程

$$\begin{cases}(\lambda I - Q_{E_0})U = 0, \\ 0 \leqslant U \leqslant 1,\end{cases} \quad (\lambda > 0) \qquad (9.4.53)$$

的解.

由于

$$Q_{E_0} = \begin{pmatrix} Q_{E_{0-}} & 0 \\ 0 & Q_{E_{0+}} \end{pmatrix}.$$

从而 U 满足方程(9.4.53)当且仅当 U 满足以下两方程组(9.4.54)和(9.4.55)

$$\begin{cases}(\lambda I - Q_{E_{0-}})U^{-} = 0, \\ 0 \leqslant U^{-} \leqslant 1,\end{cases} \quad (\lambda > 0), \qquad (9.4.54)$$

$$\begin{cases}(\lambda I - Q_{E_{0+}})U^{+} = 0, \\ 0 \leqslant U^{+} \leqslant 1,\end{cases} \quad (\lambda > 0). \qquad (9.4.55)$$

(其中 U^- 和 U^+ 分别表示 U 在 E_{0-} 和 E_{0+} 上的限制,以下类似记号意义相同).

这样,$(\lambda\, {}_0R(\lambda)1 - \lambda\Phi(\lambda)1)^-$,$(\lambda\, {}_0R(\lambda)1 - \lambda\Phi(\lambda)1)^+$ 分别是(9.4.54)和(9.4.55)的解. 注意 $Q_{E_{0-}}, Q_{E_{0+}}$ 均为全稳定单边生灭 Q — 矩阵,由(9.4.48)、(9.4.49)以及引理 9.4.3 得 $(\lambda\, {}_0R(\lambda)1 - \lambda\Phi(\lambda)1)^- = 0$,$(\lambda\, {}_0R(\lambda)1 - \lambda\Phi(\lambda)1)^+ = 0$,故

$$\lambda\, {}_0R(\lambda)1 - \lambda\Phi(\lambda)1 = \begin{pmatrix} (\lambda\, {}_0R(\lambda)1 - \lambda\Phi(\lambda)1)^- \\ (\lambda\, {}_0R(\lambda)1 - \lambda\Phi(\lambda)1)^+ \end{pmatrix} = 0,$$

即

$${}_0R(\lambda) = \Phi(\lambda) = \begin{pmatrix} \Phi^-(\lambda) & 0 \\ 0 & \Phi^+(\lambda) \end{pmatrix}. \qquad (9.4.56)$$

由(9.4.46)及引理 3.1.7 和引理 3.1.8 得

$$\xi(\lambda) = \Phi(\lambda)f^{(0)} + \bar{\xi}(\lambda), \quad \eta(\lambda) = e^{(0)}\Phi(\lambda) + \bar{\eta}(\lambda), \qquad (9.4.57)$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\eta(\lambda)(1 - \xi) < +\infty,$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\eta(\lambda)\xi = +\infty, \qquad (9.4.58)$$

$$\bar{\eta}(\lambda) = (\bar{\eta}(\lambda)^-, \bar{\eta}(\lambda)^+), \quad \bar{\xi}(\lambda) = \begin{pmatrix} \bar{\xi}(\lambda)^- \\ \bar{\xi}(\lambda)^+ \end{pmatrix}, \quad (9.4.59)$$

其中 $\bar{\eta}(\lambda)^- \in L_{\Phi^-(\lambda)}, \bar{\eta}(\lambda)^+ \in L_{\Phi^+(\lambda)}$ 分别是方程

$$\begin{cases} v(\lambda I - Q_{E_{0-}}) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{0} \leqslant v \in L_{E_{0-}}, \end{cases} \quad (\lambda > 0).$$

和

$$\begin{cases} v(\lambda I - Q_{E_{0+}}) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{0} \leqslant v \in L_{E_{0+}}, \end{cases} \quad (\lambda > 0).$$

的解；而 $\bar{\xi}(\lambda)^- \in M_{\Phi^-(\lambda)}, \bar{\xi}(\lambda)^+ \in M_{\Phi^+(\lambda)}$ 分别是方程(9.4.54)和(9.4.55)的解.

类似于(9.4.37)可得

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \eta(\lambda) \Phi f^{(0)} < +\infty, \quad (9.4.60)$$

注意 $e^{(0)}1 < +\infty$，由(9.4.58)、(9.4.60)得

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \bar{\eta}(\lambda) \bar{\xi} = +\infty, \qquad (\bar{\xi} = \lim_{\lambda \downarrow 0} \bar{\xi}(\lambda)).$$

从而下列二式至少之一成立：

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \bar{\eta}(\lambda)^- \bar{\xi}^- = +\infty, \quad (9.4.61)$$

或者

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \bar{\eta}(\lambda)^+ \bar{\xi}^+ = +\infty. \quad (9.4.62)$$

若(9.4.61)成立，则 $\bar{\eta}(\lambda)^- \neq \mathbf{0}, \bar{\xi}(\lambda)^- \neq \mathbf{0}$. 由(杨向群[1]，定理 5.3.1 和引理 5.5.4)得 z^- 正则. 同理，若(9.4.62)成立，则 z^+ 正则.

从而，在任何情况下，z^- 和 z^+ 至少有一个正则. 定理证毕.

最后，只要考虑双瞬时态双边生灭矩阵了.

设 $E = \{\cdots, -n, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$，$Q$ 是形如(9.4.2)的双瞬时态双边生灭矩阵，$q_{m_1} = +\infty, q_{m_2} = +\infty, m_1 < m_2$. 记 $E_1 = \{\cdots, m_1 - n, \cdots, m_1 - 2, m_1 - 1\}, E_2 = \{m_2 + 1, m_2 + 2, \cdots, m_2 + n, \cdots\}$；$Q_{E_1}, Q_{E_2}$ 分别是 Q 在 E_1 和 E_2 上的限制，均为全稳定单边生灭矩阵，仿(9.4.25)、(9.4.26)和(9.4.27)定义 Q_{E_1}, Q_{E_2} 的边界点 $z^{(1)}, z^{(2)}$.

定理 9.4.6 设 Q 是形如(9.4.2)的双瞬时态双边生灭矩阵，$q_{m_1}=+\infty, q_{m_2}=+\infty, m_1<m_2$，则 Q 是 $Q-$ 矩阵当且仅当 $z^{(1)}$ 和 $z^{(2)}$ 同时正则. 而且当条件满足时，还存在诚实 Q 过程.

证明 先证充分性. 设 $z^{(1)}, z^{(2)}$ 均正则，我们将构造一个诚实 Q 过程.

令 $\Phi^{(1)}(\lambda), \Phi^{(2)}(\lambda)$ 分别是最小 Q_{E_1} 过程和最小 Q_{E_2} 过程.

$$M_\lambda^{+(1)}(1)\equiv\{u(\lambda);(\lambda I-Q_{E_1})u(\lambda)=0, 0\leqslant u(\lambda)\leqslant 1\},$$

$$L_\lambda^{+(1)}\equiv\{v(\lambda);v(\lambda)(\lambda I-Q_{E_1})=0, 0\leqslant v(\lambda)\in L_{E_1}\},$$

$$M_\lambda^{+(2)}(1)\equiv\{u(\lambda);(\lambda I-Q_{E_2})u(\lambda)=0, 0\leqslant u(\lambda)\leqslant 1\},$$

$$L_\lambda^{+(2)}\equiv\{v(\lambda);v(\lambda)(\lambda I-Q_{E_2})=0, 0\leqslant v(\lambda)\in L_{E_2}\}.$$

由于 $z^{(1)}, z^{(2)}$ 正则，由(杨向群[1]，引理 5.5.3、引理 5.5.4 和引理 5.5.5)知，存在 $\bar{\eta}^{(1)}(\lambda)\in L_\lambda^{+(1)}\cap L_{\Phi^{(1)}(\lambda)}, \bar{\eta}^{(2)}(\lambda)\in L_\lambda^{+(2)}\cap L_{\Phi^{(2)}(\lambda)}$，使得

$$\begin{aligned}&\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\bar{\eta}^{(1)}(\lambda)1=+\infty,\\&\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\bar{\eta}^{(2)}(\lambda)1=+\infty.\end{aligned}\tag{9.4.63}$$

令

$$e^{(1)}\equiv(q_{m_1j};j\in E_1\cup E_2),\quad e^{(2)}\equiv(q_{m_2j};j\in E_1\cup E_2),$$

$$\Phi(\lambda)\equiv\begin{pmatrix}\Phi^{(1)}(\lambda) & 0\\ 0 & \Phi^{(2)}(\lambda)\end{pmatrix},\tag{9.4.64}$$

$$\eta^{(m_1)}(\lambda)=e^{(1)}\Phi(\lambda)+(\bar{\eta}^{(1)}(\lambda),0_{E_2}^-),$$

$$\eta^{(m_2)}(\lambda)=e^{(2)}\Phi(\lambda)+(0_{E_1}^-,\bar{\eta}^{(2)}(\lambda)),$$

$$\eta^{(n)}(\lambda)=0,\qquad(m_1<n<m_2),$$

$$\xi^{(m_1)}(\lambda)=\begin{bmatrix}1-\lambda\Phi^{(1)}(\lambda)1\\ 0|_{E_2}\end{bmatrix},$$

$$\xi^{(m_2)}(\lambda)=\begin{bmatrix}0|_{E_1}\\ 1-\lambda\Phi^{(2)}(\lambda)1\end{bmatrix},$$

$$\xi^{(n)}(\lambda)=0,\qquad(m_1<n<m_2).$$

则

$$\eta^{(n)}(\lambda) \in L_{\Phi(\lambda)}, \xi^{(n)}(\lambda) \in M_{\Phi(\lambda)},$$
$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\eta^{(n)}(\lambda) = (q_{nj}; j \in E_1 \cup E_2),$$
$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\xi^{(n)}(\lambda) = (q_{in}; i \in E_1 \cup E_2)^T,$$
$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\eta^{(n)}(\lambda)(1 - \xi^{(n)}) < +\infty,$$

(此处 $m_1 \leqslant n \leqslant m_2, \xi^{(n)} = \lim_{\lambda\downarrow 0}\xi^{(n)}(\lambda)$, $0_{E_1}^-$、$0|_{E_1}$ 分别是 E_1 上零行、列向量,同样理解 $0_{E_2}^-, 0|_{E_2}$) 而且

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\eta^{(m_1)}(\lambda)\xi^{(m_1)} = +\infty, \quad \lim_{\lambda\to\infty} \lambda\eta^{(m_2)}(\lambda)\xi^{(m_2)} = +\infty,$$
$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\eta^{(n)}(\lambda)\xi^{(n)} < +\infty, \quad (n \neq m),$$

还满足

$$\sum_{n=m_1}^{m_2} \xi^{(n)}(\lambda) = 1 - \lambda\Phi(\lambda)1. \tag{9.4.65}$$

定义 $\{m_1, \cdots m_2\} \times \{m_1, \cdots, m_2\}$ 上常数矩阵 $C = (c_{ij})$ 如下:

$$c_{ij} = -(q_{ij} + \lim_{\lambda\to\infty} \lambda\eta^{(i)}(\lambda)\xi^{(j)}), \quad (i \neq j)$$

$$c_{ii} = \sum_{j=m_1, j\neq i}^{m_2} q_{ij} + \lim_{\lambda\to\infty} \lambda\eta^{(i)}(\lambda)(1 - \xi^{(i)}). \tag{9.4.66}$$

令

$$\lambda\eta(\lambda)\xi \equiv (\lambda\eta^{(i)}(\lambda)\xi^{(j)})_{i,j\in\{m_1,\cdots,m_2\}}$$

是 $\{m_1, \cdots, m_2\} \times \{m_1, \cdots, m_2\}$ 上矩阵.

由多维分解定理(定理 3.4.2) 知,矩阵 $C + \lambda I + \lambda\eta(\lambda)\xi$ 有逆矩阵且逆非负.

再令

$$A(\lambda) = (C + \lambda I + \lambda\eta(\lambda)\xi)^{-1},$$

$$\eta(\lambda) = \begin{pmatrix} \eta^{(m_1)}(\lambda) \\ \vdots \\ \eta^{(m_2)}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \xi(\lambda) = (\xi^{(m_1)}(\lambda), \cdots, \xi^{(m_2)}(\lambda)).$$

最后令

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Phi(\lambda) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A(\lambda) & A(\lambda)\eta(\lambda) \\ \xi(\lambda)A(\lambda) & \xi(\lambda)A(\lambda)\eta(\lambda) \end{pmatrix},$$

由多维分解定理(定理3.4.2)知,$R(\lambda)$是Q过程,由(9.4.65)、(9.4.66)知$R(\lambda)$还是诚实的.

以下证明必要性.设Q是$Q-$矩阵,$R(\lambda)$是一个Q过程,对$R(\lambda)$关于状态集$\{m_1,\cdots,m_2\}$使用多维分解定理得.

$$R(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \Psi(\lambda)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}A(\lambda) & A(\lambda)\eta(\lambda)\\ \xi(\lambda)A(\lambda) & \xi(\lambda)A(\lambda)\eta(\lambda)\end{pmatrix},\tag{9.4.67}$$

其中$\Psi(\lambda)={}_{m_1\cdots m_2}R(\lambda)$是$Q_{E_1\cup E_2}$过程,由(9.4.67)容易证明$\Psi(\lambda)$还是$B$型的.$A(\lambda)$是$R(\lambda)$在$\{m_1,\cdots,m_2\}\times\{m_1,\cdots,m_2\}$上的限制.

$$\eta(\lambda)=\begin{pmatrix}\eta^{(m_1)}(\lambda)\\ \vdots\\ \eta^{(m_2)}(\lambda)\end{pmatrix},\quad \xi(\lambda)=(\xi^{(m_1)}(\lambda),\cdots,\xi^{(m_2)}(\lambda)),$$

$$\eta^{(n)}(\lambda)\in L_{\Psi(\lambda)},\quad \xi^{(n)}(\lambda)\in M_{\Psi(\lambda)}.$$

$$\sum_{n=m_1}^{m_2}\xi^{(n)}(\lambda)\leqslant 1-\lambda\Psi(\lambda)1,\tag{9.4.68}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta^{(m_1)}(\lambda)(1-\xi^{(m_1)})<+\infty,\quad \lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta^{(m_1)}(\lambda)\xi^{(m_1)}=+\infty,\tag{9.4.69}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta^{(m_2)}(\lambda)(1-\xi^{(m_2)})<+\infty,\quad \lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta^{(m_2)}(\lambda)\xi^{(m_2)}=+\infty.\tag{9.4.70}$$

以下证明

$$\inf_{i\in E_1}\sum_{j\in E_1\cup E_2}\psi_{ij}(\lambda)=0,\tag{9.4.71}$$

$$\inf_{i\in E_2}\sum_{j\in E_1\cup E_2}\psi_{ij}(\lambda)=0.\tag{9.4.72}$$

若(9.4.71)不成立,则$\inf\limits_{i\in E_1}\sum\limits_{j\in E_1\cup E_2}\psi_{ij}(\lambda)>0$, $(\lambda>0)$,用${}_{m_1}R(\lambda)$,${}_{m_2}R(\lambda)$分别表示$R(\lambda)$禁止瞬时态m_1和m_2而得到的$Q_{E-\{m_1\}}$过程和$Q_{E-\{m_2\}}$过程.由禁止概率的定义可得

$$\inf_{i\in E_1}\sum_{j\in E-\{m_1\}}{}_{m_1}r_{ij}(\lambda)\geqslant\inf_{i\in E_1}\sum_{j\in E-\{m_1\cdots m_2\}}{}_{m_1}r_{ij}(\lambda)$$

$$=\inf_{i\in E_1}\sum_{j\in E_1\cup E_2}\psi_{ij}(\lambda)>0, \quad (\lambda>0). \tag{9.4.73}$$

同理得

$$\inf_{i\in E_1}\sum_{j\in E-\{m_2\}} {}_{m_2}\bar{r}_{ij}(\lambda)\geqslant\inf_{i\in E_1}\sum_{j\in E_1\cup E_2}\psi_{ij}(\lambda)>0, \quad (\lambda>0). \tag{9.4.74}$$

利用(9.4.73)、(9.4.74) 仿照(9.4.50)、(9.4.51) 和(9.4.52) 的证明可证得，对$R(\lambda)$禁止E_1之后所得到的${}_{E_1}R(\lambda)$是Q_{E-E_1}过程. 但Q_{E-E_1}是单边生灭矩阵，含两个瞬时态m_1和m_2，这与定理 9.4.1 的结论矛盾，故(9.4.71) 必须成立.

同理可得(9.4.72) 成立.

利用(9.4.71)、(9.4.72) 以及$\Psi(\lambda)$是B型$Q_{E_1\cup E_2}$过程，且

$$Q_{E_1\cup E_2}=\begin{pmatrix} Q_{E_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_{E_2} \end{pmatrix}.$$

仿照 (9.4.53)、(9.4.54)、(9.4.55) 和 (9.4.56) 的证明方法，可得

$$\Psi(\lambda)=\Phi(\lambda)=\begin{pmatrix} \Phi^{(1)}(\lambda) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi^{(2)}(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{9.4.75}$$

因此，$\eta^{(m_1)}(\lambda),\eta^{(m_2)}(\lambda)\in L_{\Phi(\lambda)}$；$\xi^{(m_1)}(\lambda),\xi^{(m_2)}(\lambda)\in M_{\Phi(\lambda)}$.

由引理 3.1.7 和引理 3.1.8 有

$\eta^{(m_1)}(\lambda)=e^{(m_1)}\Phi(\lambda)+\bar{\eta}^{(m_1)}(\lambda),\eta^{(m_2)}(\lambda)=e^{(m_2)}\Phi(\lambda)+\bar{\eta}^{(m_2)}(\lambda)$,

$\xi^{(m_1)}(\lambda)=\Phi(\lambda)f^{(m_1)}+\bar{\xi}^{(m_1)}(\lambda),\xi^{(m_2)}(\lambda)=\Phi(\lambda)f^{(m_2)}+\bar{\xi}^{(m_2)}(\lambda)$,

其中

$e^{(n)}=(q_{nj};j\in E_1\cup E_2),f^{(n)}=(q_{in};i\in E_1\cup E_2), \quad (n=m_1,m_2)$,

$\bar{\eta}^{(n)}(\lambda)\in L_{\Phi(\lambda)}$且满足方程

$$\begin{cases} v(\lambda I-Q_{E_1\cup E_2})=\mathbf{0}, \\ 0\leqslant v\in L_{E_1\cup E_2}, \end{cases} \quad (\lambda>0), \tag{9.4.76}$$

$\bar{\xi}^{(n)}(\lambda)\in M_{\Phi(\lambda)}$且满足方程

$$\begin{cases} (\lambda I-Q_{E_1\cup E_2})U=\mathbf{0}, \\ 0\leqslant U\leqslant 1, \end{cases} \quad (\lambda>0). \tag{9.4.77}$$

$(n = m_1, m_2)$.

类似于(9.4.37)的证明,可得

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\eta^{(m_1)}(\lambda)\Phi f^{(m_1)} < +\infty, \quad \lim_{\lambda\to\infty} \lambda\eta^{(m_2)}(\lambda)\Phi f^{(m_2)} < +\infty.$$

由(9.4.69)、(9.4.70),注意 $e^{(m_1)}1 < +\infty, e^{(m_2)}1 < +\infty$,得

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\bar{\eta}^{(m_1)}(\lambda)\bar{\xi}^{(m_1)} = +\infty, \quad \lim_{\lambda\to\infty} \lambda\bar{\eta}^{(m_1)}(\lambda)(1 - \bar{\xi}^{(m_1)}) < +\infty, \tag{9.4.78}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\bar{\eta}^{(m_2)}(\lambda)\bar{\xi}^{(m_2)} = +\infty, \quad \lim_{\lambda\to\infty} \lambda\bar{\eta}^{(m_2)}(\lambda)(1 - \bar{\xi}^{(m_2)}) < +\infty. \tag{9.4.79}$$

故

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\bar{\eta}^{(m_1)}(\lambda)\bar{\xi}^{(m_2)} < +\infty, \quad \lim_{\lambda\to\infty} \lambda\bar{\eta}^{(m_2)}(\lambda)\bar{\xi}^{(m_1)} < +\infty. \tag{9.4.80}$$

若 $Y(\lambda)$ 是 $E_1 \cup E_2$ 上行向量或列向量,用 $Y(\lambda)_{E_1}, Y(\lambda)_{E_2}$ 分别表示 $Y(\lambda)$ 在 E_1 和 E_2 上的限制.

注意(9.4.75)以及

$$Q_{E_1 \cup E_2} = \begin{pmatrix} Q_{E_1} & 0 \\ 0 & Q_{E_2} \end{pmatrix},$$

可得 $\bar{\eta}^{(m_1)}(\lambda)_{E_1}, \bar{\eta}^{(m_2)}(\lambda)_{E_1} \in L_{\Phi^{(1)}(\lambda)}$ 满足方程

$$\begin{cases} v(\lambda I - Q_{E_1}) = 0, \\ 0 \leqslant v \in L_{E_1}, \end{cases} \quad (\lambda > 0). \tag{9.4.81}$$

$\bar{\eta}^{(m_1)}(\lambda)_{E_2}, \bar{\eta}^{(m_2)}(\lambda)_{E_2} \in L_{\Phi^{(2)}(\lambda)}$ 满足方程

$$\begin{cases} v(\lambda I - Q_{E_2}) = 0, \\ 0 \leqslant v \in L_{E_2}, \end{cases} \quad (\lambda > 0). \tag{9.4.82}$$

$\bar{\xi}^{(m_2)}(\lambda)_{E_1}, \bar{\xi}^{(m_2)}(\lambda)_{E_1} \in M_{\Phi^{(1)}(\lambda)}$ 满足方程

$$\begin{cases} (\lambda I - Q_{E_1})U = 0, \\ 0 \leqslant U \leqslant 1, \end{cases} \quad (\lambda > 0). \tag{9.4.83}$$

$\bar{\xi}^{(n_2)}(\lambda)_{E_2}, \bar{\xi}^{(m_2)}(\lambda)_{E_2} \in M_{\Phi^{(2)}(\lambda)}$ 满足方程

$$\begin{cases} (\lambda I - Q_{E_2})u = 0, \\ 0 \leqslant U \leqslant 1. \end{cases} \quad (\lambda > 0). \tag{9.4.84}$$

再注意方程(9.4.81)、(9.4.82)、(9.4.83)和(9.4.84)均至多有一个线性独立解，综合(9.4.78)、(9.4.79)和(9.4.80)三式得下列(9.4.85)、(9.4.86)之一成立.

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\bar{\eta}^{(m_1)}(\lambda)_{E_1}\bar{\xi}^{(m_1)}_{E_1}=+\infty,\quad \lim_{\lambda\to\infty}\lambda\bar{\eta}^{(m_2)}(\lambda)_{E_2}\bar{\xi}^{(m_2)}_{E_2}=+\infty, \tag{9.4.85}$$

或者

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\bar{\eta}^{(m_1)}(\lambda)_{E_2}\bar{\xi}^{(m_1)}_{E_2}=+\infty,\quad \lim_{\lambda\to\infty}\lambda\bar{\eta}^{(m_2)}(\lambda)_{E_1}\bar{\xi}^{(m_2)}_{E_1}=+\infty. \tag{9.4.86}$$

若(9.4.85)成立，则方程(9.4.83)、(9.4.84)分别有非零解 $\bar{\xi}^{(m_1)}(\lambda)_{E_1}$ 和 $\bar{\xi}^{(m_2)}(\lambda)_{E_2}$ 由(杨向群[1]定理5.3.1) $z^{(1)}$ 正则或流出，$z^{(2)}$ 正则或流出. 由(9.4.85)有 $\bar{\eta}^{(m_1)}(\lambda)_{E_1}\neq\mathbf{0}$，$\bar{\eta}^{(m_2)}(\lambda)_{E_2}\neq\mathbf{0}$；由(杨向群[1]引理5.5.4)得 $z^{(1)}$ 正则或流入，$z^{(2)}$ 正则或流入. 因此，$z^{(1)}$ 正则而且 $z^{(2)}$ 正则.

若(9.4.86)成立，同理可得 $z^{(1)}$，$z^{(2)}$ 均正则. 因此，必要性得证. 定理证毕.

§5 瞬时态 q — 可和的 Q — 矩阵

设 $Q=(q_{ij};i,j\in E)$ 是拟 Q — 矩阵，称 Q 的瞬时态 i 是 q — 可和的，如果 $\sum_{j\neq i}q_{ij}<+\infty$.

如果 Q 的所有瞬时态均为 q — 可和，则称 Q 为瞬时态 q — 可和.

本节给出瞬时态 q — 可和的拟 Q — 矩阵成为 Q — 矩阵的一个充分条件，当条件满足时，还证明了存在无穷多个诚实过程. 具体来说，得到了下述结果.

定理 9.5.1 设 $Q=(q_{ij};i,j\in E)$ 是瞬时态 q — 可和的拟 Q — 矩阵，令 $E_0=\{i:q_i<+\infty\}$，

(i) 若 Q 含无穷多个瞬时态，则 Q 是 Q — 矩阵.

(ii) 若 Q 含有穷多个瞬时态，而且

$$\inf_{i\in E_0}\frac{1+c_i}{1+q_i}=0. \tag{9.5.1}$$

其中 $c_i=\sum_{j\in E-\{i\}}q_{ij}$, $(i\in E_0)$. 则 Q 是 $Q-$ 矩阵.

而且，当条件满足时，存在无穷多个诚实 Q 过程.

(i) 的证明由定理 5.1.1、定理 6.1.1 和定理 8.1.3 立即得到.

为了证明(ii)，先给出下列引理.

引理 9.5.1 设 $E=\{b\}\cup E_0$, $Q=(q_{ij};i,j\in E)$ 是单瞬时对角形拟 $Q-$ 矩阵，其中

$$q_{ij}=\begin{cases}-\infty, & i=j=b;\\ -q_i, & i=j\in E_0;\\ 0, & i\neq j.\end{cases} \tag{9.5.2}$$

如果对于 E 上某列向量 $C=(c_i;i\in E)^T$，其中 $0\leqslant c_b<+\infty$, $0\leqslant c_i\leqslant q_i$ $(i\in E_0)$ 有

$$\inf_{i\in E_0}\frac{1+c_i}{1+q_i}=0, \tag{9.5.3}$$

则 Q 是 $Q-$ 矩阵，并且存在 Q 过程 $R(\lambda)$ 使

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(\mathbf{1}-\lambda R(\lambda)\mathbf{1})=C.$$

证明 由(9.5.3)，可把 E_0 分成可列个无限子集 $E_0=\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k$, $B_n\cap B_k=\varnothing$，使

$$\sum_{i\in B_n}\frac{1+c_i}{1+q_i}=0, \qquad (n\geqslant 1). \tag{9.5.4}$$

由(9.5.4)可在 B_n 上取非负实数列 $\alpha^{(n)}=\{\alpha_i^{(n)}\}$，使

$$\sum_{i\in B_n}\alpha_i^{(n)}=+\infty, \tag{9.5.5}$$

$$\sum_{i\in B_n}\frac{1+c_i}{q_i}\alpha_i^{(n)}\leqslant\frac{1}{n^2}. \tag{9.5.6}$$

(若 $q_i=0$，取对应的 $\alpha_i^{(n)}=0$，并约定 $0/0=0$).

令

$$q_{ij}^{(n)} = \begin{cases} -q_i, & i = j \in B_n, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \qquad (i, j \in B_n).$$

则 $Q^{(n)} = (q_{ij}^{(n)}; i, j \in B_n)$ 是 Q 在 B_n 上的限制.

令

$$C^{(n)} \equiv (c_i; i \in B_n), C^0 = (c_i; i \in E_0),$$

$$\psi_{ij}^{(n)}(\lambda) = \frac{\delta_{ij}}{\lambda + q_i} + \frac{q_i - c_i}{\lambda + q_i} \frac{\dfrac{a_j^{(n)}}{\lambda + q_j}}{1 + \lambda \sum\limits_{k \in B_n} \dfrac{a_k^{(n)}}{\lambda + q_k} \dfrac{q_k - c_k}{q_k}}. \tag{9.5.7}$$

由(9.5.6)知

$$\sum_{j \in B_n} \frac{a_j^{(n)} c_j}{q_j} \leqslant 1, \tag{9.5.8}$$

若令

$$\Phi(\lambda) = \left(\frac{\delta_{ij}}{\lambda + q_i}; i, j \in B_n\right),$$

$$\bar{\xi}(\lambda) = \Phi(\lambda) C^*,$$

$$\bar{\eta}(\lambda) = a^{(n)} \Phi(\lambda),$$

其中 $C^* = (c_i^*; i \in B_n), c_i^* = q_i - c_i$,

那么

$$\bar{\xi}_i = \lim_{\lambda \downarrow 0} \bar{\xi}_i(\lambda) = 1 - \frac{c_i}{q_i}.$$

故

$$1 - \bar{\xi}_i = \frac{c_i}{q_i}.$$

从而

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \to \infty} \sum_{j \in B_n} \lambda \bar{\eta}_j(\lambda)(1 - \bar{\xi}_j) &= \lim_{\lambda \to \infty} \sum_{j \in B_n} \frac{\lambda a_j^{(n)}}{\lambda + q_j} \frac{c_j}{q_j} \\ &= \sum_{j \in B_n} \frac{c_j}{q_j} a_j^{(n)} \\ &\leqslant 1 < +\infty. \end{aligned} \tag{9.5.9}$$

由定理 3.5.2, $\Psi^{(n)}(\lambda)$ 是 $Q^{(n)}$ 过程，而且

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(\mathbf{1}-\lambda\Psi^{(n)}(\lambda)\mathbf{1})=C^{(n)}. \qquad (9.5.10)$$

若令

$$\eta_j^{(n)}(\lambda)=\frac{1}{1+\lambda\sum_{k\in B_n}\frac{\alpha_k^{(n)}}{\lambda+q_k}\frac{q_k-c_k}{q_k}}\frac{\alpha_j^{(n)}}{\lambda+q_j}, \qquad (j\in B_n), \qquad (9.5.11)$$

$$\eta^{(n)}(\lambda)=(\eta_j^{(n)}(\lambda); j\in B_n).$$

与引理 9.2.6 类似可证

$$\eta^{(n)}(\lambda)-\eta^{(n)}(\mu)=(\mu-\lambda)\eta^{(n)}(\lambda)\Psi^{(n)}(\mu), \qquad (\lambda,\mu>0). \qquad (9.5.12)$$

令

$$\xi^{(n)}(\lambda)=\mathbf{1}-\lambda\Psi^{(n)}(\lambda)\mathbf{1}-\Psi^{(n)}(\lambda)C^{(n)}. \qquad (9.5.13)$$

显然

$$\xi^{(n)}(\lambda)-\xi^{(n)}(\mu)=(\mu-\lambda)\Psi^{(n)}(\lambda)\xi^{(n)}(\mu), \qquad (\lambda,\mu>0), \qquad (9.5.14)$$

$$\xi_i^{(n)}=\lim_{\lambda\downarrow 0}\xi_i^{(n)}(\lambda)=1-\frac{c_i}{q_i}-\frac{q_i-c_i}{q_i}\sum_{j\in B_n}\frac{\alpha_j^{(n)}c_j}{q_j}. \qquad (i\in B_n). \qquad (9.5.15)$$

由(9.5.6)

$$1-\xi_i^{(n)}\leqslant\frac{c_i}{q_i}+\frac{1}{n^2}.$$

令

$$\xi^{(n)}=(\xi_i^{(n)}; i\in B_n)^T.$$

那么

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\sum_{i\in B_n}\eta_i^{(n)}(\lambda)=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\lambda\sum_{j\in B_n}\alpha_j^{(n)}/(\lambda+q_j)}{1+\lambda\sum_{k\in B_n}\frac{\alpha_k^{(n)}}{\lambda+q_k}\frac{q_k-c_k}{q_k}}=1, \qquad (9.5.16)$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\sum_{i\in B_n}\eta_i^{(n)}(\lambda)(1-\xi_i^{(n)})\leqslant\frac{1}{n^2}+\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\lambda\sum_{j\in B_n}\frac{\alpha_j^{(n)}}{\lambda+q_j}\frac{c_j}{q_j}}{1+\lambda\sum_{k\in B_n}\frac{\alpha_k^{(n)}}{\lambda+q_k}\frac{q_k-c_k}{q_k}}$$

$$=\frac{1}{n^2}, \tag{9.5.17}$$

$$\sum_{i\in B_n}\eta_i^{(n)}(\lambda)\leqslant\sum_{j\in B_n}\frac{\alpha_j^{(n)}}{\lambda+q_j}$$

$$\leqslant\frac{1}{n^2}. \tag{9.5.18}$$

令

$$\eta(\lambda)=(\eta^{(1)}(\lambda),\eta^{(2)}(\lambda),\cdots), \tag{9.5.19}$$

$$\xi(\lambda)=(\xi^{(1)}(\lambda),\xi^{(2)}(\lambda),\cdots)^T \tag{9.5.20}$$

分别是 $E_0=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$ 上的行向量和列向量.

显然

$$\Psi(\lambda)=\begin{pmatrix}\Psi^{(1)}(\lambda) & & \\ & \Psi^{(2)} & \\ & & \ddots\end{pmatrix}, \tag{9.5.21}$$

是 Q_{E_0} 过程,其中 $Q_{E_0}=(q_{ij};i,j\in E_0)$.

由(9.5.11)—(9.5.18)得

$$\eta(\lambda)-\eta(\mu)=(\mu-\lambda)\eta(\lambda)\Psi(\mu), \tag{9.5.22}$$

$$\xi(\lambda)=1-\lambda\Psi(\lambda)1-\Psi(\lambda)d, \tag{9.5.23}$$

$$\xi(\lambda)-\xi(\mu)=(\mu-\lambda)\Psi(\lambda)\xi(\mu), \tag{9.5.24}$$

$$\eta(\lambda)1=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j\in B_n}\eta_j^{(n)}(\lambda)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty,\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta(\lambda)=0, \tag{9.5.25}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda[\eta(\lambda),1]=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{j\in B_n}\lambda\eta_j^{(n)}(\lambda)=+\infty, \tag{9.5.26}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda[\eta(\lambda),1-\xi]=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\sum_{j\in B_n}\eta_j^{(n)}(\lambda)(1-\xi_j^{(n)})$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty. \tag{9.5.27}$$

令

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Psi(\lambda) \end{pmatrix} + r_{bb}(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ \xi(\lambda) \end{pmatrix} (1 \quad \eta(\lambda)), \tag{9.5.28}$$

其中，$r_{bb}(\lambda) = (c_b + \lambda + \lambda[\eta(\lambda), \xi] + \lim\limits_{\lambda \to \infty} \lambda[\eta(\lambda), 1 - \xi])^{-1}$.

$$\tag{9.5.29}$$

由 (9.5.22) 至 (9.5.29) 及分解定理可知 $R(\lambda)$ 是 Q 过程，并且

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda(1 - \lambda R(\lambda) 1) = C.$$

以下来证明定理 9.5.1 中(ii).

先对单瞬时态 Q 证明(ii). 设 b 是瞬时态，由于 Q 是单瞬时态拟 Q — 矩阵，瞬时态 b 是 q — 可和，若令

$$c_i \equiv \sum_{j \in E - \{i\}} q_{ij}, \qquad (i \in E),$$

$$C \equiv (c_i; i \in E)^T, \quad C^{(0)} = (c_i; i \in E_0),$$

那么 $c_i < +\infty \quad (i \in E)$.

由(9.5.1)有

$$\inf_{i \in E_0} \frac{1 + c_i}{1 + q_i} = 0. \tag{9.5.30}$$

设 $\bar{Q}$ 是 $E \times E$ 上单瞬时态对角形拟 Q — 矩阵，其中

$$\bar{q}_{ij} = \begin{cases} -q_i, & i = j \in E; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

由(9.5.30) 及引理 9.5.1，存在 $\bar{Q}$ 过程 $\Psi(\lambda)$ 使

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda(1 - \lambda \Psi(\lambda) 1) = C. \tag{9.5.31}$$

令

$$e^{(i)} = (0, q_{ij}; j \in E - \{i\}),$$

$$C^{(i)} = (c_i \delta_{ji}; j \in E)^T.$$

那么

$$C = \sum_{i \in E} C^{(i)}; e^{(i)} 1 = c_i, \qquad (i \in E).$$

对 E 的元素排序，不妨设 $E=\{b,1,2,\cdots\}$. 令

$$\Psi^{(b)}(\lambda)=\Psi(\lambda)+\Psi(\lambda)C^{(b)}\frac{e^{(b)}\Psi(\lambda)}{h^{(b)}+\lambda e^{(b)}\Psi(\lambda)\Psi C^{(b)}},\tag{9.5.32}$$

其中

$$\Psi C^{(b)}=\lim_{\lambda\downarrow 0}\Psi(\lambda)C^{(b)},$$

$$h^{(b)}=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda e^{(b)}\Psi(\lambda)(1-\Psi C^{(b)})\leqslant e^{(b)}1=c_b<+\infty.\tag{9.5.33}$$

若在(9.5.32)中出现$\frac{0}{0}$，规定$\frac{0}{0}=0$.

由定理 3.5.2，$\Psi^{(b)}(\lambda)$ 是 $Q^{(b)}$ 过程，$\Psi^{(b)}(\lambda)$ 的 $Q-$矩阵 $Q^{(b)}$ 满足

$$q_{bj}^{(b)}=q_{bj},\qquad (j\in E),\tag{9.5.34}$$

$$q_{ij}^{(b)}=\bar{q}_{ij},\qquad (i\in E_0,j\in E),\tag{9.5.35}$$

并且

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1-\lambda\sum_{j\in E}\psi_{ij}^{(b)}(\lambda))=\begin{cases}0, & i=b;\\ c_i, & i\in E_0.\end{cases}\tag{9.5.36}$$

又令

$$\Psi^{(1)}(\lambda)=\Psi^{(b)}(\lambda)+\Psi^{(b)}(\lambda)C^{(1)}\frac{e^{(1)}\Psi^{(b)}(\lambda)}{h^{(1)}+\lambda e^{(1)}\Psi^{(b)}(\lambda)\Psi^{(b)}C^{(1)}}.\tag{9.5.37}$$

同理可知，$\Psi^{(1)}(\lambda)$ 是 $Q^{(1)}$ 过程，$Q-$矩阵 $Q^{(1)}$ 满足

$$q_{ij}^{(1)}=q_{ij},\qquad (i=b,1;j\in E).\tag{9.5.38}$$

$$q_{ij}^{(1)}=\bar{q}_{ij},\qquad (i\in E-\{b,1\};j\in E),\tag{9.5.39}$$

并且

$$\Psi^{(1)}(\lambda)\geqslant\Psi^{(b)}(\lambda)\geqslant\Psi(\lambda),$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1-\lambda\sum_{j\in E}\psi_{ij}^{(1)}(\lambda))=\begin{cases}0, & i=b,1;\\ c_i, & i\in E-\{b,1\}.\end{cases}\tag{9.5.40}$$

依次下去，可归纳定义一列过程$\{\Psi^{(n)}(\lambda);n\geqslant 1\}$

$$\Psi(\lambda) \leqslant \Psi^{(b)}(\lambda) \leqslant \Psi^{(1)}(\lambda) \leqslant \cdots \leqslant \Psi^{(n)}(\lambda) \leqslant \cdots, \tag{9.5.41}$$

$$\Psi^{(n+1)}(\lambda) = \Psi^{(n)}(\lambda) + \Psi^{(n)}(\lambda)C^{(n+1)} \frac{e^{(n+1)}\Psi^{(n)}(\lambda)}{h^{(n+1)} + \lambda e^{(n+1)}\Psi^{(n)}(\lambda)\Psi^{(n)}C^{(n+1)}}. \tag{9.5.42}$$

$\Psi^{(n+1)}(\lambda)$ 的 $Q-$ 矩阵 $Q^{(n+1)}$ 满足

$$q_{ij}^{(n+1)} = \begin{cases} q_{ij}, & i = b,1,\cdots,n+1; j \in E; \\ \bar{q}_{ij}, & \text{否则}. \end{cases} \tag{9.5.43}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1 - \lambda\sum_{j\in E}\psi_{ij}^{(n+1)}(\lambda)) = \begin{cases} 0, & i = b,1,\cdots,n+1; \\ c_i, & \text{否则}. \end{cases} \tag{9.5.44}$$

令

$$\Psi^{(\infty)}(\lambda) = \lim_{n\to\infty}\Psi^{(n)}(\lambda). \tag{9.5.45}$$

那么,利用每个 $\Psi^{(n)}(\lambda)$ 是 $Q^{(n)}$ 过程这一事实及单调收敛定理得, $\Psi^{(\infty)}(\lambda)$ 是 E 上的马氏链.

由(9.5.44)及 $\Psi^{(\infty)}(\lambda) \geqslant \Psi^{(n)}(\lambda)$ 得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1 - \lambda\Psi^{(\infty)}(\lambda)1) = 0. \tag{9.5.46}$$

设 $Q^{(\infty)}$ 是 $\Psi^{(\infty)}(\lambda)$ 的 $Q-$ 矩阵,以下证明 $Q^{(\infty)} = Q$.

$\forall\, i_0, j_0 \in E$,让 n 充分大使 $i_0 \in \{b,1,\cdots,n\}$,由于 $\Psi^{(\infty)}(\lambda) \geqslant \Psi^{(n)}(\lambda)$ 得

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \lambda(\lambda\psi_{i_0j_0}^{(\infty)}(\lambda) - \delta_{i_0j_0}) - \lambda(\lambda\psi_{i_0j_0}^{(n)}(\lambda) - \delta_{i_0j_0}) \\
&= \lambda^2\psi_{i_0j_0}^{(\infty)}(\lambda) - \lambda^2\psi_{i_0j_0}^{(n)}(\lambda) \\
&= \lambda(1 - \lambda\sum_{j\in E}\psi_{i_0j}^{(n)}(\lambda)) - \lambda(1 - \lambda\sum_{j\in E}\psi_{i_0j}^{(\infty)}(\lambda)) \\
&\quad + \lambda^2\sum_{j\in E-\{j_0\}}(\psi_{i_0j}^{(n)}(\lambda) - \psi_{i_0j}^{(\infty)}(\lambda)) \\
&\leqslant \lambda(1 - \lambda\sum_{j\in E}\psi_{i_0j}^{(n)}(\lambda)) - \lambda(1 - \lambda\sum_{j\in E}\psi_{i_0j}^{(\infty)}(\lambda)) \\
&\leqslant \lambda(1 - \lambda\sum_{j\in E}\psi_{i_0j}^{(n)}(\lambda)).
\end{aligned}$$

由(9.5.44),有

$$\lim_{\lambda\to\infty}(\lambda(\lambda\psi_{i_0j_0}^{(\infty)}(\lambda)-\delta_{i_0j_0})-\lambda(\lambda\psi_{i_0j_0}^{(n)}(\lambda)-\delta_{i_0j_0}))=0.$$

从而

$$q_{i_0j_0}^{(\infty)}=q_{i_0j_0}^{(n)}=q_{i_0j_0},$$

故

$$Q^{(\infty)}=Q.$$

从而 $\Psi^{(\infty)}(\lambda)$ 是 Q 过程，Q 是 $Q-$ 矩阵. 至于诚实 Q 过程可由以下构造出来.

任取 E 上不等于零的非负可和行向量 $a=(a_i,i\in E)$，令

$$R(\lambda)=\Psi^{(\infty)}(\lambda)+(1-\lambda\Psi^{(\infty)}(\lambda)1)\frac{a\Psi^{(\infty)}(\lambda)}{\lambda a\Psi^{(\infty)}(\lambda)1}. \tag{9.5.47}$$

由(9.5.46)及定理 3.5.2 知 $R(\lambda)$ 是诚实 Q 过程.

由于瞬时态 b 为 $q-$ 可和，对 $R(\lambda)$ 关于禁止状态 b 使用分解定理，可构造出无穷多个诚实 Q 过程.

以下对于 Q 含 $m(m>1)$ 个瞬时态情况，证明(ii). 令

$$c_i=\sum_{j\in E-\{i\}}q_{ij},\qquad (i\in E).$$

由于 Q 为瞬时态 $q-$ 可和，那么 $c_i<+\infty\quad(i\in E)$. 令 $\overline{Q}$ 是 Q 的对角线元组成的对角形拟 $Q-$ 矩阵. 由

$$\inf_{i\in E_0}\frac{1+c_i}{1+q_i}=0. \tag{9.5.48}$$

根据 Q 的瞬时态个数，把 E_0 分成 m 个可数集的并.

$$E_0=\bigcup_{k=1}^{m}E_0^{(k)},\qquad E_0^{(k)}\cap E_0^{(l)}=\varnothing,\qquad (k\neq l),$$

$$\inf_{i\in E_0^{(k)}}\frac{1+c_i}{1+q_i}=0,\qquad (1\leqslant k\leqslant m).$$

设 $H=\{b_k;k=1,\cdots,m\}$ 是 Q 的 m 个瞬时态，分别考虑 $\overline{Q}$ 在 $\{b_k\}\cup E_0^{(k)}$ 上的限制 $\overline{Q}^{(k)}$，使用引理 9.5.1 可得到 $\overline{Q}^{(k)}$ 过程 $\overline{\Psi}^{(k)}(\lambda)$. 令

$$\Psi(\lambda)=\begin{pmatrix}\overline{\Psi}^{(1)}(\lambda) & & & \\ & \overline{\Psi}^{(2)}(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \overline{\Psi}^{(m)}(\lambda)\end{pmatrix}. \tag{9.5.49}$$

那么 $\Psi(\lambda)$ 是 $\overline{Q}$ 过程，且

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1-\lambda\Psi(\lambda)1)=C,\quad C=(c_i,i\in E)^T. \quad (9.5.50)$$

剩下的证明与前面完成的单瞬时态情况的证明完全一样. 故略.

到此，定理 9.5.1 全部证完.

§6 补充与注记

含瞬时态对角型 Q－矩阵的特征由刘再明、陈安岳给出，§1 取自于刘、陈[1].

D. Williams 在构造全瞬时态 Q 过程时，使用了 §2 中研究的单瞬时态加边对角型 Q－矩阵所对应的 Q 过程，但是，他并没有研究这种 Q 过程存在的充要条件. 这一工作由邹捷中、刘再明完成. §2 取自于邹、刘[1].

柯氏矩阵最初由 Kolmogorov[3] 提出；之后，Chung K. L. [1] 和 Reuter[1] 对此进行了详细研究，得到了定理 9.3.1. 陈安岳将柯氏矩阵进行推广，得到了定理 9.3.2. 在此基础之上，张汉君对柯氏矩阵作了进一步的推广，得到了定理 9.3.3.

§4 取自于刘再明、侯振挺[生灭 Q－矩阵，即将在《数学学报》发表]. 其中，定理 9.4.2 由唐令其[1] 得到；引理 9.4.1 由费志凌[1] 得到；含瞬时态双边生灭过程的存在唯一性问题由刘再明、侯振挺[1] 所解决.

关于生灭 Q－矩阵定性理论的进一步讨论见刘、侯[生灭 Q－矩阵]. 单瞬时态单边生灭过程的构造见唐令其[1]. 含有限个瞬时态双边生灭过程的构造见刘再明[含瞬时态生灭过程的构造，即将在《数学年刊》发表].

§5 取自于刘再明[1].

第3篇

Q过程的唯一性

10 Q过程的唯一性

§1 结果的陈述

设Q是$Q-$矩阵，本章研究在什么条件下Q过程唯一. 具体来说，我们得到了下列唯一性准则.

定理 10.1.1 设$Q=(q_{ij};i,j\in E)$是一个$Q-$矩阵，则存在唯一的Q过程的充要条件是Q全稳定(即$q_i<+\infty,\forall\, i\in E$)而且下列两条同时成立.

(i) (H)条件成立，即

$$\inf_{i\in E}\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)>0,\qquad(\lambda>0); \tag{10.1.1}$$

(ii) $\Phi(\lambda)$诚实，或者方程

$$\begin{cases}\eta(\lambda)(\lambda I-Q)=\mathbf{0},\\ \mathbf{0}\leqslant\eta(\lambda)\in l_E,\end{cases}\qquad(\lambda>0) \tag{10.1.2}$$

只有零解.

其中$\Phi(\lambda)=(\varphi_{ij}(\lambda);i,j\in E)$表示最小$Q$过程.

§2 定理 10.1.1 的证明:必要性部分

本节证明定理 10.1.1 中条件的必要性.

引理 10.2.1 若Q是带瞬时状态的$Q-$矩阵，则存在无穷多个Q过程. 从而Q过程不唯一.

证明 设Q是一个带瞬时状态的$Q-$矩阵，b是任意一个瞬时状态，$R(\lambda)$是任一Q过程，对$R(\lambda)$关于状态b使用分解定理有

$$R(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \Psi(\lambda)\end{pmatrix}+r_{bb}(\lambda)\begin{pmatrix}1\\ \xi(\lambda)\end{pmatrix}(1\quad \eta(\lambda)),\tag{10.2.1}$$

其中$r_{bb}(\lambda)=(c_0+\lambda+\lambda[\eta(\lambda),\xi])^{-1}$，$c_0\geqslant 0$是常数.

任取$c\geqslant c_0$，令

$$r_{bb}^c(\lambda)=(c+\lambda+\lambda[\eta(\lambda),\xi])^{-1},$$

$$R^c(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \Psi(\lambda)\end{pmatrix}+r_{bb}^c(\lambda)\begin{pmatrix}1\\ \xi(\lambda)\end{pmatrix}(1\quad \eta(\lambda)).\tag{10.2.2}$$

由分解定理易得，$R^c(\lambda)$是Q过程且当$c\geqslant c_0$取不同值时，得到不同的$R^c(\lambda)$，从而存在无穷多个Q过程.

引理 10.2.2 设Q是全稳定Q－矩阵，$\Phi(\lambda)$是最小Q过程，如果Q过程唯一，则定理 10.1.1 中(i)，(ii) 同时成立.

证明 如果(H)条件不成立，由推论 4.2.1 知，存在无穷多个诚实Q过程，从而Q过程非唯一.

设条件(ii) 不成立，即$\Phi(\lambda)$不是诚实的，且(10.1.2) 有非零解，从而由引理 4.2.3，存在非零的行协调族$\eta(\lambda)$. 令

$$R(\lambda)=\Phi(\lambda)+(\mathbf{1}-\lambda\Phi(\lambda)\mathbf{1})\frac{\eta(\lambda)}{\lambda\eta(\lambda)\mathbf{1}}.\tag{10.2.3}$$

由定理 3.5.2 得，$R(\lambda)$是一个异于$\Phi(\lambda)$的Q过程，从而Q过程不唯一.

综合引理 10.2.1 和引理 10.2.2，我们证明了定理 10.1.1 中条件的必要性.

§ 3 定理 10.1.1 的证明：充分性部分

本节证明定理 10.1.1 中条件的充分性.

首先，我们指出，在Q全稳定之下，定理 10.1.1 中条件(i) 蕴含方程

$$\begin{cases}(\lambda I-Q)U=\mathbf{0},\\ \mathbf{0}\leqslant U\leqslant \mathbf{1},\end{cases}\quad(\lambda>0)\tag{10.3.1}$$

只有零解.

实际上,由定理 4.2.1,条件(i) 等价于

$$\sup_i\{\sum_{a\in H}X_i^a(\lambda)+\bar{X}_i(\lambda)\}<1,\qquad(\lambda>0).\quad(10.3.2)$$

其中 $H,X^a(\lambda),\bar{X}(\lambda)$ 的定义见第四章 §2.

因为 $\bar{X}(\lambda)\neq 0$ 时,$\sup_i\bar{X}_i(\lambda)=1$($\bar{X}(\lambda)$ 是(10.3.1) 的最大解),由(10.3.2) 知 $\bar{X}(\lambda)=0$,即方程(10.3.1) 只有零解.

这样,条件(i) 等价于下面两个条件

(i_1) 方程(10.3.1) 只有零解;

(i_2) $\sup_i\sum_{a\in H}\varphi_{ia}(\lambda)d_a<1,\qquad(\lambda>0).$

以下证明定理 10.1.1 中条件的充分性.

设 Q 是全稳定 $Q-$ 矩阵且定理 10.1.1 中条件(i),(ii) 成立. 设 $\Psi(\lambda)$ 是任一 Q 过程,由(i_1),定理 4.3.1 中的 $B(\lambda)=0$,从而(4.3.2) 化为

$$\psi_{ij}(\lambda)=\varphi_{ij}(\lambda)+\sum_{a\in H}X_i^a(\lambda)F_j^a(\lambda).\qquad(10.3.3)$$

如果 H 为空集,由上式知,$\Psi(\lambda)=\Phi(\lambda)$,因而 Q 过程唯一. 下设 H 非空. 将(10.3.3) 式代入 $\Psi(\lambda)$ 的预解方程,注意 $\Phi(\lambda)$ 满足预解方程,以及由于引理 4.2.7,$X^a(\lambda)$,$(a\in H)$ 线性独立,得

$$F^a(\lambda)A(\lambda,\mu)=F^a(\mu)+(\mu-\lambda)\sum_{b\in H}[F^a(\lambda),X^b(\mu)]F^b(\mu),$$

$$(a\in H).\qquad(10.3.4)$$

其中 $A(\lambda,\mu)=I+(\lambda-\mu)\Phi(\mu)$.

因为 $F^a(\lambda)\geqslant 0,\lambda[F^a(\lambda),1]\leqslant 1$. 由上式可见,对任意 $\lambda,\mu>0$,$F^a(\lambda)A(\lambda,\mu)\in L_s$. 于是固定 a 及 $\lambda>0$,$\eta(\mu)=F^a(\lambda)A(\lambda,\mu)$ ($\mu>0$) 是行协调族,由引理 3.1.7 得

$$\eta(\mu)=\alpha\Phi(\mu)+\bar{\eta}(\mu),$$

其中 $\alpha\geqslant 0$ 与 μ 无关,$\bar{\eta}(\mu)\in L_\lambda^+$ 为行协调族. 由(ii),$L_\lambda^+=\{0\}$,故 $\bar{\eta}(\mu)=0$. 又由于 α 与 a 及 λ 有关,故

$$\alpha=\alpha^a(\lambda),\quad\eta(\mu)=\alpha^a(\lambda)\Phi(\mu),$$

即

$$F^a(\lambda)A(\lambda,\mu) = \alpha^a(\lambda)\Phi(\mu). \tag{10.3.5}$$

特别地，当 $\mu = \lambda$ 时

$$F^a(\lambda) = \alpha^a(\lambda)\Phi(\lambda). \tag{10.3.6}$$

由条件(i) 有

$$\begin{aligned} 1 \geqslant \lambda[F^a(\lambda),\mathbf{1}] &= \lambda[\alpha^a(\lambda)\Phi(\lambda),\mathbf{1}] \\ &= [\alpha^a(\lambda),\lambda\Phi(\lambda)\mathbf{1}] \geqslant \eta_\lambda[\alpha^a(\lambda),\mathbf{1}], \end{aligned}$$

其中

$$\eta_\lambda = \inf_{i\in E}\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda) > 0.$$

故

$$[\alpha^a(\lambda),\mathbf{1}] \leqslant \frac{1}{\eta_\lambda}. \tag{10.3.7}$$

将(10.3.6) 代入(10.3.4)，我们有

$$\alpha^a(\lambda) = \alpha^a(\mu) - (\mu-\lambda)\sum_{b\in H}[\alpha^a(\lambda),\Phi(\lambda)X^b(\mu)]\alpha^b(\mu), \tag{10.3.8}$$

由于$(X^c(\lambda),\lambda>0)$ 的列协调性有

$$\alpha^a(\lambda) = \alpha^a(\mu) + \sum_{b\in H}[\alpha^a(\lambda),X^b(\lambda)-X^b(\mu)]\alpha^b(\mu). \tag{10.3.9}$$

由(10.3.8)，$\alpha^a(\lambda)$ 随 λ 增加而不增. 往证

$$\alpha^a(\lambda)\downarrow \mathbf{0}, \quad \lambda\uparrow+\infty. \tag{10.3.10}$$

实际上，由于 $\Psi(\lambda)$ 和 $\Phi(\lambda)$ 均满足 Q 条件，由(10.3.3) 及(10.3.6) 得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{a\in H}\lambda X_i^a(\lambda)(\lambda\alpha^a(\lambda)\Phi(\lambda))_j = 0,$$

从而

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda X_i^a(\lambda)\alpha_j^a(\lambda)\lambda\varphi_{jj}(\lambda) = 0, \qquad (a\in H).$$

由 $\Phi(\lambda)$ 的连续性条件得

$$\delta_{ia}d_a\lim_{\lambda\to\infty}\alpha_j^a(\lambda)\delta_{jj} = 0.$$

取 $i=a$ 得证(10.3.10).

当 $\lambda > \mu$ 时，由(10.3.7)有

$$\sum_{b\in H}[\alpha^a(\lambda),X^b(\lambda)]\alpha^b(\mu) \leqslant \sum_{b\in H}[\alpha^a(\lambda),X^b(\mu)]\alpha^b(\mu)$$

$$\leqslant \sum_{b\in H}[\alpha^a(\mu),X^b(\mu)]\alpha^b(\mu) \leqslant \sum_{b\in H}[\alpha^a(\mu),X^b(\mu)]\frac{1}{\eta_\mu}$$

$$\leqslant [\alpha^a(\mu),\sum_{b\in H}X^b(\mu)]\frac{1}{\eta_\mu} \leqslant [\alpha^a(\mu),1]\frac{1}{\eta_\mu}$$

$$\leqslant (\frac{1}{\eta_\mu})^2 < +\infty.$$

因此(10.3.9)可写成

$$\alpha^a(\lambda) + \sum_{b\in H}[\alpha^a(\lambda),X^b(\mu)]\alpha^b(\mu)$$

$$= \alpha^a(\mu) + \sum_{b\in H}[\alpha^a(\lambda),X^b(\lambda)]\alpha^b(\mu).$$

并且当 $\lambda \to +\infty$ 时，可用控制收敛定理得

$$0 + \sum_{b\in H}[0,X^b(\mu)]\alpha^b(\mu) = \alpha^a(\mu) + \sum_{b\in H}[0,0]\alpha^b(\mu).$$

所以 $\alpha^a(\mu) = \mathbf{0}\quad (a \in H, \mu > 0)$. 这样，$F^a(\lambda) = \mathbf{0}\quad (a \in H, \lambda > 0)$. 从而 $\Psi(\lambda) = \Phi(\lambda)$. 因而 Q 过程是唯一的.

定理 10.1.1 的充分性部分证毕.

§4 全稳定 B 型、F 型 Q 过程的唯一性

定理 10.4.1 设 Q 是全稳定 Q — 矩阵，则 B 型 Q 过程唯一的充要条件是方程

$$\begin{cases}(\lambda I - Q)U = \mathbf{0}, \\ \mathbf{0} \leqslant U \leqslant \mathbf{1},\end{cases} \qquad (\lambda > 0) \qquad (10.4.1)$$

只有零解. 特别地，若 Q 保守，则 Q 过程唯一的充要条件是(10.4.1)只有零解.

证明 用 $\Phi(\lambda)$ 表示最小 Q 过程. 设 $R(\lambda)$ 是任一 B 型 Q 过程，因此

$$(\lambda I - Q)\Phi(\lambda) = I, \qquad (\lambda I - Q)R(\lambda) = I.$$

若令

$$U(\lambda) = \lambda(R(\lambda) - \Phi(\lambda))\mathbf{1}.$$

则 $U(\lambda)$ 是(10.4.1)的解. 如果(10.4.1)只有零解,则

$$R(\lambda) = \Phi(\lambda).$$

从而 B 型 Q 过程唯一.

反之,若(10.4.1)有非零解,由定理 4.2.1, $\overline{X}(\lambda) = \mathbf{1} - \lambda\Phi(\lambda)\mathbf{1} - \Phi(\lambda)d$ 是(10.4.1)的最大解,故 $\overline{X}(\lambda) \neq \mathbf{0}$,其中 $d_i = q_i - \sum_{j\neq i} q_{ij}\quad (i \in E)$. 因此,最小 Q 过程不诚实,任取 E 上不为零的可和行向量 $\alpha = (\alpha_i, i \in E)$. 令

$$R(\lambda) = \Phi(\lambda) + \overline{X}(\lambda)\frac{\alpha\Phi(\lambda)}{c + \lambda\alpha\Phi(\lambda)\overline{X}}, \qquad (10.4.2)$$

其中 $\overline{X} = \lim_{\lambda\downarrow 0}\overline{X}(\lambda)$,

$$c = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda\alpha\Phi(\lambda)(\mathbf{1} - \overline{X}) \leqslant \alpha(\mathbf{1} - \overline{X}) < +\infty.$$

由定理 3.5.2, $R(\lambda)$ 的一个异于 $\Phi(\lambda)$ 的 Q 过程,且

$$(\lambda I - Q)R(\lambda) = I. \qquad (10.4.3)$$

故 $R(\lambda)$ 是 B 型 Q 过程. 从而 B 型 Q 过程不唯一. 定理的前半部分证毕. 只要注意,若 Q 保守,则一切 Q 过程都是 B 型的,立得定理后半部分成立. 定理证毕.

推论 10.4.1 设 Q 是全稳定 Q - 矩阵,则最小 Q 过程 $\Phi(\lambda)$ 诚实的充要条件是 Q 保守且方程(10.4.1)只有零解.

证明 由定理 10.4.1 以及定理 4.2.1 立得本推论.

定理 10.4.2 设 Q 是全稳定 Q - 矩阵,则 F 型 Q 过程唯一的充要条件是最小 Q 过程 $\Phi(\lambda)$ 诚实或方程

$$\begin{cases}\eta(\lambda I - Q) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{0} \leqslant \eta, \eta\mathbf{1} < +\infty,\end{cases} \quad (\lambda > 0) \qquad (10.4.4)$$

只有零解.

证明 充分性

若 $\Phi(\lambda)$ 为诚实的 Q 过程,则应用 $\Phi(\lambda)$ 的最小性及任意 Q 过程均满足范条件,得 Q 过程唯一. 从而 F 型 Q 过程唯一. 若(10.4.4)

只有零解，设 $R(\lambda)=(\gamma_{ij}(\lambda);i,j\in E)$ 是任一 F 型 Q 过程，那么

$$R(\lambda)(\lambda I-Q)=I,\qquad \Phi(\lambda)(\lambda I-Q)=I,\quad (10.4.5)$$

$\forall\, i\in E$，令

$$\eta^{(i)}(\lambda)=(\gamma_{ij}(\lambda)-\varphi_{ij}(\lambda);j\in E).$$

由(10.4.5)，$\eta^{(i)}(\lambda)$ 是(10.4.4)的解，故 $\eta^{(i)}(\lambda)=\mathbf{0}$. 因此，$R(\lambda)\equiv\Phi(\lambda)$. 从而 F 型 Q 过程唯一.

必要性

如果 $\Phi(\lambda)$ 不诚实，且方程(10.4.4)存在非零解. 由引理 4.2.3，存在非零的行协调族 $\bar{\eta}(\lambda)\in L_{\Phi(\lambda)}$，使得 $\bar{\eta}(\lambda)$ 是(10.4.4)的解，且

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\bar{\eta}(\lambda)=\mathbf{0}.$$

令

$$R(\lambda)=\Phi(\lambda)+(1-\lambda\Phi(\lambda)1)\frac{\bar{\eta}(\lambda)}{\lambda\bar{\eta}(\lambda)1}.\qquad (10.4.6)$$

那么，由定理 3.5.2，$R(\lambda)$ 是异于 $\Phi(\lambda)$ 的 Q 过程，显然

$$R(\lambda)(\lambda I-Q)=\Phi(\lambda)(\lambda I-Q)=I.$$

即 $R(\lambda)$ 是 F 型 Q 过程. 从而 F 型 Q 过程不唯一. 必要性证毕.

应用本节定理 10.4.1 和定理 10.4.2 的结果，我们可以将 Q 过程唯一性准则(定理 10.1.1)叙述为下列形式.

定理 10.4.3 设 Q 是任一 $Q-$ 矩阵，则 Q 过程唯一的充要条件是 Q 全稳定而且下列三条同时成立

(i) B 型 Q 过程唯一；

(ii) F 型 Q 过程唯一；

(iii) $\inf\limits_{i\in H}\lambda\sum\limits_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)>0,\qquad(\lambda>0).$

其中 $H=\{i:q_i>\sum\limits_{j\neq i}q_{ij}\}$.

证明 由定理 10.1.1，定理 10.4.1，定理 10.4.2 和下述命题 10.4.1，知本定理成立.

命题 10.4.1 (H) 条件成立等价于下列两条同时成立.

(a) 方程(10.4.1)只有零解；

(b) $\inf_{i\in E}\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)>0$, $(\lambda>0)$.

为证明命题 10.4.1,先给出两个引理.

引理 10.4.1 设

$$a_{ik}\geqslant 0,\quad (i,k\in E),\quad \sum_{k\in E}a_{ik}\leqslant 1,\quad b_i\geqslant 0,\quad (i\in E). \tag{10.4.7}$$

而 X_i^* $(i\in E)$ 是非负线性方程组

$$x_i=\sum_{k\in E}a_{ik}x_k+b_i,\qquad (i\in E) \tag{10.4.8}$$

的最小非负解,令 $D=\{i:i\in E,b_i>0\}$,则

$$X_i^*\leqslant\sup_{j\in D}X_j^*,\qquad (i\in E). \tag{10.4.9}$$

即

$$\sup_{i\in E}X_i^*=\sup_{j\in D}X_j^*. \tag{10.4.10}$$

证明 令

$$\begin{cases}x_i^{(0)}=b_i, & (i\in E);\\ x_i^{(n+1)}=\sum\limits_{k\in D}a_{ik}x_k^{(n)}+b_i, & (n\geqslant 0,i\in E).\end{cases} \tag{10.4.11}$$

则

$$x_i^{(n)}\uparrow X_i^*,\qquad (n\uparrow+\infty),\quad (i\in E).$$

由于

$$x_i^{(0)}=\begin{cases}b_i, & i\in D;\\ 0, & i\in E-D.\end{cases}$$

所以

$$x_i^{(0)}\leqslant\sup_{j\in D}x_j^{(0)},\qquad (i\in E).$$

假定有

$$x_i^{(n)}\leqslant\sup_{j\in D}x_j^{(n)},\qquad (i\in E).$$

则 $\forall\, i\in E-D$ 有

$$x_i^{(n+1)}=\sum_{i\in E}a_{ik}x_k^{(n)}+b_i=\sum_{k\in E}a_{ik}x_k^{(n)}\leqslant\sum_{k\in E}a_{ik}\sup_{j\in D}x_j^{(n)}$$

$$\leqslant \sup_{j\in D} x_j^{(n)} \leqslant \sup_{j\in D} x_j^{(n+1)}.$$

于是有

$$x_i^{(n+1)} \leqslant \sup_{j\in D} x_j^{(n+1)}, \qquad (i \in E).$$

由归纳法,对一切 n,有

$$x_i^{(n)} \leqslant \sup_{j\in D} x_j^{(n)} \leqslant \sup_{j\in D} X_j^*, \qquad (i \in E).$$

从而

$$X_i^* \leqslant \sup_{j\in D} X_j^*, \qquad (i \in E).$$

即(10.4.9)成立.引理证毕.

引理 10.4.2 若方程(10.4.1)只有零解,则

$$\inf_{i\in E} \lambda \sum_{j\in E} \varphi_{ij}(\lambda) = \inf_{i\in H} \lambda \sum_{j\in E} \varphi_{ij}(\lambda). \qquad (10.4.12)$$

证明 由定理 4.2.1,$\overline{X}(\lambda) = \mathbf{1} - \lambda\Phi(\lambda)\mathbf{1} - \Phi(\lambda)d$ 是方程(10.4.1)的最大解,注意到$(\lambda I - Q)\Phi(\lambda)d = d$ 得,$\mathbf{1} - \lambda\Phi(\lambda)\mathbf{1}$ 是非负线性方程组

$$x_i = \sum_{k\neq i} \frac{q_{ik}}{\lambda + q_i} x_k + \frac{q_i - \sum_{j\neq i} q_{ij}}{\lambda + q_i}, \qquad (i \in E).$$

$$(10.4.13)$$

的有界解.注意(10.4.1)只有零解,从而(10.4.13)的有界解唯一,故我们可以说 $1 - \lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)$ $(i \in E)$ 是方程(10.4.13)的最小非负解.于是由引理 10.4.1 得

$$\sup_{i\in E}(1 - \lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)) = \sup_{i\in H}(1 - \lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)).$$

从而(10.4.12)成立.

引理 10.4.2 证毕.

命题 10.4.1 之证明

若(H)条件成立,显然定理 10.4.3 中(iii)成立,由 §3 知,方程(10.4.1)只有零解.反之,若(10.4.1)只有零解,且定理 10.4.3 中(iii)成立,由引理 10.4.1 和引理 10.4.2 知(H)条件成立.命题证毕.

§5 补充与注记

Q 过程的唯一性问题是 Q — 矩阵问题的重要组成部分，也是人们最关心的问题之一. 几十年来，对此问题的研究人们作出过重大努力(如 Reuter 等人)，但都没有成功. 直到 1974 年，侯振挺[1]得到了全稳定 Q 过程的唯一性准则，由于这一工作，他获得 1978 年度英国 Davidson 奖.

本章内容基本上取自于侯振挺[3].

11 诚实Q过程的唯一性

本章讨论诚实 Q 过程的唯一性. 对于全稳定、全瞬时、有限稳定无限瞬时以及有限瞬时无限稳定这四种情形(即除"双无限"情形以外的其它情形),在 §1 — §4 中分别解决了诚实 Q 过程的唯一性问题. 在 §5 中,我们首先给出了"双无限"诚实 Q 过程唯一的例子,然后得到了"双无限"诚实 Q 过程唯一的若干必要条件和充分条件.

§1 全稳定诚实 Q 过程的唯一性

在本节中,若无特别声明,恒设 Q 是全稳定 Q — 矩阵,$\Phi(\lambda)$ 是最小 Q 过程. 回忆第四章 §2,$\mu_\lambda^+(1)$,L_λ^+ 分别表示方程

$$\begin{cases}(\lambda I - Q)U = \mathbf{0}, \\ \mathbf{0} \leqslant U \leqslant \mathbf{1},\end{cases} \qquad (\lambda > 0) \qquad (11.1.1)$$

和

$$\begin{cases}v(\lambda I - Q) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{0} \leqslant v, v\mathbf{1} < +\infty,\end{cases} \qquad (\lambda > 0) \qquad (11.1.2)$$

解的全体.

而 $M_{\Phi(\lambda)}$,$L_{\Phi(\lambda)}$ 分别表示关于 $\Phi(\lambda)$ 的列协调族和行协调族的全体.

$$L^0_{\Phi(\lambda)} = L_\lambda^+ \cap L_{\Phi(\lambda)}, \qquad M^0_{\Phi(\lambda)} = \mu_\lambda^+(\mathbf{1}) \cap M_{\Phi(\lambda)}.$$

由引理 4.2.3 可知,$\forall\ \mu > 0, \lambda > 0$

$$A(\mu,\lambda):\quad g(\mu) \rightarrow g(\mu)A(\mu,\lambda)$$

$$(A(\mu,\lambda) = I + (\mu - \lambda)\Phi(\lambda), g(\mu) \in L_\mu^+)$$

是从 L_μ^+ 到 $L^0_{\Phi(\lambda)}$ 线性映射,容易证明它是单射而且把 L_μ^+ 中线性独立的元素组映成 $L^0_{\Phi(\lambda)}$ 中的一组线性独立元素. 显然,L_μ^+ 和 $L^0_{\Phi(\lambda)}$ 维数相同.

引理 11.1.1 如果(H)条件成立,即

$$\inf_{i\in E}\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)\triangleq c_\lambda>0. \qquad (\lambda>0), \qquad (11.1.3)$$

则对于任意行协调族 $\eta(\lambda)\in L_{\Phi(\lambda)}$,有

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta(\lambda)1<+\infty. \qquad (11.1.4)$$

证明 由行协调性

$$\eta(\lambda)-\eta(\mu)=(\mu-\lambda)\eta(\lambda)\Phi(\mu).$$

因此

$$\eta(\mu)1-\eta(\lambda)1=\frac{\lambda-\mu}{\lambda}\lambda\eta(\lambda)\Phi(\mu)1.$$

在上式中令 $\lambda\to+\infty$,注意 $\eta(\lambda)1\to 0 \quad (\lambda\to+\infty)$,得

$$\eta(\mu)1\geqslant\frac{c_\mu}{\mu}(\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta(\lambda)1).$$

故(11.1.4)成立.引理证毕.

以下给出全稳定诚实Q过程唯一性准则.

定理 11.1.1 设Q是全稳定Q-矩阵,则存在唯一诚实Q过程的充要条件是下列两条同时成立

(i) (H)条件成立,即 $\inf_{i\in E}\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)>0, \quad (\lambda>0)$,

(ii) Q保守,或者Q非保守但方程

$$\begin{cases}v(\lambda I-Q)=0,\\ 0\leqslant v\in L_E,\end{cases} \qquad (\lambda>0) \qquad (11.1.5)$$

恰有一个线性独立解.

证明 必要性 设存在唯一的诚实Q过程,由推论 4.3.1,(H)条件必成立,(i)满足.

若Q非保守,那么$\Phi(\lambda)$是非诚实的,从而

$$Z(\lambda)=1-\lambda\Phi(\lambda)1\neq 0. \qquad (11.1.6)$$

此时,我们证明方程(11.1.5)恰有一个线性独立解.

如果(11.1.5)没有线性独立解,那么仅有零解,由定理 10.1.1,Q过程唯一,但是,$\Phi(\lambda)$非诚实,从而不存在诚实Q过程,矛盾!

如果(11.1.5)有两个或两个以上的线性独立解,即 L_λ^+ 至少

含两个线性独立的元素，从而 $L^0_{\Phi(\lambda)}$ 也至少含两个线性独立元素. 任取 $L^0_{\Phi(\lambda)}$ 的两个线性独立元 $\eta^{(1)}(\lambda),\eta^{(2)}(\lambda)$，由引理 3.1.4

$$\lambda[\eta^{(1)}(\lambda),1-Z]<+\infty,\lambda[\eta^{(2)}(\lambda),1-Z]<+\infty$$

均与 λ 无关，其中 $Z=\lim\limits_{\lambda\downarrow 0}Z(\lambda)$，从而

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda[\eta^{(k)}(\lambda),1-Z]<+\infty,\qquad(k=1,2).$$

由于 $\eta^{(k)}(\lambda)\in L^0_{\Phi(\lambda)}$，显然

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta^{(k)}(\lambda)=0,\qquad(k=1,2).$$

令

$$R^{(k)}(\lambda)=\Phi(\lambda)+Z(\lambda)\frac{\eta^{(k)}(\lambda)}{\lambda\eta^{(k)}(\lambda)1}.\qquad(11.1.7)$$

由定理 3.5.2 得，$R^{(1)}(\lambda)$ 和 $R^{(2)}(\lambda)$ 均是诚实 Q 过程，由于 $\eta^{(1)}(\lambda)$ 与 $\eta^{(2)}(\lambda)$ 线性无关，故 $R^{(1)}(\lambda)\neq R^{(2)}(\lambda)$，矛盾！这样我们证明了方程 (11.1.5) 恰有一个线性独立解. 必要性证毕.

充分性　设(i)，(ii) 同时成立.

若 Q 保守，由定理 4.3.1

$$\bar{X}(\lambda)=1-\lambda\Phi(\lambda)1.\qquad(11.1.8)$$

由第十章 §3，(H) 条件成立蕴含方程

$$\begin{cases}(\lambda I-Q)U=0,\\ 0\leqslant U\leqslant 1,\end{cases}\qquad(\lambda>0)\qquad(11.1.9)$$

仅有零解. 而 $\bar{X}(\lambda)$ 是以上方程的最大解，从而 $\bar{X}(\lambda)=0$，即 $\lambda\Phi(\lambda)1=1$，故存在唯一的诚实 Q 过程 $\Phi(\lambda)$.

若 Q 非保守，但方程(11.1.5) 恰有一个线性独立解，从而 $L^0_{\Phi(\lambda)}$ 恰含一个线性独立元素. 不妨记为 $\eta(\lambda)$，显然 $\eta(\lambda)\neq 0$. 仿照(11.1.7)，我们可以得到一个诚实 Q 过程 $R(\lambda)$

$$R(\lambda)=\Phi(\lambda)+Z(\lambda)\frac{\eta(\lambda)}{\lambda\eta(\lambda)1}.\qquad(11.1.10)$$

设 $R'(\lambda)$ 是任一诚实 Q 过程，我们证明 $R'(\lambda)=R(\lambda)$，从而诚实 Q 过程唯一.

事实上，由第十章 §3 及 (H) 条件成立可得 $R(\lambda),R'(\lambda)$ 的下

列分解

$$R(\lambda) = \Phi(\lambda) + \sum_{a \in H} X^a(\lambda) F^a(\lambda), \qquad (11.1.11)$$

$$R'(\lambda) = \Phi(\lambda) + \sum_{a \in H} X^a(\lambda) F'^a(\lambda), \qquad (11.1.12)$$

其中 $0 \leqslant F^a(\lambda)$， $\lambda[F^a(\lambda), 1] \leqslant 1$；$0 \leqslant F'^a(\lambda), \lambda[F'^a(\lambda), 1] \leqslant 1$

注意第十章 §3 的证明过程可知，由(H) 条件成立可得

$$F^a(\lambda)A(\lambda,\mu) \in L^0_{\Phi(\mu)}, \quad F'^a(\lambda)A(\lambda,\mu) \in L^0_{\Phi(\mu)}, \quad (a \in H). \qquad (11.1.13)$$

由于 $L^0_{\Phi(\mu)}$ 仅含一个线性独立元素，从而存在非负实数 $c^a(\lambda)$，$c'^a(\lambda)$，使得

$$F^a(\lambda)A(\lambda,\mu) = c^a(\lambda)\eta(\mu), \quad F'^a(\lambda)A(\lambda,\mu) = c'^a(\lambda)\eta(\mu). \qquad (11.1.14)$$

取 $\mu = \lambda$，得

$$F^a(\lambda) = c^a(\lambda)\eta(\lambda), \quad F'^a(\lambda) = c'^a(\lambda)\eta(\lambda). \qquad (11.1.15)$$

注意 $\{X^a(\lambda); a \in H\}$ 线性独立$(X_i^a(\lambda) = \varphi_{ia}(\lambda)d_a)$，$\lambda R(\lambda)1 = \lambda R'(\lambda)1 = 1$，由(11.1.11)、(11.1.12)得

$$F^a(\lambda)1 = F'^a(\lambda)1, \qquad (a \in H). \qquad (11.1.16)$$

再由(11.1.15)得

$$c^a(\lambda) = c'^a(\lambda), \qquad (a \in H).$$

从而

$$F^a(\lambda) = F'^a(\lambda). \qquad (11.1.17)$$

由(11.1.11)、(11.1.12)得

$$R(\lambda) = R'(\lambda).$$

从而诚实 Q 过程唯一.

充分性证毕. 到此定理 11.1.1 证完.

§2 全瞬时态诚实 Q 过程的非唯一性

由定理 5.1.1 可得以下结论.

定理 11.2.1 设 Q 是全瞬时态 Q－矩阵，则存在无穷多个诚

实 Q 过程，故诚实 Q 过程不唯一.

§3　有限稳定态无限瞬时态诚实 Q 过程的非唯一性

由定理 6.1.1 可得以下结论.

定理 11.3.1　设 Q 是带有限个稳定态无限个瞬时态的 Q－矩阵，则存在无穷多个诚实 Q 过程，故诚实 Q 过程不唯一.

§4　有限瞬时态无限稳定态诚实 Q 过程的唯一性

本节给出有限个瞬时态诚实 Q 过程存在且唯一的充要条件. 设 $Q=(q_{ij};i,j\in E)$ 为含有限个瞬时态的拟 Q－矩阵，令

$$N=\{i;q_i<+\infty\},\quad H=E-N=\{i;q_i=+\infty\},$$

$$Q_N=(q_{ij};i,j\in N),\quad (Q\text{ 在 } N \text{ 上的限制}),$$

$$e^k=(q_{kj};j\in N),\quad \varepsilon^k=(q_{ik};i\in N)^T,\quad (k\in H).$$

注意，Q_N 是全稳定 Q－矩阵，用 $\Phi(\lambda)$ 表示最小 Q_N 过程，再令

$$\overline{X}(\lambda)=1-\lambda\Phi(\lambda)1-\Phi(\lambda)d.$$

其中 d 为 Q_N 的非保守列矢量，即

$$d=(q_i-\sum_{j\in N-\{i\}}q_{ij};i\in N)^T.$$

对 Q_N 按本章 §1 定义 $M^0_{\Phi(\lambda)},L^0_{\Phi(\lambda)}$ 显然，$0\in M^0_{\Phi(\lambda)},0\in L^0_{\Phi(\lambda)}$. 由列协调族的性质(见第三、四章) 及定理 4.2.1 知，$\overline{X}(\lambda)$ 是 $M^0_{\Phi(\lambda)}$ 中的最大元. 再令

$$M_\lambda=\{\{X^k(\lambda)\}_{k\in H};X^k(\lambda)\in M^0_{\Phi(\lambda)}\quad(k\in H),$$

$$\sum_{k\in H}X^k(\lambda)=\overline{X}(\lambda),e^k\sum_{m\in H-\{k\}}X^m(\lambda)<+\infty,\quad(k\in H)\}.$$

在以下讨论中不妨先假设瞬时态的个数大于 1.

关于有限个瞬时态诚实 Q 过程的唯一性有下列结果.

定理 11.4.1　设 $Q=(q_{ij};i,j\in E)$ 为含有限个瞬时态的拟 Q－矩阵，且瞬时态个数大于 1，那么存在唯一的诚实 Q 过程的充要条件是下列五条同时成立

(i) Q 保守，即 $e^k 1 = +\infty$, $(k \in H)$, $d = \sum_{k \in H} \varepsilon^k$;

(ii) $e^k \Phi(\lambda) 1 < +\infty$, $(\lambda > 0, k \in H)$;

(iii) $e^k \Phi \varepsilon^m < +\infty$, $(m, k \in H, m \neq k; \Phi \varepsilon^m = \lim_{\lambda \downarrow 0} (\Phi(\lambda) \varepsilon^m))$;

(iv) $M_\lambda = \{\{X^k(\lambda)\}_{k \in H}\}$ 为单点集；

(v) $L^0_{\Phi(\lambda)} = \{0\}$；或 $L^0_{\Phi(\lambda)} \neq \{0\}$ 但对任意非零 $\bar{\eta}(\lambda) \in L^0_{\Phi(\lambda)}$，存在 $k, m \in H, k \neq m$ 使得

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \bar{\eta}(\lambda)(\Phi \varepsilon^k + X^k) = +\infty, \quad \lim_{\lambda \to \infty} \lambda \bar{\eta}(\lambda)(\Phi \varepsilon^m + X^m) = +\infty.$$

其中 $X^l = \lim_{\lambda \downarrow 0} X^l(\lambda) \quad (l = k, m)$.

为证明上述定理，先给出几个引理和定理.

定义 11.4.1 设 $Q = (q_{ij}; i, j \in E)$，H 为 E 的有限子集（非单点集），令

$$N = E - H, \quad Q_N = (q_{ij}; i, j \in N),$$

$$e^k = (q_{kj}; j \in N), \quad \varepsilon^k = (q_{ik}; i \in N)^T, \quad (k \in H).$$

若存在 Q_N 过程 ${}_H R(\lambda)$，$\{\xi^k(\lambda)\}_{k \in H} \subset M_{R(\lambda)}$，$\{\eta^k(\lambda)\}_{k \in H} \subset L_{R(\lambda)}$ 满足

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \xi^k(\lambda) = \varepsilon^k, \quad \lim_{\lambda \to \infty} \lambda \eta^k(\lambda) = e^k, \quad (k \in H). \tag{11.4.1}$$

$$\sum_{k \in H} \xi^k(\lambda) = 1 - \lambda\, {}_H R(\lambda) 1. \tag{11.4.2}$$

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \eta^k(\lambda) 1 = q_k - \sum_{j \in H - \{k\}} q_{kj}, \quad (k \in H). \tag{11.4.3}$$

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \eta^k(\lambda) \sum_{m \in H - \{k\}} \xi^m = c_k < +\infty, \quad (k \in H). \tag{11.4.4}$$

则称 $({}_H R(\lambda), \{\xi^k(\lambda)\}_{k \in H}, \{\eta^k(\lambda)\}_{k \in H})$ 为一个关于 H 的生成元，记其全体为 $D(Q, H)$.

定理 11.4.2 设 $Q = (q_{ij}; i, j \in E)$ 为拟 Q－矩阵，H 为 E 的有限子集，则诚实 Q 过程存在的充要条件为 $D(Q, H)$ 非空. 若记诚实 Q 过程的全体为 $R(Q)$，则 $R(Q)$ 和 $D(Q, H)$ 一一对应.

证明 由诚实 Q 过程的多维分解定理立得本定理（见第三章）.

定义 11.4.2 设 Q 是任一拟 Q－矩阵，若 Q 的稳定态全保守，

则称 Q 为准保守. 设 Q 是任一 $Q-$ 矩阵, $\Psi(\lambda)$ 是任一 Q 过程, 称 $\Psi(\lambda)$ 是准 B 型的, 若对于每个稳定态 $i \in E$, 均有

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1-\sum_{j\in E}\lambda\psi_{ij}(\lambda)) = q_i - \sum_{j\in E-\{i\}} q_{ij}.$$

由定义可得, 若 Q 是准保守 $Q-$ 矩阵, 则一切 Q 过程均为准 B 型的. 反之, 若存在准 B 型诚实 Q 过程, 则 Q 必为准保守的.

引理 11.4.1 设 Q 是诚实 $Q-$ 矩阵且所有 $R(\lambda)\in R(Q)$ 均是准 B 型的, 则对每个 $({}_HR(\lambda),\{\xi^k(\lambda)\}_{k\in H},\{\eta^k(\lambda)\}_{k\in H})\in D(Q,H)$, 均有 ${}_HR(\lambda)$ 是准 B 型 Q_H 过程. 特别地, 若 Q 含有限个瞬时态, $H=\{i;q_i=+\infty\}$, 则 ${}_HR(\lambda)$ 是 B 型 Q_H 过程.

证明 由多维分解定理立得本引理.

今后, 我们采用如下记号. 设 $\Psi(\lambda)$ 为任一 Q 过程, 记

$$M^0_{\Psi(\lambda)} = \{\xi(\lambda);\xi(\lambda)\in M_{\Psi(\lambda)} \text{ 且} \lim_{\lambda\to\infty}\lambda\xi(\lambda)=\mathbf{0}\},$$

$$L^0_{\Psi(\lambda)} = \{\eta(\lambda);\eta(\lambda)\in L_{\Psi(\lambda)} \text{ 且} \lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta(\lambda)=\mathbf{0}\}.$$

容易看出, 若 $\Psi(\lambda)=\Phi(\lambda)$, 则这里的记号与本章 §1 的记号一致.

定理 11.4.3 设 Q 为含瞬时态的 $Q-$ 矩阵, 若存在唯一的诚实 Q 过程, 则

$$\sum_{j\in E-\{i\}} q_{ij} = q_i,\quad (i\in E). \tag{11.4.5}$$

证明 假设(11.4.5)不成立, 即存在 $a\in E$, 使得

$$\sum_{j\neq a} q_{aj} < q_a \leqslant +\infty. \tag{11.4.6}$$

设 $R(\lambda)$ 是唯一的诚实 Q 过程.

若 $q_a=+\infty$, 对 $R(\lambda)$ 关于 a 使用分解定理有

$$R(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & {}_aR(\lambda)\end{pmatrix}+r_{aa}(\lambda)\begin{pmatrix}1\\ \mathbf{1}-\lambda\,{}_aR(\lambda)\mathbf{1}\end{pmatrix}$$

$$\times(1,e^{(a)}\,{}_aR(\lambda)+\bar\eta(\lambda)), \tag{11.4.7}$$

其中 $\bar\eta(\lambda)\in L^0_{{}_aR(\lambda)}$, $e^{(a)}=(q_{aj};j\in E-\{a\})$.

由(11.4.6), $e^{(a)}\mathbf{1}<+\infty$; 由(11.4.7)式, $\bar\eta(\lambda)\neq\mathbf{0}$. $\forall\ \mu>0$, 令

$$R^{\mu}(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & {}_aR(\lambda)\end{pmatrix}+r^{\mu}_{aa}(\lambda)\begin{pmatrix}1\\ 1-\lambda\,{}_aR(\lambda)1\end{pmatrix}$$

$$\times\,(1,e^{(a)}\,{}_aR(\lambda)+\mu\bar{\eta}(\lambda)). \qquad (11.4.8)$$

其中

$$r^{\mu}_{aa}(\lambda)=(\lambda+\lambda[e^{(a)}_a R(\lambda)+\mu\bar{\eta}(\lambda),1])^{-1}. \qquad (11.4.9)$$

那么 $R^{\mu}(\lambda)$ 是诚实 Q 过程，当 μ 取不同值时，$R^{\mu}(\lambda)$ 不同，与唯一性矛盾.

若 $q_a<+\infty$，任取瞬时态 $b\in E$，对 $R(\lambda)$ 关于 $\{a,b\}$ 使用二维分解定理有

$$R(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & {}_{\{a,b\}}R(\lambda)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}A(\lambda) & A(\lambda)\eta(\lambda)\\ \xi(\lambda)A(\lambda) & \xi(\lambda)A(\lambda)\eta(\lambda)\end{pmatrix}.$$

其中

$$\eta(\lambda)=\begin{pmatrix}e^{(a)}\,{}_{\{a,b\}}R(\lambda)+\bar{\eta}(\lambda)\\ \eta^{b}(\lambda)\end{pmatrix},\quad \bar{\eta}(\lambda)\in L^{0}_{\{a,b\}R(\lambda)}.$$

由于 $q_a<+\infty$ 及(11.4.6)得

$$\bar{\eta}(\lambda)\neq 0,\quad \lim_{\lambda\to\infty}\lambda\bar{\eta}(\lambda)1<+\infty.$$

$\forall\,\mu>0$，令

$$\eta^{\mu}(\lambda)=\begin{pmatrix}e^{(a)}\,{}_{\{a,b\}}R(\lambda)+\bar{\eta}(\lambda)\\ \eta^{(b)}(\lambda)+\mu\bar{\eta}(\lambda)\end{pmatrix}.$$

使用 $\eta^{\mu}(\lambda)$，$\xi(\lambda)$ 按二维分解定理(见第三章)，定义 $A^{\mu}(\lambda)$，然后令

$$R^{\mu}(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & {}_{\{a,b\}}R(\lambda)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}A^{\mu}(\lambda) & A^{\mu}(\lambda)\eta^{\mu}(\lambda)\\ \xi(\lambda)A^{\mu}(\lambda) & \xi(\lambda)A^{\mu}(\lambda)\eta^{\mu}(\lambda)\end{pmatrix}.$$

$$(11.4.10)$$

那么 $R^{\mu}(\lambda)$ 是诚实 Q 过程，当 μ 取值不同时，$R^{\mu}(\lambda)$ 不同，与唯一性矛盾. 定理证毕.

设 $Q=(q_{ij};i,j\in E)$ 是含有限个瞬时态的保守拟 $Q-$ 矩阵，沿引定理 11.4.1 的记号. 由于 Q 是保守的，所以

$$d=\sum_{k\in H}e^{k},\quad e^{k}1=+\infty,\quad (k\in H). \qquad (11.4.11)$$

定理 11.4.4 设 Q 是含有限个瞬时态的保守拟 $Q-$ 矩阵，则

存在诚实 Q 过程的充要条件是下列三条同时成立

(i) $e^k\Phi(\lambda)1<+\infty,\quad (k\in H,\lambda>0)$;

(ii) $e^k\sum_{m\in H-\{k\}}\Phi e^m<+\infty,\quad (k\in H)$;

(iii) M_λ 非空.

证明 必要性 设 Q 是诚实 Q－矩阵，由定理 11.4.2，$D(Q,H)$ 非空. 设 $({}_HR(\lambda),\{\xi^k(\lambda)\}_{k\in H},\{\eta^k(\lambda)\}_{k\in H})\in D(Q,H)$，由(11.4.11)及引理 11.4.1，${}_HR(\lambda)$ 是 B 型的，即

$$(\lambda I-Q_N)_HR(\lambda)=I.\qquad(11.4.12)$$

由多维分解定理(定理 3.4.1)及 ${}_HR(\lambda)\geqslant\Phi(\lambda)$ 立得(i)，且有

$$\eta^k(\lambda)\geqslant e^k\Phi(\lambda),\quad \xi^k(\lambda)\geqslant\Phi(\lambda)e^k,\quad (k\in H).$$

于是由 $\lambda\eta^k(\lambda)\sum_{m\in H-\{k\}}\xi^m\uparrow c_k<+\infty$ 立得(ii)且

$$e^k\sum_{m\in H-\{k\}}\xi^m<+\infty.$$

固定 $\mu_0>0$，令

$$\overline{X}^0(\lambda)=\Phi(\mu_0,\lambda)\mu_0({}_HR(\mu_0)-\Phi(\mu_0))\mathbf{1}.\qquad(11.4.13)$$

$$\overline{X}^k(\lambda)=\Phi(\mu_0,\lambda)\xi^k(\mu_0)-\Phi(\lambda)e^k,\quad (k\in H).\qquad(11.4.14)$$

其中 $\Phi(\mu_0,\lambda)=I+(\mu_0-\lambda)\Phi(\lambda)$.

由于

$$\begin{aligned}\sum_{k\in H}\xi^k(\mu_0)&=\mathbf{1}-\mu_{0H}R(\mu_0)\mathbf{1}\\&=\mathbf{1}-\mu_0\Phi(\mu_0)\mathbf{1}-\mu_0({}_HR(\mu_0)-\Phi(\mu_0))\mathbf{1}\\&=\overline{X}(\mu_0)+\Phi(\mu_0)d-\mu_0({}_HR(\mu_0)-\Phi(\mu_0))\mathbf{1},\end{aligned}$$

而

$$(\mu_0-\lambda)\Phi(\mu_0,\lambda)(\overline{X}(\mu_0)+\Phi(\mu_0)d)=\overline{X}(\lambda)+\Phi(\lambda)d,$$

所以由(11.4.11)有

$$\sum_{k\in H}\overline{X}^k(\lambda)+\overline{X}^0(\lambda)=\overline{X}(\lambda)\leqslant\mathbf{1}.$$

容易证明

$$\overline{X}^k(\lambda)\in M_{\Phi(\lambda)},\quad \overline{X}^0(\lambda)\in M_{\Phi(\lambda)},$$

而且

$$(\lambda I - Q_N)\overline{X}^k(\lambda) = e^k - e^k = \mathbf{0},$$

$$\begin{aligned}(\lambda I - Q_N)\overline{X}^0(\lambda) &= (\lambda I - Q_N)\Phi(\mu_0,\lambda)\mu_0({}_HR(\mu_0) - \Phi(\mu_0))\mathbf{1} \\ &= (\mu_0 I - Q_N)\mu_0({}_HR(\mu_0) - \Phi(\mu_0))\mathbf{1} \\ &= \mu_0(I - I)\mathbf{1} = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

故 $\overline{X}^k(\lambda) \in M^0_{\Phi(\lambda)}, \overline{X}^0(\lambda) \in M^0_{\Phi(\lambda)}$. 由(11.4.13)、(11.4.14)知，当 $\lambda \geqslant \mu_0$ 时

$$\overline{X}^0(\lambda) \leqslant \mu_0({}_HR(\mu_0) - \Phi(\mu_0))\mathbf{1} \leqslant \mu_{0\,H}R(\mu_0)\mathbf{1},$$

$$\overline{X}^k(\lambda) \leqslant \xi^k(\mu_0) \leqslant \xi^k, \quad (k \in H).$$

当 $\lambda < \mu_0$ 时，

$$\overline{X}^0(\lambda) \leqslant (I + (\mu_0 - \lambda)_HR(\lambda))\mu_{0\,H}R(\mu_0)\mathbf{1} = \mu_{0\,H}R(\lambda)\mathbf{1},$$

$$\overline{X}^k(\lambda) \leqslant (I + (\mu_0 - \lambda)_HR(\lambda))\xi^k(\mu_0) = \xi^k(\lambda) \leqslant \xi^k, \quad (k \in H).$$

因此

$$\overline{X}^0(\lambda) \leqslant \mu_0({}_HR(\mu_0) + {}_HR(\lambda))\mathbf{1},$$

$$\overline{X}^k(\lambda) \leqslant \xi^k, \quad (k \in H).$$

由 $e^k\,{}_HR(\lambda)\mathbf{1} < +\infty, \quad (\lambda > 0)$ 及 $e^k \sum\limits_{m \in H-\{k\}} \xi^m < +\infty$ 得

$$e^k\overline{X}^0(\lambda) < +\infty, \quad (\lambda > 0, k \in H),$$

$$e^k \sum_{m \in H-\{k\}} \overline{X}^m(\lambda) < +\infty, \quad (\lambda > 0, k \in H).$$

所以，$\forall\ a \in H$，若令

$${}_aX^a(\lambda) = \overline{X}^a(\lambda) + \overline{X}^0(\lambda),$$

$${}_aX^k(\lambda) = \overline{X}^k(\lambda), \quad (k \in H, k \neq a).$$

则

$$\{{}_aX^k(\lambda)\}_{k \in H} \in M_\lambda.$$

因此，(iii) 成立. 必要性证毕.

充分性　设(i)－(iii) 成立. 取 $\{X^k(\lambda)\}_{k\in H} \in M_\lambda$，令

$$\xi^k(\lambda) = \Phi(\lambda)e^k + X^k(\lambda), \quad \eta^k(\lambda) = e^k\Phi(\lambda), \quad (k \in H).$$

则易证 $(\Phi(\lambda), \{\xi^k(\lambda)\}_{k\in H}, \{\eta^k(\lambda)\}_{k\in H}) \in D(Q,H)$，由定理 11.4.2，从而存在诚实 Q 过程. 充分性证毕. 定理 11.4.4 证毕.

以下来完成定理 11.4.1 的证明.

必要性　设诚实 Q 过程存在且唯一. 由定理 11.4.3 知(i) 成立. 由定理 11.4.4 知(ii)、(iii) 成立且 M_λ 非空.

若 M_λ 非单点集，即存在 $\{X^k(\lambda)\}_{k\in H}$, $\{\bar{X}^k(\lambda)\}_{k\in H}\in M_\lambda$，且 $\{X^k(\lambda)\}_{k\in H}\neq\{\bar{X}^k(\lambda)\}_{k\in H}$. 令

$$\xi^k(\lambda)=\Phi(\lambda)\varepsilon^k+X^k(\lambda),$$
$$\bar{\xi}^k(\lambda)=\Phi(\lambda)\varepsilon^k+\bar{X}^k(\lambda),$$
$$\eta^k(\lambda)=e^k\Phi(\lambda),\qquad(k\in H).$$

则易证 $(\Phi(\lambda),\ \{\xi^k(\lambda)\}_{k\in H},\ \{\eta^k(\lambda)\}_{k\in H})\in D(Q,H)$，$(\Phi(\lambda),\{\bar{\xi}^k(\lambda)\}_{k\in H},\{\eta^k(\lambda)\}_{k\in H})\in D(Q,H)$ 且它们不同，从而诚实 Q 过程不唯一，这与假设矛盾. 故(iv) 成立.

若(v) 不成立，即 $L^0_{\Phi(\lambda)}\neq\{0\}$ 且存在非零的 $\bar{\eta}(\lambda)\in L^0_{\Phi(\lambda)}$ 及 $a\in H$ 使得

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\bar{\eta}(\lambda)\sum_{k\in H-\{a\}}(\lambda\varepsilon^k+X^k)<+\infty.$$

令

$$\xi^k(\lambda)=\Phi(\lambda)\varepsilon^k+X^k(\lambda),$$
$$\bar{\eta}^a(\lambda)=\eta^a(\lambda)+\bar{\eta}(\lambda),$$
$$\bar{\eta}^k(\lambda)=\eta^k(\lambda),\quad(k\in H,k\neq a).$$

则易证

$$(\Phi(\lambda),\{\xi^k(\lambda)\}_{k\in H},\{\bar{\eta}^k(\lambda)\}_{k\in H})\in D(Q,H),$$

且

$$(\Phi(\lambda),\{\xi^k(\lambda)\}_{k\in H},\{\bar{\eta}^k(\lambda)\}_{k\in H})\neq(\Phi(\lambda),\{\xi^k(\lambda)\}_{k\in H},\{\eta^k(\lambda)\}_{k\in H}),$$

故诚实 Q 过程不唯一. 这和假设矛盾，所以(v) 成立. 必要性证毕.

充分性　设(i) — (v) 成立. 由定理 11.4.4 知，若

$$\xi^k(\lambda)=\Phi(\lambda)\varepsilon^k+X^k(\lambda),\eta^k(\lambda)=e^k\Phi(\lambda),$$

则

$$(\Phi(\lambda),\{\xi^k(\lambda)\}_{k\in H},\{\eta^k(\lambda)\}_{k\in H})\in D(Q,H),$$

由定理 11.4.2 知，要证诚实 Q 过程唯一，只需证明 $D(Q,H)$ 是单点集，即对任意 $({}_HR(\lambda),\{\bar{\xi}^k(\lambda)\}_{k\in H},\{\bar{\eta}^k(\lambda)\}_{k\in H})\in D(Q,H)$，必有

$$({}_H R(\lambda), \{\bar{\xi}^k(\lambda)\}_{k\in H}, \{\bar{\eta}^k(\lambda)\}_{k\in H})$$
$$= (\Phi(\lambda), \{\xi^k(\lambda)\}_{k\in H}, \{\eta^k(\lambda)\}_{k\in H}).$$
对于 $\mu_0 > 0$,令
$$\overline{X}^k(\lambda) = \Phi(\mu_0, \lambda)\bar{\xi}^k(\mu_0) - \Phi(\lambda)e^k, \quad (k \in H),$$
$$\overline{X}^0(\lambda) = \Phi(\mu_0, \lambda)\mu_0({}_H R(\mu_0) - \Phi(\mu_0))\mathbf{1}.$$
若${}_H R(\lambda) \neq \Phi(\lambda)$,则存在 $\mu_0 > 0$ 使得 $\overline{X}^0(\lambda) \neq \mathbf{0}$. 由定理 11.4.4 的证明可知
$$\{{}_a X^k(\lambda)\} \in M_\lambda, \quad (a \in H),$$
且若 $a, b \in H$,则
$$\{{}_a X^k(\lambda)\} \neq \{{}_b X^k(\lambda)\}.$$
这与(iv)矛盾. 故${}_H R(\lambda) = \Phi(\lambda)$,这时有
$$\{\overline{X}^k(\lambda)\} = \{X^k(\lambda)\} \in M_\lambda,$$
且
$$\Phi(\mu_0, \lambda)\xi^k(\mu_0) = \xi^k(\lambda).$$
因此
$$\bar{\xi}^k(\lambda) = \overline{X}^k(\lambda) + \Phi(\lambda)e^k = \xi^k(\lambda).$$
若 $\{\bar{\eta}^k(\lambda)\}_{k\in H} \neq \{\eta^k(\lambda)\}_{k\in H}$,即存在 $a \in H$,使得 $\bar{\eta}^a(\lambda) \neq \eta^a(\lambda)$. 由
$$\bar{\eta}^a(\lambda) \in M_{\Phi(\lambda)}, \quad \lambda\bar{\eta}^a(\lambda) \to e^a, \quad (\lambda \to +\infty),$$
知
$$\bar{\eta}^a(\lambda) \geqslant e^a\Phi(\lambda) = \eta^a(\lambda), \quad \bar{\eta}(\lambda) \triangleq \bar{\eta}^a(\lambda) - \eta^a(\lambda) \neq \mathbf{0},$$
且
$$\bar{\eta}(\lambda) \in L^0_{\Phi(\lambda)}.$$
由于
$$\lambda\bar{\eta}^a(\lambda) \sum_{k\in H-\{a\}} \bar{\xi}^k \uparrow c_a < +\infty \quad (\lambda \uparrow +\infty),$$
及
$$\bar{\xi}^k(\lambda) = \xi^k(\lambda) = \Phi(\lambda)e^k + X^k(\lambda).$$
故
$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\bar{\eta}(\lambda) \sum_{k\in H-\{a\}} (\Phi e^k + X^k) < +\infty.$$

这与(v)矛盾. 所以

$$({}_HR(\lambda),\{\bar{\xi}^k(\lambda)\}_{k\in H},\{\bar{\eta}^k(\lambda)\}_{k\in H})$$
$$=(\Phi(\lambda),\{\xi^k(\lambda)\}_{k\in H},\{\eta^k(\lambda)\}_{k\in H}).$$

从而诚实 Q 过程唯一. 定理证毕.

关于单瞬时态诚实 Q 过程的唯一性有以下结论.

定理 11.4.5 设 $Q=(q_{ij};i,j\in E)$ 是单瞬时态拟 Q — 矩阵, b 是瞬时态,则存在唯一诚实 Q 过程的充要条件是下列四条同时成立

(i) Q 保守,即 $e^b\mathbf{1}=+\infty, d=e^b$;

(ii) $e^b\Phi(\lambda)<+\infty \quad (\lambda>0)$;

(iii) 方程

$$\begin{cases}v(\lambda I-Q_N)=\mathbf{0},\\ \mathbf{0}\leqslant v\in L_N,\end{cases}\qquad(\lambda>0)\qquad(11.4.15)$$

只有零解;

(iv) 对于方程

$$\begin{cases}(\lambda I-Q_N)U(\lambda)=\mathbf{0},\\ \mathbf{0}\leqslant U(\lambda)\leqslant\mathbf{1},\\ U(\lambda)-U(\mu)=(\mu-\lambda)\Phi(\lambda)U(\mu)\end{cases}\qquad(\lambda,\mu>0)$$
$$(11.4.16)$$

的任意非零解 $(U(\lambda),\lambda>0)$,如果 $U(\lambda)\neq\overline{X}(\lambda)$,则

$$e^bU=+\infty.\qquad(11.4.17)$$

此处 $\overline{X}(\lambda)=\mathbf{1}-\lambda\Phi(\lambda)-\Phi(\lambda)d$ 是(11.4.16)的最大解, $U=\lim\limits_{\lambda\downarrow 0}U(\lambda)$.

证明 必要性 假设存在唯一的诚实 Q 过程. 与定理 11.4.1 的证明完全相同,可得(i)、(ii)成立.

若(iii)不成立,则 $L_\lambda^+\neq\{\mathbf{0}\}$ 从而 $L^0_{\Phi(\lambda)}\neq\{\mathbf{0}\}$. 任取非零 $\eta(\lambda)\in L^0_{\Phi(\lambda)}$, $\forall\ \mu>0$,令

$$R^\mu(\lambda)=\begin{pmatrix}0&0\\ \mathbf{0}&\Phi(\lambda)\end{pmatrix}+r^\mu_{bb}(\lambda)\begin{pmatrix}1\\ \mathbf{1}-\lambda\Phi(\lambda)\mathbf{1}\end{pmatrix}(1,e^b\Phi(\lambda)+\mu\eta(\lambda)).$$

其中

$$r_{bb}^{\mu}(\lambda) = \frac{1}{\lambda + \lambda e^b \Phi(\lambda) 1 + \lambda\mu\bar{\eta}(\lambda) 1},$$

由分解定理，$R^{\mu}(\lambda)$ 是诚实 Q 过程，当 μ 不同时 $R^{\mu}(\lambda)$ 不同，与唯一性矛盾. 因此(iii) 成立.

若(iv) 不成立，则(11.4.16) 存在非零解 $U(\lambda)(\lambda > 0)$，$U(\lambda) \neq \bar{X}(\lambda)$，且(11.4.17) 不成立，即 $e^b U < +\infty$.

令 $\bar{\xi}(\lambda) = \bar{X}(\lambda) - U(\lambda)$，则 $\bar{X}(\lambda)$ 也是(11.4.16) 的非零解，而且

$$e^b(1 - \bar{\xi}) = e^b(1 - \bar{X}) + e^b U < +\infty. \quad (11.4.18)$$

再令

$$\Psi(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Phi(\lambda) \end{pmatrix} + \psi_{bb}(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ \Phi(\lambda) e^b + \bar{\xi}(\lambda) \end{pmatrix} (1, e^b \Phi(\lambda)). \quad (11.4.19)$$

其中

$$\psi_{bb}(\lambda) = \frac{1}{e^b(1 - \bar{\xi} - \Phi e^b) + \lambda + \lambda e^b \Phi(\lambda)(\Phi e^b + \bar{\xi})}, \quad (11.4.20)$$

由分解定理 $\Psi(\lambda)$ 是 Q 过程，由(i)、(11.4.19) 和(11.4.20) 有

$$\lambda(1 - \lambda\Psi(\lambda) 1) \neq 0, \quad \lim_{\lambda \to \infty} \lambda(1 - \lambda\Psi(\lambda) 1) = 0. \quad (11.4.21)$$

任取非负可和行向量 $\alpha = (\alpha_i; i \in E)$，令

$$R^{\alpha}(\lambda) = \Psi(\lambda) + (1 - \lambda\Psi(\lambda) 1) \frac{\alpha\Psi(\lambda)}{\lambda\alpha\Psi(\lambda) 1}.$$

则 $R^{\alpha}(\lambda)$ 是诚实 Q 过程，当 α 取值不同时(除常数倍以外)，$R^{\alpha}(\lambda)$ 不同. 这与唯一性矛盾. 故(iv) 成立.

充分性

设(i) — (iv) 成立. 由(i)，(ii) 及分解定理

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Phi(\lambda) \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda + \lambda e^b \Phi(\lambda) 1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \lambda\Phi(\lambda) 1 \end{pmatrix} (1, e^b \Phi(\lambda)) \quad (11.4.22)$$

是一个诚实 Q 过程.

假设 $\overline{R}(\lambda)$ 是任一诚实 Q 过程. 使用(iv),类似于定理 11.4.1 充分性部分的证明,可证

$$ {}_b\overline{R}(\lambda) = {}_bR(\lambda) = \Phi(\lambda). $$

再注意 $\overline{R}(\lambda)$ 诚实,从而有

$$ \overline{R}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Phi(\lambda) \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda + \lambda\eta(\lambda)\mathbf{1}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{1} - \lambda\Phi(\lambda)\mathbf{1} \end{pmatrix} (1, \eta(\lambda)), \tag{11.4.23} $$

其中

$$ \eta(\lambda) = e^b\Phi(\lambda) + \overline{\eta}(\lambda), \quad \overline{\eta}(\lambda) \in L^0_{\Phi(\lambda)}. $$

由(iii),$L^+_l = \{0\}$ 从而 $L^0_{\Phi(\lambda)} = \{0\}$,故 $\eta(\lambda) = e^b\Phi(\lambda)$. 由(11.4.22),(11.4.23) 得 $R(\lambda) = \overline{R}(\lambda)$.

定理 11.4.5 证毕.

§5 "双无限"诚实 Q 过程的唯一性

由 §2、§3 可知,在全瞬时态及有限稳定态无限瞬时态两种情形下,诚实 Q 过程是非唯一的. 因此,人们可能猜想:"双无限"诚实 Q 过程也许是非唯一.

本节首先给出一类"双无限"Q — 矩阵,它们的诚实 Q 过程存在而且唯一,从而否定了上述猜想;然后,我们得到了"双无限"诚实 Q 过程唯一的若干必要条件和某些充分条件.

若 Q 是 E 上拟 Q — 矩阵,F 是 E 的非空子集,则

$$ Q_F \triangleq (q_{ij}; i, j \in F) $$

表示 Q 在 F 上的限制.

设 $\overline{E}_k = \{i_0^{(k)}\} \cup \{i_1^{(k)}, i_2^{(k)}, \cdots\}$, $(k = 1, 2, \cdots)$ 是一列互不相交的可列集,令

$$ E_k = \overline{E}_k \setminus \{i_0^{(k)}\}, \qquad E = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{E}_k $$

又设 $b \overline{\in} E$,令 $\tilde{E} = E \cup \{b\}$,从而

$$\bar{E}_k = \{i_0^{(k)}\} \cup E_k,$$
$$\bar{E} = \{b\} \cup \{i_0^{(1)}, i_0^{(2)}, \cdots\} \cup (\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k). \tag{11.5.1}$$

设$\{q_j\}_{j\geq 1}$，$\{d_k\}_{k\geq 1}$是两个正数序列. 在$\bar{E}$上定义矩阵Q如下：

$$\begin{cases} q_{bb} = -\infty, \quad q_{bi_0^{(k)}} = 1, & (k \geq 1); \\ q_{i_0^{(k)}i_0^{(k)}} = -\infty, \quad q_{i_0^{(k)}b} = d_k, \quad q_{i_0^{(k)}i_j^{(k)}} = 1, & (k, j \geq 1); \\ q_{i_j^{(k)}i_j^{(k)}} = -q_j, \quad q_{i_j^{(k)}i_0^{(k)}} = q_j, & (k, j \geq 1); \\ q_{xy} = 0, & \text{其它 } x, y \in \bar{E}; \end{cases} \tag{11.5.2}$$

从而Q有下列形状

$$Q = \begin{pmatrix} -\infty & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ d_1 & -\infty & 1 & 1 & \cdots & & & & \\ 0 & q_1 & -q_1 & & & & & & \\ 0 & q_2 & & -q_2 & & & & & \\ \cdots & \cdots & & & \cdots & & & & \\ d_2 & & & & & -\infty & 1 & 1 & \cdots \\ 0 & & & & & q_1 & -q_1 & & \\ 0 & & & & & q_2 & & -q_2 & \\ \cdots & & & & & \cdots & & & \cdots \end{pmatrix}. \tag{11.5.3}$$

定理 11.5.1 若正数序列$\{q_j\}$，$\{d_k\}$满足条件

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{q_j} < +\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{d_k} < +\infty, \tag{11.5.4}$$

则(11.5.2)定义的Q是Q－矩阵，而且存在唯一的诚实Q过程.

定理的证明由下面几条引理来完成，引理 11.5.1 证明存在一个诚实Q过程，引理 11.5.3 证明诚实Q过程唯一.

引理 11.5.1 若(11.5.4)成立，那么存在一个诚实Q过程.

证明 $\forall k \geq 1$，$Q_{\bar{E}_k}$的形状及对应的元素完全相同，由(11.5.4)第一式，它们是 Kolmogorov Q－矩阵(见第九章 §3)，故存在唯一的诚实$Q_{\bar{E}_k}$过程$\Psi^{(k)}(\lambda)$　$(k \geq 1)$.

对 $\Psi^{(k)}(\lambda)$ 关于瞬时状态 $i_0^{(k)}$ 使用分解定理得

$$\Psi^{(k)}(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \Phi^{(k)}(\lambda)\end{pmatrix}+r_k(\lambda)\begin{pmatrix}1\\ \xi^{(k)}(\lambda)\end{pmatrix}(1,\eta^{(k)}(\lambda)).$$

由定理 9.3.1 有

$$\begin{cases}\Phi^{(k)}(\lambda)=\begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda+q_1} & & \\ & \frac{1}{\lambda+q_2} & \\ & & \ddots\end{bmatrix}_{E_k}, \qquad \xi^{(k)}(\lambda)=\begin{bmatrix}\frac{q_1}{\lambda+q_1}\\ \frac{q_2}{\lambda+q_2}\\ \vdots\end{bmatrix}_{E_k},\\ \eta^{(k)}(\lambda)=\left(\frac{1}{\lambda+q_1},\frac{1}{\lambda+q_2},\cdots\right)_{E_k}.\end{cases}$$

(11.5.5)

而

$$r_k(\lambda)=(\lambda+\lambda[\eta^{(k)}(\lambda),1])^{-1}. \qquad (11.5.6)$$

令

$$\bar{r}_k(\lambda)=(d_k+\lambda+\lambda[\eta^{(k)}(\lambda),1])^{-1}, \qquad (11.5.7)$$

$$\bar{\Psi}^{(k)}(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \Phi^{(k)}(\lambda)\end{pmatrix}+\bar{r}_k(\lambda)\begin{pmatrix}1\\ \xi^{(k)}(\lambda)\end{pmatrix}(1,\eta^{(k)}(\lambda)).$$

(11.5.8)

由分解定理，$\bar{\Psi}^{(k)}(\lambda)$ 是 $Q_{\bar{E}_k}$ 过程，且

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1-\lambda\bar{\Psi}^{(k)}(\lambda)1)=\begin{bmatrix}d_k\\ 0\\ \vdots\end{bmatrix}_{\bar{E}_k}. \qquad (11.5.9)$$

令

$$\Psi(\lambda)=\begin{bmatrix}\bar{\Psi}^{(1)}(\lambda) & & \\ & \bar{\Psi}^{(2)}(\lambda) & \\ & & \ddots\end{bmatrix}. \qquad (11.5.10)$$

显然，$\Psi(\lambda)$ 是 E 上 Q_E 过程.

令 $\quad e^b=(q_{by};y\in E), \quad \tilde{e}^b=(q_{xb};x\in E)^T$.

由(11.5.4)得

$$e^b\Psi(\lambda)\mathbf{1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1+q_j}}{d_k + 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1+q_j}} < +\infty.$$

若令 $\eta^b(\lambda) = e^b\Psi(\lambda)$，由行协调族基本性质，可得

$$\begin{cases} \eta^b(\lambda)\mathbf{1} < +\infty, \quad \eta^b(\lambda) \in L_{\Psi(\lambda)}, \\ \lim_{\lambda\to\infty} \lambda\eta^b(\lambda) = e^b. \end{cases} \tag{11.5.11}$$

由(11.5.9)，(11.5.10) 得

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda(\mathbf{1} - \lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1}) = \varepsilon^b. \tag{11.5.12}$$

令

$$\xi^b(\lambda) = \mathbf{1} - \lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1}, \tag{11.5.13}$$

$$r_{bb}(\lambda) = (\lambda + \lambda[\eta^b(\lambda), \mathbf{1}])^{-1}, \tag{11.5.14}$$

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Psi(\lambda) \end{pmatrix} + r_{bb}(\lambda)\begin{pmatrix} 1 \\ \xi^b(\lambda) \end{pmatrix}(1, \eta^b(\lambda)). \tag{11.5.15}$$

由分解定理知，$R(\lambda)$ 是一个诚实 Q 过程.

为了证明诚实Q过程的唯一性，先给出下面的引理 11.5.2，为了定理 11.5.1 证明过程的紧凑，我们将引理 11.5.2 的证明放在本节的后半部分，此处只叙述结果.

引理 11.5.2 设Q是E上"双无限"Q—矩阵，$E_1 = \{i: q_i < +\infty\}$，$E_2 = \{i: q_i = +\infty\}$；如果 Q_{E_2} 不满足(S) 条件，$H \subset E_2$ 是满足 $\liminf_{j\in E_2} \sum_{i\in H} q_{ij} > 0$ 的最小子集(见引理 7.2.2)，$\Psi(\lambda)$ 是诚实 Q 过程；那么，对于任意有限子集$F_n \uparrow E_2 \setminus H\ (n\to\infty)$，${}_{E_2\setminus F_n}\Psi(\lambda)$ 是 $E_1 \cup F_n$ 上 $Q_{E_1\cup F_n}$ 过程，${}_{E_2\setminus F_n}\Psi(\lambda) \uparrow {}_H\Psi(\lambda) \quad (n\to\infty)$.

引理 11.5.3 若(11.5.4) 成立，则诚实 Q 过程唯一.

证明 设 $R^*(\lambda)$ 是任一诚实 Q 过程，我们来证明 $R^*(\lambda) = R(\lambda)$，此处 $R(\lambda)$ 是引理 11.5.1 中构造的诚实 Q 过程(见(11.5.15)).

对 $R^*(\lambda)$ 关于瞬时态 b 使用分解定理有

$$R^*(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \Psi^*(\lambda)\end{pmatrix}+r_{bb}^*(\lambda)\begin{pmatrix}1\\ \xi^*(\lambda)\end{pmatrix}(1,\eta^*(\lambda)).$$

$$(11.5.16)$$

我们分以下三步来完成 $R^*(\lambda)=R(\lambda)$ 的证明.

(i) 证明 $\Psi^*(\lambda)=\Psi(\lambda)$ ($\Psi(\lambda)$ 由(11.5.10) 定义);

(ii) 证明 $\eta^*(\lambda)=\eta^b(\lambda)=e^b\Psi(\lambda)$;

(iii) 证明 $\xi^*(\lambda)=\xi^b(\lambda)$, $r_{bb}^*(\lambda)=r_{bb}(\lambda)$. 从而 $R^*(\lambda)=R(\lambda)$.

(i) 设 $H=\{b\}$, $F_n=\{i_0^{(k)};1\leqslant k\leqslant n\}$, $F_n^c=\{i_0^{(k)};k>n\}$ $(n\geqslant 1)$, 注意 Q 的特点由引理 11.5.2 得

$$\Psi(\lambda)={}_HR(\lambda)=\lim_{n\to\infty}{}_{E_2\setminus F_n}R(\lambda)=\lim_{n\to\infty}{}_{F_n^c}\Psi(\lambda),\quad(11.5.17)$$

$$\Psi^*(\lambda)={}_HR^*(\lambda)=\lim_{n\to\infty}{}_{E_2\setminus F_n}R^*(\lambda)=\lim_{n\to\infty}{}_{F_n^c}\Psi^*(\lambda).$$

$$(11.5.18)$$

注意 $R(\lambda)$、$R^*(\lambda)$ 均为诚实 Q 过程,由分解定理得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1-\lambda\Psi(\lambda)1)=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1-\lambda\Psi^*(\lambda)1).$$

又注意 ${}_{F_n^c}\Psi(\lambda)\uparrow\Psi(\lambda)$, ${}_{F_n^c}\Psi^*(\lambda)\uparrow\Psi^*(\lambda)$; 由 Q — 矩阵上极限不等式(见下面引理 11.5.4),可得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1-\lambda\,{}_{F_n^c}\Psi(\lambda)1)=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1-\lambda\,{}_{F_n^c}\Psi^*(\lambda)1),(n\geqslant 1).$$

$$(11.5.19)$$

由 (11.5.17), (11.5.18), 注意 Q 的特点, 可得 ${}_{F_n}({}_{F_n^c}\Psi(\lambda))={}_{F_n}({}_{F_n^c}\Psi^*(\lambda))$ 为最小 Q_{E_1} 过程;由于 Q_{E_1} 为对角型,故方程

$$\begin{cases}v(\lambda I-Q_{E_1})=0,\\ 0\leqslant v\in L_{E_1},\end{cases}\qquad(\lambda>0)\qquad(11.5.20)$$

和

$$\begin{cases}(\lambda I-Q_{E_1})U=0,\\ 0\leqslant U\leqslant 1,\end{cases}\qquad(\lambda>0)\qquad(11.5.21)$$

均只有零解. 从而 $L^0_{\Phi(\lambda)}=\{0\}$, $M^0_{\Phi(\lambda)}=\{0\}$, 此处 $\Phi(\lambda)$ 是最小 Q_{E_1} 过程, $L^0_{\Phi(\lambda)}=\{\eta(\lambda)\in L_{\Phi(\lambda)},\eta(\lambda)$ 是(11.5.20) 的解$\}$, $M^0_{\Phi(\lambda)}$

$= \{U(\lambda) \in M_{\Phi(\lambda)}, U(\lambda)$ 是(11.5.21)的解}. 由有限维分解定理可得

$$ {}_{F_n}\Psi(\lambda) = {}_{F_n}\Psi^*(\lambda), \qquad (n \geqslant 1). $$

因此，由(11.5.17)、(11.5.18)可得

$$ \Psi^*(\lambda) = \Psi(\lambda). $$

(ii) 由分解定理，$\eta^*(\lambda) \geqslant e^b\Psi(\lambda)$. 设 $\eta^*(\lambda) = e^b\Psi(\lambda) + \bar{\eta}^*(\lambda)$. $\forall\, k \geqslant 1$，令 ${}_k\bar{\eta}^*(\lambda) = (\bar{\eta}_x^*(\lambda); x \in \bar{E}_k)$ 为 $\bar{E}_k$ 上的行向量.

由于 $\Psi^*(\lambda) = \Psi(\lambda)$ 在子块 $\bar{E}_1$、$\bar{E}_2$、$\cdots$ 之间互不通，从而 ${}_k\bar{\eta}^*(\lambda) \in L_{\bar{\Psi}^{(k)}(\lambda)}$ ($\bar{\Psi}^{(k)}(\lambda)$ 由(11.5.8)定义)，由于 $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda\bar{\eta}^*(\lambda) = 0$，从而

$$ \lim_{\lambda\to\infty} \lambda\, {}_k\bar{\eta}^*(\lambda) = 0, \quad (k \geqslant 1). $$

又 $\bar{\Psi}^{(k)}(\lambda)$ 的 $Q-$矩阵 $Q_{\bar{E}_k}$ 是 Kolmogorov 矩阵，利用诚实 $Q_{\bar{E}_k}$ 过程唯一，可得

$$ {}_k\bar{\eta}^*(\lambda) = 0, \qquad (k \geqslant 1). $$

否则可仿照定理 11.4.3 的证明方法，证明诚实 $Q_{\bar{E}_k}$ 过程不唯一. 从而，$\bar{\eta}^*(\lambda) = 0$，$\eta^*(\lambda) = e^b\Psi(\lambda) = \eta^b(\lambda)$.

(iii) 由于 $R^*(\lambda) = R(\lambda)$ 都是诚实 Q 过程，从而

$$ \begin{aligned} \xi^*(\lambda) &= 1 - \lambda\Psi^*(\lambda)1 \\ &= 1 - \lambda\Psi(\lambda)1 = \xi^b(\lambda), \\ r_{bb}^*(\lambda) &= (\lambda + \lambda\eta^*(\lambda)1)^{-1} \\ &= (\lambda + \lambda\eta^b(\lambda)1)^{-1} = r_{bb}(\lambda). \end{aligned} $$

因此，由(11.5.15)，(11.5.16)得

$$ R^*(\lambda) = R(\lambda). $$

到此，定理 11.5.1 全部证完.

作为定理 11.5.1 的一个应用，以下推论 11.5.1 给出了一类"双无限"$Q-$矩阵，它们的 Q 过程存在但诚实 Q 过程不存在，这不同于全瞬时态以及有限稳定无限瞬时两种情形.

令 E、$\bar{E}$ 仍按定理 11.5.1 中定义，根据(11.5.2)在 $\bar{E}$ 上定义矩阵 Q，但我们用 $-(q_1 + d)$ 代替 Q 中的 $q_{i_1^{(1)}i_1^{(1)}}$，其它元素不变，得到 $\bar{E}$ 上矩阵 Q_d $(d > 0)$.

$$Q_d = \begin{pmatrix} -\infty & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots \\ d_1 & -\infty & 1 & \cdots & & & \\ 0 & q_1 & -(q_1+d) & & & & \\ \cdots & \cdots & & \cdots & & & \\ d_2 & & & & -\infty & 1 & \cdots \\ 0 & & & & q_1 & -q_1 & \\ \cdots & & & & \cdots & & \cdots \end{pmatrix}.$$

(11.5.22)

推论 11.5.1 如果 $d>0$，$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{q_j}<\infty$，$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{d_k}<\infty$，则(11.5.22)中的 Q_d 是 Q − 矩阵(即存在 Q_d 过程)，但不存在诚实 Q_d 过程.

证明 由定理 11.5.1，存在诚实 Q − 过程 $R(\lambda)$，对 $R(\lambda)$ 关于状态 $i_1^{(1)}$ 使用分解定理得

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Psi^{(i_1^{(1)})}(\lambda) \end{pmatrix} + r_{i_1^{(1)}i_1^{(1)}}(\lambda)\begin{pmatrix} 1 \\ \xi^{i_1^{(1)}}(\lambda) \end{pmatrix}(1,\eta^{i_1^{(1)}}(\lambda)),$$

$$r_{i_1^{(1)}i_1^{(1)}}(\lambda) = (\lambda+\lambda[\eta^{i_1^{(1)}}(\lambda),1])^{-1}.$$

令

$$_d r_{i_1^{(1)}i_1^{(1)}}(\lambda) = (d+\lambda+\lambda[\eta^{i_1^{(1)}}(\lambda),1])^{-1},$$

$$_d R(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Psi^{(i_1^{(1)})}(\lambda) \end{pmatrix} + {}_d r_{i_1^{(1)}i_1^{(1)}}(\lambda)\begin{pmatrix} 1 \\ \xi^{i_1^{(1)}}(\lambda) \end{pmatrix}(1,\eta^{i_1^{(1)}}(\lambda)).$$

则 $_dR(\lambda)$ 是 Q_d 过程，从而 Q_d 是 Q − 矩阵.

反设存在诚实 Q_d 过程 $\overline{R}(\lambda)$，对 $\overline{R}(\lambda)$ 关于 $\{b,i_1^{(1)}\}$ 使用二维分解定理得

$$\overline{R}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \overline{\Psi}(\lambda) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A(\lambda) & A(\lambda)\eta(\lambda) \\ \xi(\lambda)A(\lambda) & \xi(\lambda)A(\lambda)\eta(\lambda) \end{pmatrix}.$$

其中 $\eta(\lambda) = \begin{pmatrix} \eta^b(\lambda) \\ \eta^{i_1^{(1)}}(\lambda) \end{pmatrix}$.

令 $e^{i_1^{(1)}} = (q_{i_1^{(1)}y}; y\in E\setminus\{i_1^{(1)}\})$.

由于 $\overline{R}(\lambda)$ 诚实，Q_d 的状态 $i_1^{(1)}$ 稳定且非保守，从而

$$\eta^{i(1)}_{i}(\lambda) = e^{i(1)}_{i}\overline{\Psi}(\lambda) + \bar{\eta}(\lambda),$$

其中 $\bar{\eta}(\lambda) \in L^{+}_{\Phi(\lambda)}$,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\bar{\eta}(\lambda) = \mathbf{0}, \quad \lim_{\lambda\to\infty} \lambda\bar{\eta}(\lambda)\mathbf{1} = d.$$

从而 $\bar{\eta}(\lambda) \neq \mathbf{0}$.

$\forall\, u > 0$,令

$$\eta^{u}(\lambda) = \begin{pmatrix} \eta^{b}(\lambda) + u\bar{\eta}(\lambda) \\ e^{i(1)}_{i}\overline{\Psi}(\lambda) \end{pmatrix},$$

$$A^{u}(\lambda) = (\lambda I + C^{u} + \lambda[\eta^{u}(\lambda),\xi])^{-1}.$$

其中C^{u} 由 $\eta^{u}(\lambda)$,ξ 按定理3.3.1定义,但要求(3.3.29)和(3.3.30)成立等号.再令

$$R^{u}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \overline{\Psi}(\lambda) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A^{u}(\lambda) & A^{u}(\lambda)\eta^{u}(\lambda) \\ \xi(\lambda)A^{u}(\lambda) & \xi(\lambda)A^{u}(\lambda)\eta^{u}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

由定理 3.3.1 知,$R^{u}(\lambda)$ 是诚实 Q 过程,当 $u > 0$ 取不同值时 $R^{u}(\lambda)$ 不同.这与定理 11.5.1 中诚实 Q 过程唯一相矛盾.因此,不存在诚实 Q_{t} 过程.

引理 11.5.4 设 $R^{(n)}(\lambda) = (r_{ij}^{(n)}(\lambda); i,j \in E)$ 是 E 上 $Q^{(n)} = (q_{ij}^{(n)}; i,j \in E)$ 过程($n = 1,2,\cdots,\infty$),如果 $\forall\, \lambda > 0$,$\forall\, i,j \in E$ 有

$$\lim_{n\to\infty} r_{ij}^{(n)}(\lambda) = r_{ij}^{(\infty)}(\lambda). \tag{11.5.23}$$

则

$$\limsup_{n} q_{ij}^{(n)} \leqslant q_{ij}^{(\infty)}, \qquad (i,j \in E).$$

证明 任取 $i,j \in E$,对每个 $R^{(n)}(\lambda)$ $(n = 1,2,\cdots,\infty)$ 关于状态 i 使用分解定理,有

$$R^{(n)}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}_{i}R^{(n)}(\lambda) \end{pmatrix} + r_{ii}^{(n)}(\lambda)\begin{pmatrix} 1 \\ \xi^{(n)}(\lambda) \end{pmatrix}(1,\eta^{(n)}(\lambda)), \tag{11.5.24}$$

$(n = 1,2,\cdots,\infty)$. 其中

$$\begin{cases} \lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda\eta^{(n)}(\lambda) = e^{(n)}, \quad \eta^{(n)}(\lambda) \geqslant e_{i}^{(n)}R^{(n)}(\lambda), \\ e^{(n)} \triangleq (q_{ik}^{(n)}; k \in E\backslash\{i\}). \end{cases} \tag{11.5.25}$$

$$r_{ii}^{(n)}(\lambda)=\frac{1}{c^{(n)}+\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda\eta^{(n)}(\lambda)(1-\xi^{(n)})+\lambda+\lambda\eta^{(n)}(\lambda)\xi^{(n)}}$$

(11.5.26)

$$q_i^{(n)}=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta^{(n)}(\lambda)1+c^{(n)}. \qquad (11.5.27)$$

由(11.5.24)，有

$$\begin{cases}\eta^{(n)}(\lambda)\to\eta^{(\infty)}(\lambda), & \xi^{(n)}(\lambda)\to\xi^{(\infty)}(\lambda),\\ {}_iR^{(n)}(\lambda)\to{}_iR^{(\infty)}(\lambda),\end{cases} \qquad (n\to\infty).$$

(11.2.28)

(i)　若 $i\neq j$，由(11.5.25)，有

$$\eta_j^{(n)}(\lambda)\geqslant q_{ij}^{(n)}\,{}_ir_{jj}^{(n)}(\lambda).$$

因此

$$\eta_j^{(\infty)}(\lambda)\geqslant(\limsup_n q_{ij}^{(n)})\,{}_ir_{jj}^{(\infty)}(\lambda).$$

在上式两边同乘以 λ，再令 $\lambda\to\infty$，得

$$q_{ij}^{(\infty)}\geqslant\limsup_n q_{ij}^{(n)}. \qquad (11.5.29)$$

(ii)　若 $i=j$，由(11.5.27)及 $\lambda\eta^{(n)}(\lambda)\xi^{(n)}$ 关于 λ 单调上升，有

$$\begin{aligned}q_i^{(n)}&\geqslant c^{(n)}+\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta^{(n)}(\lambda)(1-\xi^{(n)})+\lambda\eta^{(n)}(\lambda)\xi^{(n)}\\&=\frac{1}{r_{ii}^{(n)}}-\lambda.\end{aligned}$$

在上式两边关于 n 取下极限得

$$\liminf_n q_i^{(n)}\geqslant\frac{1}{r_{ii}^{(\infty)}(\lambda)}-\lambda.$$

令 $\lambda\to\infty$，得

$$\liminf_n q_i^{(n)}\geqslant q_i^{(\infty)}. \qquad (11.5.30)$$

由(11.5.29)，(11.5.30)知引理获证.

引理 11.5.5　设 E_n 是有限集($n=1,2,\cdots$)，$E_n\uparrow E(n\to\infty)$，$\Psi^{(n)}(\lambda)$ 是 E_n 上 $Q^{(n)}$ 过程，

$$\Psi^{(n)}(\lambda)={}_{E_{n+1}\setminus E_n}\Psi^{(n+1)}(\lambda),\quad(\text{禁止 }E_{n+1}\setminus E_n,n\geqslant1).$$

(11.5.31)

那么 $\Psi^{(\infty)}(\lambda)=\lim\limits_{n\to\infty}\Psi^{(n)}(\lambda)$ 是 E 上标准马氏过程，其 Q - 矩阵 $Q^{(\infty)}$ 满足

$$Q^{(\infty)}=\lim_{n\to\infty}Q^{(n)}. \tag{11.5.32}$$

证明 由(11.5.31)，$\Psi^{(n)}(\lambda)$ 逐元关于 n 单调增加，由单调收敛定理，易证明 $\Psi^{(\infty)}(\lambda)$ 是 E 上标准马氏过程，且 $\forall\, i,j\in E_n$，$\psi_{ij}^{(m)}(\lambda)\leqslant\psi_{ij}^{(\infty)}(\lambda)\quad(m\geqslant n)$. 又由(11.5.31)及禁止概率知，$\forall\, i,j\in E_n$，$q_{ij}^{(m)}=q_{ij}^{(n)}\quad(m\geqslant n)$. 从而

$$Q^{(\infty)}\geqslant\lim_{n\to\infty}Q^{(n)}=(q_{ij};i,j\in E).$$

定义 $\{\Delta\}\cup E$ 上马氏过程 ${}^{\Delta}\Psi^{(n)}(\lambda)\quad(n=1,2,\cdots,\infty)$ 如下

$${}^{\Delta}\psi_{ij}^{(n)}(\lambda)=\begin{cases}\psi_{ij}^{(n)}(\lambda), & i,j\in E_n;\\ \dfrac{1}{\lambda}-\sum\limits_{j\in E_n}\psi_{ij}^{(n)}(\lambda), & i\in E_n,j=\Delta;\\ \dfrac{1}{\lambda}\delta_{ij}, & 否则.\end{cases}$$

$(n=1,2,\cdots)$.

$${}^{\Delta}\psi_{ij}^{(\infty)}(\lambda)=\begin{cases}\psi_{ij}^{(\infty)}(\lambda), & i,j\in E;\\ \dfrac{1}{\lambda}-\sum\limits_{j\in E}\psi_{ij}^{(\infty)}(\lambda), & i\in E,j=\Delta;\\ \dfrac{1}{\lambda}\delta_{ij}, & i=\Delta,j\in\{\Delta\}\cup E.\end{cases}$$

那么，${}^{\Delta}\Psi^{(n)}(\lambda)\to{}^{\Delta}\Psi^{(\infty)}(\lambda)\quad(n\to\infty)$，由引理 11.5.4 有

$$\limsup_{n}d_i^{(n)}\leqslant d_i^{(\infty)}(\lambda),\quad(i\in E).$$

其中

$$d_i^{(n)}=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1-\lambda\sum_{j\in E_n}\psi_{ij}^{(n)}(\lambda)),\quad(i\in E_n,n=1,2,\cdots,\infty).$$

另一方面，

$$\lambda(1-\lambda\sum_{j\in E_n}\psi_{ij}^{(n)}(\lambda))\geqslant\lambda(1-\lambda\sum_{j\in E}\psi_{ij}^{(\infty)}(\lambda)),\quad(i\in E_n).$$

从而

$$d_i^{(\infty)}=\lim_{n\to\infty}d_i^{(n)},\qquad(i\in E). \tag{11.5.33}$$

由多维分解定理，$\forall\ i \in E_n$，有

$$d_i^{(m)} = d_i^{(n)} - \sum_{j\in E_m\setminus E_n} q_{ij}, \quad (m \geqslant n).$$

由(11.5.33)

$$d_i^{(\infty)} = d_i^{(n)} - \sum_{j\in E\setminus E_n} q_{ij}, \quad (i \in E_n).$$

现反设存在 $i,j \in E$，使 $q_{ij}^{(\infty)} > q_{ij}$. 取 n 充分大，使 $i,j \in E_n$，那么

$$\begin{aligned}
d_i^{(\infty)} &= \lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1-\lambda\sum_{k\in E}\psi_{ik}^{(\infty)}(\lambda)) \\
&\leqslant \lim_{\lambda\to\infty}[\lambda(1-\lambda\sum_{k\in E_n}\psi_{ik}^{(n)}(\lambda)) - \lambda^2\sum_{k\in E\setminus E_n}\psi_{ik}^{(\infty)}(\lambda) \\
&\quad + \lambda^2\psi_{ij}^{(n)}(\lambda) - \lambda^2\psi_{ij}^{(\infty)}(\lambda)] \\
&\leqslant d_i^{(n)} - \sum_{k\in E\setminus E_n} q_{ik}^{(\infty)} + q_{ij} - q_{ij}^{(\infty)} \\
&\leqslant d_i^{(n)} - \sum_{k\in E\setminus E_n} q_{ik} + q_{ij} - q_{ij}^{(\infty)} \\
&= d_i^{(\infty)} + q_{ij} - q_{ij}^{(\infty)} < d_i^{(\infty)}.
\end{aligned}$$

矛盾. 从而 $q_{ij}^{(\infty)} = q_{ij}$，故 $Q^{(\infty)} = \lim_{n\to\infty} Q^{(n)}$.

在本节的讨论中，除非另有声明，恒设Q是"双无限"拟$Q-$矩阵，$E_1 = \{i: q_i < +\infty\}$，$E_2 = \{i: q_i = +\infty\}$，$\Phi(\lambda)$ 表示最小 Q_{E_1} 过程.

以下定理 11.5.2，定理 11.5.3 给出了"双无限"诚实Q过程唯一的两个必要条件.

定理 11.5.2 设Q是"双无限"$Q-$矩阵，若存在唯一的诚实Q过程，那么，对任意Q过程$\Psi(\lambda)$，在K. L. Chung[1] I §11$C_i(\delta)$导出的细拓扑下E_2是紧子集. 从而对于唯一诚实Q过程$R(\lambda)$，在Doob紧化态空间$\bar{E}$中($E \subset \bar{E}$，见J. L. Doob[2]、[3])，E_2也是紧子集.

证明 反设结论不真，则存在Q过程$P(t)$(拉氏变换为$\Psi(\lambda)$)，以及E_2的无限子集$\{i_\nu\}_{\nu=1}^{\infty} \subset E_2$，使得在$P(t)$的$C_i(\delta)$拓扑下，$\{i_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$在$E_2$中没有极限点，由K. L. Chung[1] I §11 定理4及

其系，$\forall H\subset\{i_v\}_{v=1}^{\infty}$，禁止概率半群${}_HP(t)$（${}_H\Psi(\lambda)$）在$E\backslash H$上有标准性.

对$\Psi(\lambda)$禁止i_1使用分解定理可得

$$\Psi(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & {}_{i_1}\Psi(\lambda)\end{pmatrix}+\psi_{i_1i_1}(\lambda)\begin{pmatrix}1\\ \xi^{(i_1)}(\lambda)\end{pmatrix}(1,\eta^{(i_1)}(\lambda)),$$

其中

$$\psi_{i_1i_1}(\lambda)=(c_{i_1}+\lambda+\lambda[\eta^{(i_1)}(\lambda),\xi^{(i_1)}])^{-1},$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda[\eta^{(i_1)}(\lambda),1-\xi^{(i_1)}]\leqslant c_{i_1}<+\infty.$$

取$c^{(1)}\geqslant c_{i_1}$充分大，使得　$\psi_{i_1i_1}^{(1)}(1)[1+\eta^{(i_1)}(1)1]\leqslant 1$，其中

$$\psi_{i_1i_1}^{(1)}(\lambda)=(c^{(1)}+\lambda+\lambda[\eta^{(i_1)}(\lambda),\xi^{(i_1)}])^{-1}.$$

令

$$\Psi^{(1)}(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & {}_{i_1}\Psi(\lambda)\end{pmatrix}+\psi_{i_1i_1}^{(1)}(\lambda)\begin{pmatrix}1\\ \xi^{(i_1)}(\lambda)\end{pmatrix}(1,\eta^{(i_1)}(\lambda)).$$

那么，$\Psi^{(1)}(\lambda)$是$Q-$过程，$\Psi(\lambda)\geqslant\Psi^{(1)}(\lambda)$，　$\sum_{j\in E}\psi_{i_1j}^{(1)}(1)\leqslant 1$. 同理，使用$\Psi^{(1)}(\lambda)$及$i_2$，可得到$Q$过程$\Psi^{(2)}(\lambda)$，$\Psi^{(2)}(\lambda)\leqslant\Psi^{(1)}(\lambda)$且

$$\sum_{j\in E}\psi_{i_2j}^{(2)}(1)\leqslant\frac{1}{2}.$$

依次可定义一列Q过程$\{\Psi^{(n)}(\lambda)\}_{n=1}^{\infty}$，$\Psi^{(n+1)}(\lambda)\leqslant\Psi^{(n)}(\lambda)$.

$$\sum_{j\in E}\psi_{i_nj}^{(n)}(1)\leqslant\frac{1}{n},(n=1,2,\cdots).\qquad(11.5.34)$$

令

$$\Psi^{(\infty)}(\lambda)=\lim_{n\to\infty}\Psi^{(n)}(\lambda).$$

$\forall i\in E\backslash\{i_v\}_{v=1}^{\infty}$,

$$\lambda\psi_{ii}^{(n)}(\lambda)\geqslant\lambda_{\{i_1,\cdots,i_n\}}\psi_{ii}(\lambda)\geqslant\lambda_{\{i_v\}_{v=1}^{\infty}}\psi_{ii}(\lambda).$$

从而

$$\lambda\psi_{ii}^{(\infty)}(\lambda)\geqslant\lambda_{\{i_v\}_{v=1}^{\infty}}\psi_{ii}(\lambda)\to 1,\quad(\lambda\to\infty).$$

$\forall i_k$，由于${}_{[\{i_v\}_{v=1}^{\infty}\backslash\{i_k\}]}\Psi(\lambda)$在$E\backslash[\{i_v\}_{v=1}^{\infty}\backslash\{i_k\}]$上满足连续性条件，由分解定理及 K. L. Chung[1] Ⅱ §11 的定理 4，${}_{[\{i_v\}_{v=1}^{\infty}\backslash\{i_k\}]}\Psi^{(k)}(\lambda)$在$E\backslash[\{i_v\}_{v=1}^{\infty}\backslash\{i_k\}]$上满足连续性条件，从而

$$\lambda\psi_{i_k i_k}^{(\infty)}(\lambda) \geqslant \lambda_{[\{i_n\}_{n=1}^{\infty}\setminus\{i_k\}]}\psi_{i_k i_k}^{(k)}(\lambda) \to 1, \quad (\lambda \to \infty).$$

因此，$\Psi^{(\infty)}(\lambda)$ 在 E 上满足连续性条件，由单调收敛定理可知 $\Psi^{(\infty)}(\lambda)$ 是 E 上标准马氏过程，由引理 11.5.4 及 $\Psi^{(n)}(\lambda)$ 单调下降到 $\Psi^{(\infty)}(\lambda)$，可得 $\Psi^{(\infty)}(\lambda)$ 的 $Q-$ 矩阵正好是 Q. 由(11.5.34)

$$\inf_{i\in E}\sum_{j\in E}\psi_{ij}^{(\infty)}(\lambda) = 0, \qquad (\lambda = 1, \text{从而一切 } \lambda > 0).$$

因此，可取非负行向量 $\alpha = (\alpha_i; i \in E)$，使

$$\alpha\mathbf{1} = +\infty, \qquad \alpha\Psi^{(\infty)}(\lambda)\mathbf{1} < +\infty.$$

令

$$R^{(\alpha)}(\lambda) = \Psi^{(\infty)}(\lambda) + (\mathbf{1} - \lambda\Psi^{(\infty)}(\lambda)\mathbf{1})\frac{(\alpha\Psi^{(\infty)}(\lambda))}{\lambda\alpha\Psi^{(\infty)}(\lambda)\mathbf{1}}$$

那么 $R^{(\alpha)}(\lambda)$ 是诚实 Q 过程，当 α 取不同时(常数倍除外)，$R^{(\alpha)}(\lambda)$ 也不相同，从而与诚实 Q 过程唯一矛盾. 故定理前半部分成立.

由于 Doob 紧化空间 $\bar{E}$(赋上拓扑) 限制在子集 E 上与 $C_i(\delta)$ 拓扑等价，(见 Doob[3]). 从而定理的后半部分也成立.

定理 11.5.3 设 Q 是"双无限"$Q-$ 矩阵，若诚实 Q 过程存在而且唯一，那么对于任意 Q 过程 $\Psi(\lambda)$，${}_{E_2}\Psi(\lambda)$ 必为最小 Q_{E_1} 过程.

证明 设 $R(\lambda)$ 是唯一的诚实 Q 过程，$\Psi(\lambda)$ 是任意一个 Q 过程，利用诚实 Q 过程的唯一性，可以证明，$\Psi(\lambda) \leqslant R(\lambda)$.

事实上，注意诚实 Q 过程唯一，由定理 11.4.3，得

$$\sum_{j\in E\setminus\{i\}} q_{ij} = q_i, \qquad (i \in E). \tag{11.5.35}$$

将 E 排序，不妨记 $E = \{i_1, i_2, \cdots\}$

对 $\Psi(\lambda)$ 关于 i_1 使用分解定理，有

$$\Psi(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}_{i_1}\Psi(\lambda) \end{bmatrix} + \psi_{i_1 i_1}(\lambda)\begin{pmatrix} 1 \\ \xi^{(i_1)}(\lambda) \end{pmatrix}(1, \eta^{(i_1)}(\lambda)),$$

其中

$$\psi_{i_1 i_1}(\lambda) = (c_{i_1} + \lambda + \lambda[\eta^{(i_1)}(\lambda), \xi^{(i_1)}])^{-1},$$

$$c_{i_1} \geqslant \lim_{\lambda\to\infty}[\eta^{(i_1)}(\lambda), \mathbf{1} - \xi^{(i_1)}].$$

令

$$\psi_{i_1i_1}(\lambda) = (\lim_{\lambda\to\infty}\lambda[\eta^{(i_1)}(\lambda), 1-\xi^{(i_1)}] + \lambda + \lambda[\eta^{(i_1)}(\lambda), \xi^{(i_1)}])^{-1}.$$

(11.5.36)

$$\Psi^{(1)}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & {}_{i_1}\Psi(\lambda) \end{pmatrix} + \psi^{(1)}_{i_1i_1}(\lambda)\begin{pmatrix} 1 \\ \xi^{(i_1)}(\lambda) \end{pmatrix}(1, \eta^{(i_1)}(\lambda)).$$

显然 $\psi^{(1)}_{i_1i_1}(\lambda) \geqslant \psi_{i_1i_1}(\lambda)$. 从而 $\Psi^{(1)}(\lambda) \geqslant \Psi(\lambda)$，且 $\Psi^{(1)}(\lambda)$ 是 Q 过程，由(11.5.36) 还有

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1-\lambda\sum_{j\in E}\psi^{(1)}_{i_1j}(\lambda)) = 0. \qquad (11.5.37)$$

同理，对 $\Psi^{(1)}(\lambda)$ 关于 i_2 使用分解定理，仿上述处理，可得到一个 Q 过程 $\Psi^{(2)}(\lambda) \geqslant \Psi^{(1)}(\lambda)$，而且

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1-\lambda\sum_{j\in E}\psi^{(2)}_{ij}(\lambda)) = 0, \qquad (i = i_1, i_2).$$

(11.5.38)

使用归纳法，仿以上方法可得到一列 Q 过程 $\{\Psi^{(n)}(\lambda)\}_{n\geqslant 1}^{\infty}$，满足 $\Psi(\lambda) \leqslant \Psi^{(1)}(\lambda) \leqslant \Psi^{(2)}(\lambda) \leqslant \cdots \leqslant \Psi^{(n)}(\lambda) \leqslant \cdots$ 而且

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1-\lambda\sum_{j\in E}\psi^{(n)}_{ij}(\lambda)) = 0, \quad (i = i_1, \cdots, i_n).$$

(11.5.39)

利用(11.5.35) 和(11.5.39) 容易证明 $\Psi^{(\infty)}(\lambda) = \lim\limits_{n\to\infty}\Psi^{(n)}(\lambda)$ 是 Q 过程，而且

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1-\lambda\sum_{j\in E}\psi^{(\infty)}_{ij}(\lambda)) = 0, \qquad (i \in E). \ (11.5.40)$$

$\Psi(\lambda) \leqslant \Psi^{(\infty)}(\lambda)$. 注意到(11.5.40)，可断言 $\Psi^{(\infty)}(\lambda)$ 是诚实 Q 过程，否则利用(11.5.40) 可构造出无穷多个诚实 Q 过程，与唯一性矛盾. 从而 $\Psi^{(\infty)}(\lambda)$ 是诚实 Q 过程，由唯一性，$\Psi^{(\infty)}(\lambda) = R(\lambda)$.

因此，由 J. Neveu[1] 中的定理 3.4.2，有 ${}_{E_2}\Psi(\lambda) \leqslant {}_{E_2}R(\lambda)$. 从而，为证明定理结论成立，只要证明 ${}_{E_2}R(\lambda)$ 是最小 Q_{E_1} 过程.

设 $\bar{E}$ 是 E 关于 $R(\lambda)$ 的 Doob 紧化，由定理 11.5.2，E_2 是 $\bar{E}$ 的紧子集，令 d 是与 $\bar{E}$ 拓扑适应的距离(由 J. L. Doob[2]，$\bar{E}$ 是距离空间的闭子集).

令

$$J_k = \{i \in E; d(i, E_2) < \frac{1}{k}\}, \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

显然，$J_k \downarrow E_2 \quad (k \to \infty)$.

设 $X(t) = \{x(t)\}$ 是 J. L. Doob[2] 扩大状态空间 E 到 $\bar{E}$ 下的右连左极马氏过程，以 $P(t)$($R(\lambda)$ 的反拉氏变换）为转移概率，利用 $X(t)$ 轨道的拟左连续性(J. L. Doob[2] 中的定理 7.2)，类似于 E. Archinard[1] 中的定理 1 的证明方法，易证

$$_{J_k}P(t) \uparrow {}_{E_2}P(t) \qquad ({}_{J_k}R(\lambda) \uparrow {}_{E_2}R(\lambda)) \quad (n \to \infty). \tag{11.5.41}$$

注 以上利用了 J. L. Doob[3] 定义的禁止概率. 当禁止状态限制在 E 中时与 K. L. Chung[1] Ⅱ §11 定义的禁止概率相同. 见 J. L. Doob[3] 中的定理 10.2.

由(11.5.35)，Q 保守；从而$_{J_k}R(\lambda)$ 是 B 型 $Q_{E\setminus J_k}$ 过程. 以下证明，$\forall k \geqslant 1$，$Q_{E\setminus J_k}$ 必是零流出，从而$_{J_k}R(\lambda)$ 是最小 $Q_{E\setminus J_k}$ 过程，由(11.5.41)，那么$_{E_2}R(\lambda)$ 是最小 Q_{E_1} 过程，故定理结论成立.

反设存在 k_0，使 $Q_{E\setminus J_{k_0}}$ 非零流出. 注意，$i \in E\setminus J_{k_0}$，$d(i, E_2) \geqslant \frac{1}{k_0}$，从而 $E\setminus J_{k_0}$ 在 E_2 中没有极限点(E 上 $C_i(\delta)$ 拓扑之下). 因此，$_{[E\setminus J_{k_0}]}R(\lambda)$ 是 J_{k_0} 上 $Q_{J_{k_0}}$ 过程. 记

$$R^{(k_0)}(\lambda) = {}_{[E\setminus J_{k_0}]}R(\lambda),$$

那么，由 Q 保守可得

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda(1 - \lambda \sum_{j\in J_{k_0}} r_{ij}^{(k_0)}(\lambda)) \geqslant \sum_{j\in E\setminus J_{k_0}} q_{ij}, \quad (i \in J_{k_0}).$$

且当 $i \in E_1 \cap J_{k_0}$ 时，上式等号成立.

仿照上面证 $\Psi(\lambda) \leqslant R(\lambda)$ 的证明方法，可构造一列 $Q_{J_{k_0}}$ 过程，从而得一个 $Q_{J_{k_0}}$ 过程 $R^{(\infty,k_0)}(\lambda)$ 满足

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda(1 - \lambda \sum_{j\in J_{k_0}} r_{ij}^{(\infty,k_0)}(\lambda)) = \sum_{j\in E\setminus J_{k_0}} q_{ij}, \quad (i \in J_{k_0}). \tag{11.5.42}$$

令

$$\bar{d}_i = \begin{cases} \sum_{j \in J_{k_0}} q_{ij}, & i \in E \setminus J_{k_0}; \\ \sum_{j \in E \setminus J_{k_0}} q_{ij}, & i \in J_{k_0}. \end{cases}$$

$$\bar{e}_j^{(i)} = \begin{cases} 0, & i,j \in J_{k_0} \text{ 或 } i,j \in E \setminus J_{k_0}; \\ q_{ij}, & \text{其它 } i,j \in E. \end{cases} \tag{11.5.43}$$

$$\bar{d} = (\bar{d}_i; i \in E)^T, \quad \bar{d}^{(i)} = (\delta_{ij}\bar{d}_i; j \in E)^T,$$

$$\bar{e}^{(i)} = (\bar{e}_j^{(i)}; j \in E)^T.$$

仍记 $E = \{i_1, i_2, \cdots\}$，那么

$$\bar{d} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{d}^{(i_n)}, \qquad e^{(i)}1 = \bar{d}_i.$$

令

$$\overline{R}^{(1)}(\lambda) = \begin{pmatrix} \Phi^{(k_0)}(\lambda) & \\ & R^{(\infty, k_0)}(\lambda) \end{pmatrix}, \tag{11.5.44}$$

其中 $\Phi^{(k_0)}(\lambda)$ 是最小 $Q_{E \setminus J_{k_0}}$ 过程.

那么

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda(1 - \lambda \overline{R}^{(1)}(\lambda)1) = \bar{d} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{d}^{(i_n)}.$$

由于 $Q_{E \setminus J_{k_0}}$ 非零流出，从而

$$X^{(1)}(\lambda) \triangleq 1 - \lambda \overline{R}^{(1)}(\lambda)1 - \overline{R}^{(1)}(\lambda)\bar{d} \neq 0, \quad X^{(1)}(\lambda) \in M_{\overline{R}^{(1)}(\lambda)}^{1}$$

利用定理 9.5.1 证明中使用的通常方法，可以由 $\overline{R}^{(1)}(\lambda)$ 构造一列 $\{\overline{R}^{(n)}(\lambda)\}_{n \geq 1}$.

$$\overline{R}^{(1)}(\lambda) \leqslant \overline{R}^{(2)}(\lambda) \leqslant \cdots,$$

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda(1 - \lambda \overline{R}^{(n)}(\lambda)1) = \sum_{k=n}^{\infty} \bar{d}^{(i_k)}.$$

$\forall\, i \in \{i_1, \cdots, i_n\}, j \in E$,

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda(\lambda \bar{r}_{ij}^{(m)}(\lambda) - \delta_{ij}) = q_{ij}, \qquad (m > n).$$

令

$$X^{(n)}(\lambda) \triangleq 1 - \lambda \overline{R}^{(n)}(\lambda)1 - \overline{R}^{(n)}(\lambda) \sum_{k=n}^{\infty} \bar{d}^{(i_k)}.$$

易证明

$$X^{(1)}(\lambda) \leqslant X^{(2)}(\lambda) \leqslant \cdots.$$

令

$$\overline{R}(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \overline{R}^{(n)}(\lambda),$$

$$X(\lambda) = 1 - \lambda\overline{R}(\lambda)1.$$

那么$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda X(\lambda) = 0$，$\overline{R}(\lambda)$ 是 Q 过程.

由于

$$X(\lambda) = \lim_{n\to\infty} X^{(n)}(\lambda) \geqslant X^{(1)}(\lambda) \neq 0.$$

从而，若取不等于零的非负可和行向量 $\alpha = (\alpha_i; i \in E)$. 那么

$$R^\alpha(\lambda) = \overline{R}(\lambda) + (1 - \lambda\overline{R}(\lambda)1) \frac{\alpha\overline{R}(\lambda)}{\lambda\alpha\overline{R}(\lambda)1}$$

是诚实 Q 过程，当 α 取不同时(常数倍除外)，$R^\alpha(\lambda)$ 也不相同，从而与诚实 Q 过程唯一矛盾. 故定理成立.

以下来证明前面的引理 11. 5. 2.

引理 11. 5. 2 的证明 由于$\liminf_{j\in E_2} \sum_{i\in H} q_{ij} > 0$，且 H 是满足此条件的最小集. 从而关于 $\Psi(\lambda)$，E_2 是紧集，E_2 的全部极限点为 H. 从而对任意有限集 $F_n \subset E_2 \backslash H$，$F_n$ 不含 $E_2 \backslash F_n$ 的极限点，由 K. L. Chung[1] Ⅱ §11 定理 4 及其系，可知${}_{E_2\backslash F_n}\Psi(\lambda)$ 在 $E_1 \cup F_n$ 上有标准性，从而是 $Q_{E_1\cup F_n}$ 过程.

为证明${}_{(E_2\backslash F_n)}\Psi(\lambda) \uparrow {}_H\Psi(\lambda) \quad (n \to \infty)$，设 $\overline{E}$ 是 E 关于 $\Psi(\lambda)$ 的 Doob 紧化流出状态空间 J. L. Doob[3]，令 d 是与 $\overline{E}$ 拓扑相适应的距离，由于 H 是 E_2 的全部极限点之集，且 E_2 为紧集. 从而 $\forall\, k, G_k^c \triangleq \{i \in E_2 : d(i,H) \geqslant \frac{1}{k}\}$ 必为有限集. 因此，存在 n_k 使

$$F_{n_k} \supset G_k^c.$$

故 $E_2 \backslash F_{n_k} \subset G_k \triangleq \{i \in E : d(i,H) < \frac{1}{k}\}$. 因此，${}_{(E_2\backslash F_{n_k})}\Psi(\lambda) \geqslant {}_{G_k}\Psi(\lambda)$. 利用在扩大状态空间 $\overline{E}$ 中，样本轨道的拟左连续性(见 J. L. Doob[2] 中的定理 7. 2)，仿 E. Archinard[1] 中的定理 1 的证明，有

$$\lim_{k\to\infty} {}_{G_k}\Psi(\lambda) \geqslant {}_H\Psi(\lambda).$$

从而，

$$\lim_{k\to\infty} {}_{(E_2\setminus F_{n_k})}\Psi(\lambda) \geqslant {}_H\Psi(\lambda).$$

另一方面，${}_{(E_2\setminus F_n)}\Psi(\lambda)$ 关于 n 单调增，且

$${}_{(E_2\setminus F_n)}\psi_{ij}(\lambda) \leqslant {}_H\psi_{ij}(\lambda), \qquad (i,j \in E_1 \cup F_n).$$

从而， $\lim_{n\to\infty} {}_{(E_2\setminus F_n)}\Psi(\lambda) = {}_H\Psi(\lambda).$

在本节的最后，我们对定理 11.5.1 做一些推广；为此，先作一些准备.

设 Q 是"双无限"拟 Q − 矩阵，Q_{E_2} 不满足 (S) 条件，我们引入下列记号：

（Ⅰ） $H = \{b_1, \cdots, b_n\} \subset E_2$ 表示满足 $\liminf_{j\in E_2} \sum_{i\in H} q_{ij} > 0$ 的最小有限子集. $e^{(k)} = (q_{b_k j}; j \in E\setminus H)$，$e^{(k)} = (q_{ib_k}; i \in E\setminus H)^T$，$(k = 1, 2, \cdots, n)$. $\varphi(\lambda)$ 表示最小 Q_{E_1} 过程；$e^i = (q_{ij}; j \in E_1)$，$e^i = (q_{ji}; j \in E_1)^T$，$(i \in E_2)$.

$$\Phi e^i \triangleq \lim_{\lambda\downarrow 0}[\Phi(\lambda)e^i].$$

（Ⅱ） 如果 $F_m \subset E_2\setminus H$ 是有限集，$F_m = \{i_1, \cdots, i_m\}$ 且

$$e^i\Phi(\lambda)1 < +\infty, \qquad (i \in F_m),$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda[e^i\Phi(\lambda), 1 - \Phi e^i] < +\infty, \qquad (i \in F_m).$$

那么定义 $Q_{E_1\cup F_m}$ 过程 $\Phi^{(F_m)}(\lambda)$ 如下

$$\Phi^{(F_m)}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Phi(\lambda) \end{pmatrix} + $$

$$+ \begin{pmatrix} A^{(F_m)}(\lambda) & A^{(F_m)}(\lambda)\eta^{(F_m)}(\lambda) \\ \xi^{(F_m)}(\lambda)A^{(F_m)}(\lambda) & \xi^{(F_m)}(\lambda)A^{(F_m)}(\lambda)\eta^{(F_m)}(\lambda) \end{pmatrix}, \tag{11.5.45}$$

其中

$$\eta^{(F_m)}(\lambda) = \begin{bmatrix} e^{i_1}\Phi(\lambda) \\ \cdots \\ e^{i_m}\Phi(\lambda) \end{bmatrix}, \qquad \xi^{(F_m)}(\lambda) = (\Phi(\lambda)e^{i_1}, \cdots, \Phi(\lambda)e^{i_m}). \tag{11.5.46}$$

$$A^{(F_m)}(\lambda) = (c^{(F_m)} + \lambda I + \lambda[\eta^{(F_m)}(\lambda), \xi^{(F_m)}])^{-1}.$$

$$[\eta^{(F_m)}(\lambda),\xi^{(F_m)}]=([e^i\Phi(\lambda),\Phi e^j];i,j\in F_m).$$

$c^{(F_m)}=(c_{ij}^{(F_m)};i,j\in F_m)$ 满足

$$c_{ij}^{(F_m)}=-(q_{ij}+\lim_{\lambda\to\infty}\lambda[e^i\Phi(\lambda),\Phi e^j]),\qquad(i,j\in F_m;i\neq j),\tag{11.5.47}$$

$$c_{ii}^{(F_m)}=\sum_{j\in E_2\setminus\{i\}}q_{ij}+\lim_{\lambda\to\infty}\lambda[e^i\Phi(\lambda),1-\Phi e^i],\qquad(i\in F_m).\tag{11.5.48}$$

由(11.5.45)—(11.5.48),可得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1-\lambda\sum_{j\in E_1\cup F_m}\varphi_{ij}^{(F_m)}(\lambda))=\begin{cases}q_i-\sum\limits_{j\in E_1\cup F_m\setminus\{i\}}q_{ij}, & i\in E_1;\\ \sum\limits_{j\in E_2\setminus F_m}q_{ij}, & i\in F_m.\end{cases}\tag{11.5.49}$$

而且 $\forall F'\subset F_m,F'\neq\varnothing$,必有

$$\Phi^{(F')}(\lambda)={}_{(F_m\setminus F')}\Phi^{(F_m)}(\lambda).\tag{11.5.50}$$

从(11.5.2)和(11.5.3)可知,定理 11.5.1 中的 Q 具有性质:Q_{E_2} 不满足(S)条件,且 $H=\{b\}$. 我们可以把定理 11.5.1 推广,得到下面定理.

定理 11.5.4 设 Q 是"双无限"拟 Q — 矩阵,满足(N)条件. 如果Q_{E_2}不满足(S)条件,Q_{E_1}零流入,零流出,则存在唯一诚实Q过程当且仅当下列(i)—(v) 同时成立.

(i) Q 保守,即 $q_i=\sum\limits_{j\in E\setminus\{i\}}q_{ij}$, $\qquad(i\in E)$;

(ii) $e^i\Phi(\lambda)1<+\infty$, $\qquad\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda[e^i\Phi(\lambda),1-\Phi e^i]<+\infty$, $(i\in E_2\setminus H)$;

(iii) 存在子集列$\{F_m\}$,满足 $F_m\uparrow E_2\setminus H(m\to\infty)$,按(11.5.45)—(11.5.48) 定义 $\Phi^{(F_m)}(\lambda)$,记 $\Phi^{(\infty)}(\lambda)\triangleq\lim\limits_{m\to\infty}\Phi^{(F_m)}(\lambda)$ (上升极限). 那么

$$e^{(k)}\Phi^{(\infty)}(\lambda)1=\sum_{i,j\in E\setminus H}q_{b_k i}\varphi_{ij}^{(\infty)}(\lambda)<+\infty,\qquad(k=1,\cdots,n).$$

(iv) $1-\lambda\Phi^{(\infty)}(\lambda)1$ 有以下分解

$$1-\lambda\Phi^{(\infty)}(\lambda)1=\sum_{k=1}^{n}\xi^{(k)}(\lambda).$$

其中 $\xi^{(k)}(\lambda)\in M_{\Phi^{(\infty)}(\lambda)}$, $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda\xi^{(k)}(\lambda)=\varepsilon^{(k)}$, $(k=1,\cdots,n)$.

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda[e^{(k)}\Phi(\lambda),1-\xi^{(k)}]<+\infty,$$

$$\xi^{(k)}=\lim_{\lambda\downarrow 0}\xi^{(k)}(\lambda),\quad (k=1,\cdots,n).$$

(v) 对任意 $\bar{\eta}(\lambda)\in L^{0}_{\Phi^{(\infty)}(\lambda)}$,若 $\bar{\eta}(\lambda)\neq 0$,则

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda[\bar{\eta}(\lambda),1-\xi^{(k)}]=+\infty,\qquad (k=1,\cdots,n).$$

证明 我们仅对 $n=1$ 的情况进行证明. 而 $n>1$ 情况的证明类似.

先证条件的充分性. 假设(i)—(v) 成立.

由于 $\Phi^{(F_m)}(\lambda)$ 是 $Q_{E_1\cup F_m}$ 过程,由引理 11.5.5,$\Phi^{(\infty)}(\lambda)$ 是 $Q_{E\setminus H}$ 过程. 由 Q 保守、引理 11.5.5 的证明、(11.5.33)、(11.5.47) 和(11.5.48) 可知

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1-\lambda\Phi^{(\infty)}(\lambda)1)=\varepsilon^{(1)}.\tag{11.5.51}$$

令

$$\Psi(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \Phi^{(\infty)}(\lambda)\end{pmatrix}+\psi_{b_1b_1}(\lambda)\begin{pmatrix}1\\ 1-\lambda\Phi^{(\infty)}(\lambda)1\end{pmatrix}\times(1,e^{(1)}\Phi^{(\infty)}(\lambda)),\tag{11.5.52}$$

其中 $\psi_{b_1b_1}(\lambda)=\dfrac{1}{\lambda+\lambda[e^{(1)}\Phi^{(\infty)}(\lambda),1]}$.

由分解定理及(11.5.51) 知,$\Psi(\lambda)$ 是诚实 Q 过程.

如果 $\Psi^{*}(\lambda)$ 是任一诚实 Q 过程,由 Q 保守、Q_{E_1} 零流入、零流出,可得 ${}_{E_2}\Psi(\lambda)={}_{E_2}\Psi^{*}(\lambda)=\Phi(\lambda)$ (最小 Q_{E_1} 过程),并且 $L^{0}_{\Phi(\lambda)}=\{0\}$, $M^{0}_{\Phi(\lambda)}=\{0\}$. 由引理 11.5.2 有

$${}_{H}\Psi(\lambda)=\lim_{m\to\infty}{}_{(E_2\setminus F_m)}\Psi(\lambda)=\lim_{m\to\infty}\Phi^{(F_m)}(\lambda),\tag{11.5.53}$$

$${}_{H}\Psi^{*}(\lambda)=\lim_{m\to\infty}{}_{(E_2\setminus F_m)}\Psi^{*}(\lambda).\tag{11.5.54}$$

由 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda(1-\lambda_{H}\Psi^{*}(\lambda)1)=\varepsilon^{(1)}$ 及引理 11.5.2 的证明可知

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1-\lambda_{(E_2\setminus F_m)}\Psi^{*}(\lambda)1)=\sum_{i\in E_2\setminus F_m}\varepsilon^{i}.$$

由上式及${}_{E_2}\Psi^*(\lambda)=\Phi(\lambda)$, $L^0_{\Phi(\lambda)}=\{\mathbf{0}\}$, $M^0_{\Phi(\lambda)}=\{\mathbf{0}\}$,使用分解定理易证得

$$_{(E_2\setminus F_m)}\Psi^*(\lambda)=\Phi^{(F_m)}(\lambda).$$

由上式,(11.5.53)及(11.5.54)得

$$_H\Psi^*(\lambda)={}_H\Psi(\lambda)=\Phi^{(\infty)}(\lambda)\qquad(H=\{i_1\}).$$

注意$\Psi^*(\lambda)$是诚实Q过程以及(v),由分解定理得

$$\Psi^*(\lambda)=\begin{pmatrix}0&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&\Phi^{(\infty)}(\lambda)\end{pmatrix}+\frac{1}{\lambda+\lambda[e^{(1)}\Phi^{(\infty)}(\lambda),\mathbf{1}]}$$

$$\times\begin{pmatrix}1\\ \mathbf{1}-\lambda\Phi^{(\infty)}(\lambda)\mathbf{1}\end{pmatrix}(1,e^{(1)}\Phi^{(\infty)}(\lambda)).$$

由(11.5.52)知$\Psi^*(\lambda)=\Psi(\lambda)$. 故诚实$Q$过程唯一.

必要性　假设存在唯一的诚实Q过程$\Psi(\lambda)$.

由定理11.4.3知(i)成立. 由定理11.5.3, ${}_{E_2}\Psi(\lambda)=\Phi(\lambda)$;又由于$Q_{E_1}$零流入、零流出,从而$L^0_{\Phi(\lambda)}=\{\mathbf{0}\}$, $M^0_{\Phi(\lambda)}=\{\mathbf{0}\}$.

任意取定满足$F_m\uparrow E_2\setminus H$的有限子集列$\{F_m\}$,由引理11.5.2及引理11.5.5的(11.5.33),有

$$\lim_{m\to\infty}{}_{(E_2\setminus F_m)}\Psi(\lambda)={}_H\Psi(\lambda).$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(\mathbf{1}-\lambda_{(E_2\setminus F_m)}\Psi(\lambda)\mathbf{1})=\sum_{i\in E_2\setminus F_m}\varepsilon^i.$$

由上式和多维分解定理及$L^0_{\Phi(\lambda)}=\{\mathbf{0}\}$, $M^0_{\Phi(\lambda)}=\{\mathbf{0}\}$,得

$$_{(E_2\setminus F_m)}\Psi(\lambda)=\Phi^{(F_m)}(\lambda),$$

$$_H\Psi(\lambda)=\Phi^{(\infty)}.$$

再由多维分解定理知(ii)成立. 由$\Psi(\lambda)$关于$H=\{b_1\}$的一维分解可知(iii)、(iv)成立.

如果(v)不成立,则存在$\bar\eta(\lambda)\in L^0_{\Phi_{(\infty)}(\lambda)}$, $\bar\eta\neq\mathbf{0}$且

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda[\bar\eta(\lambda),\mathbf{1}-\xi^{(1)}]<+\infty,$$

($n=1$时此条件自动满足,因为此时$\xi^{(1)}(\lambda)=\mathbf{1}-\lambda\Phi_{(\infty)}(\lambda)\mathbf{1}$).

$\forall\, u>0$,令

$$\Psi^u(\lambda)=\begin{pmatrix}0&0\\ \mathbf{0}&\Phi^{(\infty)}(\lambda)\end{pmatrix}+\frac{1}{\lambda+\lambda[e^{(1)}\Phi^{(\infty)}(\lambda)+u\bar\eta(\lambda),\mathbf{1}]}$$

$$\times \left(\frac{1}{1 - \lambda \Phi^{(\infty)}(\lambda) 1} \right) (1, e^{(1)} \Phi^{(\infty)}(\lambda) + u \bar{\eta}(\lambda)),$$

则 $\Psi^u(\lambda)$ 是诚实 Q 过程，当 u 不同时 $\Psi^u(\lambda)$ 不同，这与诚实 Q 过程唯一矛盾. 因此(v) 成立. 定理证毕.

§6　补充与注记

§1 全稳定诚实 Q 过程的唯一性准则取自于侯振挺、郭青峰[1].

全瞬时诚实 Q 过程的非唯一性由 D. Williams[3] 得到. 在此基础之上，陈安岳给出了有限个稳定态无限个瞬时态诚实 Q 过程的非唯一性.

有限个瞬时态诚实 Q 过程的唯一性准则由费志凌[2] 得到. §4 取自于费[2].

由于全瞬时态和有限个稳定态无限个瞬时态诚实 Q 过程均具有非唯一性. 因此，人们猜测：如果"双无限"诚实 Q 过程存在，则不会唯一. 刘再明[3] 给出了一类"双无限"Q - 矩阵，它们的诚实 Q 过程存在且唯一，从而否定了以上猜测. §5 取自于刘再明[1].

12 Q过程唯一性准则的应用举例

本章给出唯一性准则的若干应用. 在 §1 中考虑含瞬时态的情况,在 §1 之后,除非另有声明,我们恒设 Q 是全稳定的.

§1 含瞬时态 Q 过程的非唯一性

由引理 10.2.1 有下列结论.

定理 12.1.1 若 Q 是含瞬时态的 Q − 矩阵,则存在无穷多个 Q 过程,从而 Q 过程不唯一;而且,在所有 Q 过程中不存在最小的 Q 过程.

证明 由引理 10.2.1 及其证明立得本定理成立.

定理 12.1.2 设 Q 是含瞬时态的 Q − 矩阵,存在诚实 Q 过程,如果存在 $i \in E$,使

$$\sum_{j \in E-\{i\}} q_{ij} < q_i.$$

则存在无穷多个诚实 Q 过程,从而诚实 Q 过程不唯一性.

证明 见定理 11.4.3.

§2 有界情况

定义 12.2.1 若存在常数 $0 \leqslant c < +\infty$,使 $-q_{ii} \leqslant c \quad (i \in E)$ 成立,则称 Q 为有界的.

引理 12.2.1 若 $\eta = (\eta_j; j \in E)$ 是方程

$$\begin{cases} \eta(\lambda I - Q) = 0, \\ 0 \leqslant \eta \in L_E, \end{cases} \quad (\lambda > 0) \qquad (12.2.1)$$

的任一非零解,则

$$\sum_{j\in E}\Big(\sum_{k\in E-\{j\}} q_{jk}\Big)\eta_j = +\infty. \qquad (12.2.2)$$

证明　由(12.2.1)得

$$(\lambda + q_j)\eta_j = \sum_{k\neq j} q_{kj}\eta_k,$$

于是有

$$\lambda\sum_{j\in E}\eta_j + \sum_{j\in E} q_j\eta_j = \sum_{j\in E}\Big(\sum_{k\neq j} q_{kj}\eta_k\Big)$$

$$= \sum_{k\in E}\Big(\sum_{j\neq k} q_{kj}\Big)\eta_k$$

$$= \sum_{j\in E}\Big(\sum_{k\in E-\{j\}} q_{jk}\Big)\eta_j.$$

若(12.2.2)不成立，由 $\lambda > 0, q_j \geqslant \sum_{k\in E-\{j\}} q_{jk}, \sum_{j\in E}\eta_j < +\infty$ 及上式，得

$$\sum_{j\in E}\eta_j = 0.$$

从而 $\eta = \mathbf{0}$，与 η 是(12.2.1)的非零解矛盾！引理 12.2.1 证毕.

引理 12.2.2　若

$$\sum_{j\in E-\{i\}} q_{ij} \leqslant c < +\infty, \qquad (i\in E). \qquad (12.2.3)$$

则(12.2.1)只有零解.

证明　设 η 是(12.2.1)的任一解，则

$$\sum_{j\in E}\Big(\sum_{k\neq j} q_{jk}\Big)\eta_j \leqslant c\sum_{j\in E}\eta_j < +\infty. \qquad (12.2.4)$$

从而由引理 12.2.1 知 $\eta = \mathbf{0}$，引理证毕.

定理 12.2.1　若 Q 是有界的，则 Q 过程唯一，从而 B 型和 F 型 Q 过程唯一.

证明　设 $\Phi(\lambda)$ 是最小 Q 过程，由于 Q 有界，从而存在 $0\leqslant c < +\infty$，使

$$q_i \leqslant c, \quad (i\in E).$$

因此

$$\varphi_{ii}(\lambda) \geqslant \frac{1}{\lambda + q_i} \geqslant \frac{1}{\lambda + c}, \quad (i\in E).$$

故$\inf\limits_{i\in E}\sum\limits_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)>0$，即$(H)$条件成立，又由引理12.2.2知(12.2.1)只有零解. 由定理10.1.1，Q过程唯一. 定理证毕.

§3 E为有限集的情况

定理12.3.1 若E为有限集，则Q过程唯一. 从而B型和F型Q过程唯一.

证明 显见，定理10.1.1对E为有限集也成立. 由$q_i\leqslant\max\limits_{i\in E}q_i<+\infty\quad(\forall\ i\in E)$及定理12.2.1知$Q$过程唯一.

§4 对角型情况

定理12.4.1 设Q是对角型的，则

(i) B型Q过程唯一；

(ii) F型Q过程唯一；

(iii) Q过程唯一的充要条件是

$$\sup_{i\in E}q_i=c<+\infty. \tag{12.4.1}$$

证明 由于Q是对角型的，从而方程

$$\begin{cases}(\lambda I-Q)U=\mathbf{0},\\ \mathbf{0}\leqslant U\leqslant\mathbf{1},\end{cases}\quad(\lambda>0). \tag{12.4.2}$$

和

$$\begin{cases}v(\lambda I-Q)=\mathbf{0},\\ \mathbf{0}\leqslant v\in L_E,\end{cases}\quad(\lambda>0) \tag{12.4.3}$$

均只有零解. 由定理10.4.1和定理10.4.2知，(i)、(ii)均成立.

若(12.4.1)成立，则Q是有界的，由定理12.2.1知，Q过程唯一.

反之，若Q过程唯一，反设(12.4.1)不成立，则

$$\sup_{i\in E}q_i=+\infty, \tag{12.4.4}$$

设$\Phi(\lambda)$是最小Q过程，由于Q是对角型，从而$\Phi(\lambda)$有下列形式

$$\Phi(\lambda)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\lambda+q_1}\\ \dfrac{1}{\lambda+q_2}\\ \vdots\end{pmatrix},\quad (\lambda>0). \tag{12.4.5}$$

其中,假设了 $E=\{1,2,\cdots\}$,这不失一般性.

由(12.4.4),(12.4.5)有

$$\inf_{i\in E}\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)=0,\quad (\lambda>0). \tag{12.4.6}$$

即(H)条件不成立.由定理10.1.1,Q过程不唯一.矛盾.从而(12.4.1)成立.定理证毕.

§5 加边对角型情况

形如

$$\begin{pmatrix}-q_0 & q_{01} & q_{02} & q_{03} & \cdots\\ q_{10} & -q_1 & 0 & 0 & \cdots\\ q_{20} & 0 & -q_2 & 0 & \cdots\\ q_{30} & 0 & 0 & -q_3 & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{pmatrix} \tag{12.5.1}$$

的 Q—矩阵叫做加边对角型 Q—矩阵.

定理 12.5.1 设 Q 是加边对角型的,则

(i) B型 Q 过程唯一;

(ii) F型 Q 过程唯一;

(iii) Q 过程唯一的充要条件是

$$\inf_{i\in \hat{E}}\frac{1+q_{i0}}{1+q_i}>0, \tag{12.5.2}$$

其中 $\hat{E}=\{i>0;q_i\neq q_{i0}\}$.

证明 (i) 这时方程$(\lambda I-Q)U=\mathbf{0}$成为

$$\begin{cases}(\lambda+q_0)u_0=\sum\limits_{k\neq 0}q_{0k}u_k,\\ (\lambda+q_i)u_i=q_{i0}u_0,\quad (i=1,2,\cdots).\end{cases} \tag{12.5.3}$$

于是

$$(\lambda + q_0)u_0 = (\sum_{k\neq 0} \frac{q_{0k}q_{k0}}{\lambda + q_k})u_0. \qquad (12.5.4)$$

从而，若对于某 $\lambda > 0, u_0 \neq 0$，则由 $q_{k0} \leqslant q_k$ 得

$$q_0 < \lambda + q_0 = \sum_{k\neq 0} \frac{q_{0k}q_{k0}}{\lambda + q_k} < \sum_{k\neq 0} q_{0k} \leqslant q_0.$$

这导致矛盾 $q_0 < q_0$. 于是必有 $u_0 = 0$，由(12.5.3)知 $u_k = 0(k = 0, 1, \cdots)$. 由定理 10.4.1 知，$B$ 型 Q 过程唯一.

(ii) 参看(i)的证明，不难得知，方程

$$\begin{cases} v(\lambda I - Q) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{0} \leqslant v \in L_E, \end{cases} \qquad (\lambda > 0)$$

只有零解. 由定理 10.4.2 知，F 型 Q 过程唯一.

(iii) 由引理 4.3.2(在此引理中取 $f = \lambda\mathbf{1}$)，$\{\lambda \sum_{j\in E} \varphi_{ij}(\lambda), i \in E\}$ 是方程组

$$\begin{cases} x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q_{0k}}{\lambda + q_0} x_k + \frac{\lambda}{\lambda + q_0}, \\ x_i = \frac{q_{i0}}{\lambda + q_i} x_0 + \frac{\lambda}{\lambda + q_i}, \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \cdots) \quad (12.5.5)$$

的最小非负解，于是

$$\lambda \sum_{j\in E} \varphi_{ij}(\lambda) = \frac{q_{i0}}{\lambda + q_i}(\lambda \sum_{j\in E} \varphi_{0j}(\lambda)) + \frac{\lambda}{\lambda + q_i}, \quad (i > 0).$$

注意 $\frac{\lambda}{\lambda + q_0} \leqslant \lambda \sum_{j\in E} \varphi_{0j}(\lambda) \leqslant 1$，由上式得

$$\frac{q_{i0}}{\lambda + q_i} \frac{\lambda}{\lambda + q_0} + \frac{\lambda}{\lambda + q_i} \leqslant \lambda \sum_{j\in E} \varphi_{ij}(\lambda) \leqslant \frac{q_{i0}}{\lambda + q_i} + \frac{\lambda}{\lambda + q_i}.$$

从而

$$\frac{\lambda}{\lambda + q_0} \frac{\lambda + q_{i0}}{\lambda + q_i} \leqslant \lambda \sum_{j\in E} \varphi_{ij}(\lambda) \leqslant \frac{\lambda + q_{i0}}{\lambda + q_i}.$$

因此，(12.5.2)成立等价于 $\inf_{i\in E} \lambda \sum_{j\in E} \varphi_{ij}(\lambda) > 0$ 对 $\lambda = 1$ 成立(从而对一切 $\lambda > 0$ 成立)，即(12.5.2)成立等价于(H)条件成立，再注意已证得的(ii)，由定理 10.1.1 得知(iii)成立.

例 12.5.1 设 $q_i = 2i$, $q_{i0} = i \quad (i > 0)$,这时

$$\inf_{i \in E} \frac{1 + q_{i0}}{1 + q_i} = \inf_{i > 1} \frac{1 + i}{1 + 2i} = \frac{1}{2} > 0.$$

所以这时 Q 过程唯一.

例 12.5.2 设 $q = i^2, q_{i0} = i(i > 0)$. 这时

$$\inf_{i \in E} \frac{1 + q_{i0}}{1 + q_i} = \inf_{i > 0} \frac{1 + i}{1 + i^2} = 0.$$

所以这时 Q 过程不唯一.

§6 有限非保守情况

定义 12.6.1 若 $H = \{i: \sum_{j \in E - \{i\}} q_{ij} < q_i\}$ 为有限集,则称 Q 为有限非保守的.

定理 12.6.1 若 Q 是有限非保守的,则 Q 过程唯一的充要条件为 B 型和 F 型 Q 过程都唯一.

证明 若 H 为有限集,则

$$\inf_{i \in H} \lambda \sum_{j \in E} \varphi_{ij}(\lambda) \geqslant \min_{i \in H} \lambda \varphi_{ii}(\lambda) > 0.$$

从而由定理 10.4.3 立得我们的定理.

§7 生灭情况

设 $a_0 \geqslant 0, a_i > 0, b_i > 0 (i = 1, 2, \cdots)$. 形如

$$Q = \begin{pmatrix} -(a_0 + b_0) & b_0 & 0 & \cdots \\ a_1 & -(a_1 + b_1) & b_1 & \cdots \\ 0 & a_2 & -(a_2 + b_2) & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \tag{12.7.1}$$

的 Q — 矩阵称为生灭 Q — 矩阵. 对应的 Q 过程称为生灭 Q 过程. 令

$$
\begin{cases}
z_0 = \begin{cases} 0, & \text{如 } a_0 = 0; \\ \dfrac{1}{a_0}, & \text{如 } a_0 \neq 0. \end{cases} \\
z_1 = z_0 + \dfrac{1}{b_0}. \\
\cdots \\
z_n = z_0 + \dfrac{1}{b_0} + \cdots + \dfrac{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}{b_0 b_1 \cdots b_{n-1}}, \quad (n = 1, 2, \cdots).
\end{cases}
\tag{12.7.2}
$$

$$
z = \lim_{n \to \infty} z_n. \tag{12.7.3}
$$

$$
\mu_0 = 1, \mu_n = \frac{b_0 b_1 \cdots b_{n-1}}{a_1 a_2 \cdots a_n}, \quad (n > 1). \tag{12.7.4}
$$

$$
R = \sum_{j=0}^{\infty} (z - z_j) \mu_j. \tag{12.7.5}
$$

$$
S = \sum_{j=1}^{\infty} z_j \mu_j. \tag{12.7.6}
$$

显见

$$
R = \sum_{i=0}^{\infty} (z_{i+1} - z_i) \sum_{k=0}^{i} \mu_k. \tag{12.7.7}
$$

设 $U = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \cdots \end{pmatrix}$ 为列矢量，定义 u^+ 如下：

$$
u_i^+ = \frac{u_{i+1} - u_i}{z_{i+1} - z_i}, \quad (i \geq 0). \tag{12.7.8}
$$

为了方便，以后约定

$$
u_{-1}^+ = a_0 u_0, \quad u_{-1} = 0. \tag{12.7.9}
$$

于是可定义 $D_\mu u_i$ 如下

$$
D_\mu u_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{\mu_i}, \quad (i \geq 0). \tag{12.7.10}
$$

引理 12.7.1 设 U 为列矢量，则

$$
QU = D_\mu u^+, \tag{12.7.11}
$$

即

$$a_i u_{i-1} - (a_i + b_i) u_i + b_i u_{i+1} = (D_\mu u^+)_i, \quad i \geqslant 0. \tag{12.7.12}$$

证明

$$\begin{aligned}(D_\mu u^+)_0 &= \frac{u_0^+ - u_{-1}^+}{\mu_0} \\ &= \frac{u_1 - u_0}{z_1 - z_0} - a_0 u_0 \qquad (12.7.13) \\ &= b_0(u_1 - u_0) - a_0 u_0 \\ &= -(a_0 + b_0) u_0 + b_0 u_1.\end{aligned}$$

易验证

$$a_i = \frac{1}{(z_i - z_{i-1})\mu_i}, \quad (i > 0). \tag{12.7.14}$$

$$b_i = \frac{1}{(z_{i+1} - z_i)\mu_i}, \quad (i \geqslant 0). \tag{12.7.15}$$

故

$$\begin{aligned}(D_\mu u^+)_i &= \frac{\dfrac{u_{i+1} - u_i}{z_{i+1} - z_i} - \dfrac{u_i - u_{i-1}}{z_i - z_{i-1}}}{\mu_i} \\ &= b_i(u_{i+1} - u_i) - a_i(u_i - u_{i-1}) \\ &= a_i u_{i-1} - (a_i + b_i) u_i + b_i u_{i+1}, \ (i > 0). \qquad (12.7.16)\end{aligned}$$

引理证毕.

引理 12.7.2 方程

$$\begin{cases}(\lambda I - Q)U = \mathbf{0}, \\ u_0 = 1,\end{cases} \quad (\lambda > 0) \tag{12.7.17}$$

的解 $U = (u_i; i \geqslant 0)^T$ 存在唯一;方程

$$\begin{cases}\eta(\lambda I - Q) = \mathbf{0} \\ \eta_0 = 1\end{cases} \quad (\lambda > 0) \tag{12.7.18}$$

的解 $\eta = (\eta_i; i \geqslant 0)$ 存在唯一,且

$$\eta_i = u_i \mu_i. \tag{12.7.19}$$

证明 由方程(12.7.17)得递推公式:

$$u_0 = 1.$$

$$u_{i+1} = \frac{(\lambda + a_i + b_i)u_i - a_i u_{i-1}}{b_i}, \quad (i \geqslant 0). \quad (12.7.20)$$

故(12.7.17) 的解 $U(\lambda)$ 存在唯一. 显然有

$$\frac{\mu_{i+1}}{\mu_i} = \frac{b_i}{a_{i+1}}. \quad (12.7.21)$$

即

$$\mu_i b_i = \mu_{i+1} a_{i+1}. \quad (12.7.22)$$

于是直接验证可知 $\eta(\lambda)$ 是(12.7.18)的解. (12.7.18)的解的唯一性是显然的. 从而引理得证.

引理 12.7.3

$$u_i^+ = u_0^+ + \lambda\sum_{k=1}^{i} u_k\mu_k = u_0^+ + \lambda\sum_{k=1}^{i}\eta_k, \quad i > 0. \quad (12.7.23)$$

$$u_i = u_0 + \sum_{k=0}^{i-1} u_k^+(z_{k+1} - z_k), \quad i > 0. \quad (12.7.24)$$

$$u_i = u_0 + u_0^+(z_i - z_0) + \lambda\sum_{k=1}^{i-1} u_k(z_i - z_k)\mu_k, \quad i > 0. \quad (12.7.25)$$

证明 由引理 12.7.1 知

$$u_i^+ - u_{i-1}^+ = \lambda u_i\mu_i, \quad (12.7.26)$$

故由(12.7.19) 有

$$\begin{aligned} u_i^+ &= u_0^+ + \sum_{k=1}^{i}(u_k^+ - u_{k-1}^+) \\ &= u_0^+ + \lambda\sum_{k=1}^{i} u_k\mu_k \\ &= u_0^+ + \lambda\sum_{k=1}^{i}\eta_k, \quad i > 0. \end{aligned} \quad (12.7.27)$$

又

$$u_i = u_0 + \sum_{k=0}^{i-1}(u_{k+1} - u_k) = u_0 + \sum_{k=0}^{i-1} u_k^+(z_{k+1} - z_k), \quad i > 0. \quad (12.7.28)$$

把(12.7.27) 代入(12.7.28) 并整理之得

$$u_i = u_0 + u_0^+(z_i - z_0) + \lambda\sum_{k=1}^{i-1} u_k(z_i - z_k)\mu_k, i > 0.$$

(12.7.29)

于是引理得证.

引理 12.7.4 u_i 和 $u_i^+(i \geqslant 0)$ 严格正. 当 $i \uparrow +\infty$ 时, u_i 和 u_i^+ 严格增加. $u_\infty = \lim_{i\to\infty} u_i < +\infty$ 的充要条件是 $R < +\infty$; $u_\infty^+ = \lim_{i\to\infty} u_i^+ < +\infty$ 的充要条件是 $S < +\infty$.

证明 由 u^+ 的定义和方程(12.7.17)得

$$u_0^+ = \frac{u_1 - u_0}{z_1 - z_0} = b_0(u_1 - u_0) = \lambda + a_0 > 0. \quad (12.7.30)$$

于是由(12.7.25)知 u_i 严格正, 且当 $i \uparrow +\infty$ 时 u_i 严格增加. 由(12.7.24)知 u_i^+ 严格正, 且当 $i \uparrow +\infty$ 时 u_i^+ 严格增加. 所以 $u_\infty = \lim_{i\to\infty} u_i$ 和 $u_\infty^+ = \lim_{i\to\infty} u_i^+$ 存在. 设 $u_\infty < +\infty$, 由 u_i 严格增加 (12.7.25) 得

$$u_i > \lambda u_0 \sum_{k=1}^{i-1}(z_i - z_k)\mu_k. \quad (12.7.31)$$

因此 $R < +\infty$. 反之, 设 $R < +\infty$. 由 u_i 严格增加和(12.7.23)得

$$u_{i+1} - u_i < u_0^+(z_{i+1} - z_i) + \lambda u_i(z_{i+1} - z_i)\sum_{k=1}^{i}\mu_k.$$

(12.7.32)

$$\frac{u_{i+1}}{u_i} - 1 < \frac{u_0^+}{u_0}(z_{i+1} - z_i) + \lambda(z_{i+1} - z_i)\sum_{k=1}^{i}\mu_k.$$

(12.7.33)

上式右边是收敛级数的项, 故 $\sum_{i>0}\log\frac{u_{i+1}}{u_i}$ 收敛, 从而 $u_\infty < +\infty$.

设 $u_\infty^+ < +\infty$, 由(12.7.23)知

$$u_i^+ > \lambda\sum_{k=1}^{i}\mu_k, i > 0. \quad (12.7.34)$$

故

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k < +\infty. \quad (12.7.35)$$

由(12.7.25)有

$$u_i > u_0^+ z_i - u_0^+ z_0. \qquad (12.7.36)$$

故由(12.7.23)得

$$u_i^+ > u_0^+ \lambda \sum_{k=1}^{i} z_k \mu_k - u_0^+ z_0 \lambda \sum_{k=1}^{i} \mu_k, \qquad (12.7.37)$$

$$u_i^+ + u_0^+ z_0 \lambda \sum_{k=1}^{i} \mu_k > u_0^+ \lambda \sum_{k=1}^{i} z_k \mu_k. \qquad (12.7.38)$$

故 $S < +\infty$. 反之,如 $S < +\infty$,由 u_i^+ 的严格增加和(12.7.24)得

$$u_i < u_0 + u_{i-1}^+(z_i - z_0) \leqslant u_0 + u_{i-1}^+ z_i. \qquad (12.7.39)$$

故

$$u_i^+ - u_{i-1}^- = \lambda u_i \mu_i < \lambda u_0 \mu_i + \lambda u_{i-1}^+ z_i \mu_i. \qquad (12.7.40)$$

$$\frac{u_i^+}{u_{i-1}^+} - 1 < \frac{\lambda u_0}{u_0^+} \mu_i + \lambda z_i \mu_i. \qquad (12.7.41)$$

注意 $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} z_k \mu_k < +\infty$ 知 $\sum_{i>0} \log \frac{u_i^+}{u_{i-1}}$ 收敛,从而 $u_\infty^\pm < +\infty$. 引理证毕.

定理 12.7.1 设 Q 是形如(12.7.1)的生灭 Q — 矩阵. 则

(i) B 型 Q 过程唯一的充要条件是 $R = +\infty$;

(ii) F 型 Q 过程唯一的充要条件是 $a_0 = 0, R = +\infty$ 或 $S = +\infty$;

(iii) Q 过程唯一的充要条件是 $a_0 = 0, R = +\infty$ 或 $R = +\infty$, $S = +\infty$.

证明 (i) 由引理 12.7.4 知,方程

$$\begin{cases} (\lambda I - Q)U = \mathbf{0}, \\ \mathbf{0} \leqslant U \leqslant \mathbf{1}, \end{cases} \quad (\lambda > 0) \qquad (12.7.42)$$

只有零解的充要条件是 $R = +\infty$. 于是由定理 10.4.1 知(i)成立.

(ii) 由(12.7.23)知

$$u_\infty^\pm = u_0^+ + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k, \qquad (12.7.43)$$

所以方程

$$\begin{cases} \eta(\lambda I - Q) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{0} \leqslant \eta, \eta\mathbf{1} < +\infty, \end{cases} \quad (\lambda > 0) \qquad (12.7.44)$$

只有零解当且仅当 $u_\infty^+ = +\infty$. 由引理 12.7.4 知 $u_\infty^+ = +\infty$ 当且仅当 $S = +\infty$. 于是由定理 10.4.2,(i) 以及当且仅当 $a_0 = 0$ 时 Q 保守立得(ii) 成立.

(iii) 由(i)、(ii) 以及定理 12.6.1 立得(iii) 成立.

例 12.7.1 设 $a_i = b_i = 1 \quad (i = 0,1,\cdots)$.

这时 $z_n = n + 1, z = +\infty, \mu_n = 1$. 从而 $R = S = +\infty$,故 Q 过程唯一.

例 12.7.2 设 $a_n = b_n = (n+1)2^n, \quad (n = 0,1,\cdots)$.

这时

$$z_n = n + 1,$$

$$\mu_k = \frac{1}{(n+1)2^n},$$

$$z = +\infty.$$

于是

$$R = +\infty, \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \mu_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

所以 B 型 Q 过程唯一,由 $a_0 = 1 > 0$ 及 $S = 1 < +\infty$ 知 F 型 Q 过程非唯一,从而 Q 过程非唯一.

例 12.7.3 设 $a_n = \frac{1}{2} b_n = 2^n \quad (n = 0,1,\cdots)$.

这时

$$z_n = 2(1 - 2^{-(n+1)}),$$

$$z = 2, z - z_i = 2^{-i},$$

$$\mu_n = 1,$$

$$R = 2 < +\infty, \quad S = +\infty,$$

所以 B 型 Q 过程非唯一,F 型 Q 过程唯一,从而 Q 过程非唯一.

例 12.7.4

$$设\ a_n = \frac{1}{2} b_n = 2^{2n}, \quad (n = 0,1,\cdots).$$

这时

$$z_n = 2(1 - 2^{-(n+1)}),$$

$$z = 2, z - z_i = 2^{-i},$$

$$\mu_n = 2^{-n},$$

$$R = \frac{4}{3} < +\infty, S = \frac{5}{3} < +\infty,$$

所以 B 型和 F 型 Q 过程都非唯一，从而 Q 过程非唯一.

例 12.7.5 设 $a_0 = 0, b_0 = 1, a_n = b_n = (n+1)2^n$, $(n = 1, 2, \cdots)$.

这时

$$z_n = n,$$

$$\mu_n = \frac{1}{(n+1)2^n};$$

$$z = +\infty, \quad R = +\infty,$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)2^n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < +\infty.$$

因为 $a_0 = 0$，所以 Q 保守，又 $R = +\infty$. 所以 B 型 Q 过程、F 型 Q 过程和 Q 过程均唯一（此时最小 Q 过程诚实）.

§8 纯生情况

设 $a_0 \geqslant 0, b_0 \geqslant 0, b_i > 0 \quad (i = 1, 2, \cdots)$. 形如

$$\begin{pmatrix} -(a_0 + b_0) & b_0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -b_1 & b_1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -b_2 & b_2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -b_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \qquad (12.8.1)$$

的 $Q-$ 矩阵，叫做纯生 $Q-$ 矩阵，对应的 Q 过程叫做纯生 Q 过程.

定理 12.8.1 设 Q 是纯生 $Q-$ 矩阵，则

(i) F 型 Q 过程唯一；

(ii) B 型 Q 过程和 Q 过程唯一的充要条件均是

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i^{-1} = +\infty. \tag{12.8.2}$$

证明 (i) 由(12.8.1)知,方程

$$\begin{cases} \eta(\lambda I - Q) = \mathbf{0}, \\ 0 \leqslant \eta, \eta\mathbf{1} < +\infty \end{cases}, \quad (\lambda > 0) \tag{12.8.3}$$

仅有零解. 由定理 10.4.2,F 型 Q 过程唯一.

(ii) 由于 Q 至多单非保守($a_0 > 0$ 的情况),注意(i),由定理 12.6.1 知,此时 B 型 Q 过程唯一等价于 Q 过程唯一,而方程$(\lambda I - Q)U = \mathbf{0}$变成

$$\begin{cases} \lambda u_0 + (a_0 + b_0)u_0 - b_0 u_1 = 0, \\ \lambda u_1 + b_1 u_1 - b_1 u_2 = 0, \\ \cdots \\ \lambda u_i + b_i u_i - b_i u_{i+1} = 0, \\ \cdots \end{cases} \tag{12.8.4}$$

于是

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{b_0}{\lambda + a_0 + b_0} u_1, \\ u_2 = \dfrac{\lambda + b_1}{b_1} u_1, \\ u_3 = \dfrac{\lambda + b_2}{b_2} u_2 = (1 + \dfrac{\lambda}{b_2})(1 + \dfrac{\lambda}{b_1}) u_1, \\ \cdots \\ u_{i+1} = \dfrac{\lambda + b_i}{b_i} u_i = (1 + \dfrac{\lambda}{b_i})(1 + \dfrac{\lambda}{b_{i-1}}) \cdots (1 + \dfrac{\lambda}{b_1}) u_1, \\ \cdots \end{cases} \tag{12.8.5}$$

若 $U \neq \mathbf{0}$,由(12.8.5)知 $u_1 \neq 0$(不论 $b_0 > 0$ 或 $b_0 = 0$),且 u_i 关于 i 单调上升,由(12.8.5)知,$\lim\limits_{i\to\infty} u_i < +\infty$ 当且仅当 $\prod\limits_{i=1}^{\infty}(1 + \dfrac{\lambda}{b_i})$ 收敛,即 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i^{-1} < +\infty$. 反之,若 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i^{-1} < +\infty$,则任取 $u_1 > 0$,由

(12.8.5) 可得 $u=(u_i;i\geqslant 0)^T$. 且 $\lim\limits_{i\to\infty}u_i<+\infty$. 因此，$\sum\limits_{i=1}^{\infty}b_i^{-1}<+\infty$ 等价于方程

$$\begin{cases}(\lambda I-Q)U=\mathbf{0}, \\ \mathbf{0}\leqslant U,\end{cases}\quad(\lambda>0)$$

有非零的有界解. 又等价于方程

$$\begin{cases}(\lambda I-Q)U=\mathbf{0}, \\ \mathbf{0}\leqslant U\leqslant \mathbf{1},\end{cases}\quad(\lambda>0)$$

有非零解. 由定理 10.4.1，这又等价于 B 型 Q 过程唯一.

定理证毕.

例 12.8.1 设 $b_i=b>0$, $(i=0,1,\cdots)$.

这时，我们有

$$\sum_{i=1}^{\infty}b_i^{-1}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{b}=+\infty.$$

故 Q 过程唯一. 这个唯一的 Q 过程通常叫做 Poisson 过程.

例 12.8.2 设 $b>0,b_i=ib$, $(i=0,1,\cdots)$.

这时，我们有

$$\sum_{i=1}^{\infty}b_i^{-1}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}=+\infty.$$

故 Q 过程唯一. 这个唯一的 Q 过程通常叫做线性纯生过程或叫做简单纯生过程.

例 12.8.3 设 $b>0,b_i=2^ib$, $(i=0,1,\cdots)$.

这时，我们有

$$\sum_{i=1}^{\infty}b_i^{-1}=\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}=\frac{1}{b}<+\infty.$$

由定理 12.8.1，F 型 Q 过程唯一，B 型 Q 过程和 Q 过程均不唯一.

§9 纯灭情况

设 $b_0\geqslant 0,b_i>0$, $(i=1,2,\cdots)$.

形如

$$\begin{pmatrix} -b_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ b_1 & -b_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & b_2 & -b_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & b_3 & -b_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \qquad (12.9.1)$$

的 $Q-$ 矩阵叫做纯灭 $Q-$ 矩阵，对应的 Q 过程叫做纯灭 Q 过程.

定理 12.9.1 设 Q 是形如(12.9.1)的纯灭 $Q-$ 矩阵，则

(i) B 型 Q 过程唯一.

(ii) F 型 Q 过程和 Q 过程唯一的充要条件均是 $b_0=0$ 或

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(1+b_0)(1+b_1)\cdots(1+b_i)}{b_1 b_2 \cdots b_{i+1}} = +\infty, \qquad (12.9.2)$$

证明 (i) 由(12.9.1)知方程

$$\begin{cases} (\lambda I - Q)U = 0, \\ 0 \leqslant U \leqslant 1, \end{cases} \quad (\lambda > 0) \qquad (12.9.3)$$

仅有零解，由定理 10.4.1 知，B 型 Q 过程唯一.

(ii) 由于 Q 至多单非保守($b_0>0$ 的情形)，注意(i)，由定理 12.6.1 知，此时 F 型 Q 过程唯一等价于 Q 过程唯一，而方程 $\eta(\lambda I - Q)=0 \quad (\lambda>0)$ 变成

$$\eta_0(\lambda) = \frac{\lambda+b_0}{b_1},$$

$$\eta_i(\lambda) = \frac{(\lambda+b_0)(\lambda+b_1)\cdots(\lambda+b_i)}{b_1\cdots b_{i+1}},$$

于是

$$\sum_{i=0}^{\infty}\eta_i(1) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(1+b_0)(1+b_1)\cdots(1+b_i)}{b_1\cdots b_{i+1}}.$$

注意 $\eta(1)1<+\infty$ 等价于 $\eta(\lambda)1<+\infty \quad (\forall\ \lambda>0)$，因此(12.9.2)成立等价于方程

$$\begin{cases} \eta(\lambda I - Q) = 0, \\ 0 \leqslant \eta, \eta 1 < +\infty, \end{cases} \quad (\lambda > 0)$$

有非零解. 由(i)，$b_0=0$ 等价于最小 Q 过程是诚实的. 由定理 10.4.2，(ii) 成立. 定理证毕.

例 12.9.1 设 $b_i = b > 0$, $(i = 0,1,\cdots)$.

这时,我们有

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(1+b_0)(1+b_1)\cdots(1+b_i)}{b_1 b_2 \cdots b_{i+1}}$$

$$\geqslant \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{b_{i+1}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{b} = +\infty.$$

于是 Q 过程唯一.

例 12.9.2 设 $b > 0, b_i = ib$, $(i = 0,1,\cdots)$.

这时,我们有

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(1+b_0)(1+b_1)\cdots(1+b_i)}{b_1 b_2 \cdots b_{i+1}}$$

$$\geqslant \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{b_{i+1}} = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = +\infty.$$

故 Q 过程唯一. 这个唯一的 Q 过程通常叫做线性纯灭过程,或叫做简单纯灭过程.

例 12.9.3 设 $b_i = 2^{2i}$, $(i, = 0,1,2,\cdots)$.

这时,我们有

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(1+b_0)(1+b_1)\cdots(1+b_i)}{b_1 b_2 \cdots b_{i+1}}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} (1+b_0)(1+\frac{1}{b_1})\cdots(1+\frac{1}{b_i}) \frac{1}{b_{i+1}}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} (1+1)(1+\frac{1}{2^2})(1+\frac{1}{2^4})\cdots(1+\frac{1}{2^{2i}}) \frac{1}{2^{2(i+1)}}$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{\infty} 2^{i+1} \frac{1}{2^{2(i+1)}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} = 1 < +\infty.$$

于是由定理 12.9.1, B 型 Q 过程唯一, F 型 Q 过程和 Q 过程均不唯一.

§10 非保守分枝情况

定义 12.10.1 若 $E = \{0,1,2,\cdots\}$,

$$q_{ij}=\begin{cases} iq_{1,j-i+1}, & j\geqslant i-1, \\ 0, & j<i-1, \end{cases} (i,j\in E), \quad (12.10.1)$$

则称 Q 为分枝 Q — 矩阵.

显然,对于分枝 Q — 矩阵,其非保守的充要条件是

$$q_1>\sum_{j\neq 1}q_{1j}. \quad (12.10.2)$$

定理 12.10.1 对于任给的一个非保守分枝 Q — 矩阵,则

(i) B 型 Q 过程唯一.

(ii) F 型 Q 过程唯一(此结论对于保守情况也成立).

证明 (i) 分两种情况证明

(1) $\sum_{j\neq 1}q_{1j}=0.$

这时方程

$$\begin{cases} (\lambda I-Q)U=\mathbf{0}, \\ \mathbf{0}\leqslant U\leqslant \mathbf{1}. \end{cases} \quad (\lambda>0) \quad (12.10.3)$$

成为

$$\begin{cases} \lambda u_0=0, \\ (\lambda+q_1)u_1=0, \\ (\lambda+2q_1)u_2=0, \\ \cdots \\ 0\leqslant u_i\leqslant 1, \quad (i\in E). \end{cases} \quad (12.10.4)$$

于是 $U=\mathbf{0}$,即(12.10.3)只有零解,此时 B 型 Q 过程唯一.

(2) $\sum_{j\neq 1}q_{1j}>0.$ (12.10.5)

令

$$a=\frac{q_1}{\sum_{j\neq 1}q_{1j}}. \quad (12.10.6)$$

由(12.10.2)及(12.10.5)知

$$1<a<+\infty. \quad (12.10.7)$$

这时方程(12.10.3)中的第一个式子成为

$$\begin{cases}\lambda u_0 = 0, \\ -q_{10} + (\lambda + q_1)u_1 - q_{12}u_2 - q_{13}u_3 - \cdots = 0, \\ -2q_{10}u_1 + (\lambda + 2q_1)u_2 - 2q_{12}u_3 - \cdots = 0, \\ -3q_{10}u_2 + (\lambda + 3q_1)u_3 - \cdots = 0, \\ \cdots \end{cases}$$

(12.10.8)

于是 $u_0 = 0$. 设 $\{u_n\}$ 是(12.10.8)的非零解. 令 $u_1, u_2, \cdots$ 中第一个大于零者为 $u_{k_1} > 0$，由(12.10.7)和(12.10.8)知，必存在 $n > k_1$ 使

$$u_n \geqslant \frac{a(\lambda + k_1 q_1)}{k_1 q_1} u_{k_1}. \tag{12.10.9}$$

令

$$k_2 = \min\{n; n > k_1, u_n \geqslant \frac{a(\lambda + k_1 q_1)}{k_1 q_1} u_{k_1}\}. \tag{12.10.10}$$

注意(12.10.7)、(12.10.8)和 $u_{k_2} - 1 < u_{k_2}$ 知，存在 $n > k_2$，使

$$u_n \geqslant \frac{a(\lambda + k_2 q_1)}{k_2 q_1} u_{k_2}. \tag{12.10.11}$$

令

$$k_3 = \min\{n; n > k_2, u_n \geqslant \frac{a(\lambda + k_2 q_1)}{k_2 q_1} u_{k_2}\}. \tag{12.10.12}$$

如此继续做下去，我们就得到一串严格上升的正整数序列 $\{k_n\}$，且

$$\begin{aligned} u_{k_{m+1}} &\geqslant \frac{a(\lambda + k_m q_1)}{k_m q_1} u_{k_m} \\ &\geqslant a^m \left(\frac{\lambda + k_m q_1}{k_m q_1}\right)\left(\frac{\lambda + k_{m-1} q_1}{k_{m-1} q_1}\right)\cdots\left(\frac{\lambda + k_1 q_1}{k_1 q_1}\right) u_{k_1} \\ &\geqslant u_{k_1} a^m \uparrow +\infty, \quad (n \to +\infty). \end{aligned} \tag{12.10.13}$$

故 $\{u_{k_m}\}$ 无界. 从而 $\{u_m\}$ 无界. 这表示方程(12.10.8)没有非负有界的非零解. 即方程(12.10.3)只有零解，从而 B 型 Q 过程唯一.

(ii) 此时方程

$$\begin{cases}\eta(\lambda I - Q) = \mathbf{0}, \\ 0 \leqslant \eta, \eta \mathbf{1} < +\infty, \end{cases} \quad (\lambda > 0) \tag{12.10.14}$$

成为

$$
\begin{cases}
\lambda\eta_0 = q_{10}\eta_1, \\
\lambda\eta_1 = -q_1\eta_1 + 2q_{10}\eta_2, \\
\lambda\eta_2 = q_{12}\eta_1 - 2q_1\eta_2 + 3q_{10}\eta_3, \\
\qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\
\lambda\eta_n = q_{1n}\eta_1 + 2q_{1,n-1}\eta_2 + \cdots - nq_1\eta_n + (n+1)q_{10}\eta_{n+1}, \\
0 \leqslant \eta_j, \sum_{j\in E}\eta_j < +\infty.
\end{cases}
$$

(12.10.15)

若 $q_{10} = 0$，则(12.10.15) 显然只有零解，于是由定理 10.4.2 知，F 型 Q 过程唯一.

若 $q_{10} \neq 0$，则由(12.10.15) 得

$$
\begin{aligned}
\eta_{k+1} = \frac{1}{(k+1)q_{10}}(kq_1\eta_k - (k-1)q_{12}\eta_{k-1} \\
- (k-2)q_{13}\eta_{k-2} - \cdots - q_{1k}\eta_1 + \lambda\eta_k),
\end{aligned}
$$

$$
\eta_k = \frac{1}{kq_{10}}((k-1)q_1\eta_{k-1} - (k-2)q_{12}\eta_{k-2} - \cdots - q_{1k-1}\eta_1 + \lambda\eta_{k-1}),
$$

$$
\eta_{k-1} = \frac{1}{(k-1)q_{10}}((k-2)q_1\eta_{k-2} - \cdots - q_{1,k-2}\eta_1 + \lambda\eta_{k-2}),
$$

$$
\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots
$$

$$
\eta_2 = \frac{1}{2q_{10}}(q_1\eta_1 + \lambda\eta_1).
$$

因此，若 $\lambda = 2q_{10} > 0$，我们有

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=2}^{k+1}\eta_j = &\frac{\lambda}{q_{10}}\sum_{j=1}^{k}\frac{\eta_j}{j+1} + \frac{1}{q_{10}}(\frac{k}{k+1}q_1\eta_k \\
&+ (k-1)(\frac{q_1}{k} - \frac{q_{12}}{k+1})\eta_{k-1} \\
&+ (k-2)(\frac{q_1}{k-1} - \frac{q_{12}}{k} - \frac{q_{13}}{k+1})\eta_{k-2} + \cdots \\
&+ 1(\frac{q_1}{2} - \frac{q_{12}}{3} - \cdots - \frac{q_{1k}}{k+1})\eta_1) \\
\geqslant &\frac{\lambda}{q_{10}}\sum_{j=1}^{k}\frac{\eta_j}{j+1} + \frac{1}{q_{10}}(\frac{k}{k+1}q_1\eta_k + (k-1)(\frac{q_1 - q_{12}}{k})\eta_{k-1}
\end{aligned}
$$

$$+(k-2)\left(\frac{q_1-q_{12}-q_{13}}{k-1}\right)\eta_{k-2}+\cdots$$

$$+1\left(\frac{q_1-q_{12}-\cdots-q_{1k}}{2}\right)\eta_1)$$

$$\geqslant\frac{\lambda}{q_{10}}\sum_{j=1}^{k}\frac{\eta_j}{j+1}+\frac{1}{q_{10}}\left(\frac{k}{k+1}q_{10}\eta_k\right.$$

$$\left.+\frac{k-1}{k}q_{10}\eta_{k-1}+\cdots+\frac{1}{2}q_{10}\eta_1\right)$$

$$=2\sum_{j=1}^{k}\frac{\eta_j}{j+1}+\sum_{j=1}^{k}\frac{j\eta_j}{j+1}$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\frac{\eta_j}{j-1}+\sum_{j=1}^{k}\eta_j. \tag{12.10.16}$$

从而有

$$\sum_{j=1}^{\infty}\eta_j\geqslant\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\eta_j}{j+1}+\sum_{j=1}^{\infty}\eta_j.$$

于是，由 $\eta_j\geqslant 0\quad(j=0,1,\cdots)$ 和 $\sum_{j=1}^{\infty}\eta_j<+\infty$ 得 $\eta_j=0\quad(j=1,2,\cdots)$. 再由(12.10.15)第一式得 $\eta_0=0$. 从而方程(12.10.14)对于 $\lambda=2q_{10}>0$ 只有零解，因此，对一切 $\lambda>0$ 也只有零解，由定理10.4.2，F 型 Q 过程唯一. 定理证毕.

引理 12.10.1 对于非保守的分枝 Q－矩阵，最小 Q 过程 $(f_{ij}(t))$ 有如下性质：

$$\left(\sum_{j\in E}f_{1j}(t)\right)'=\sum_{j\in E}f_{ij}(t),\quad(i\in E,t\geqslant 0). \tag{12.10.17}$$

证明 由 $(f_{ij}(t))$ 是 F 型 Q 过程知

$$f_{ij}(t)=\sum_{k\in E}f_{ik}(t)q_{kj}. \tag{12.10.18}$$

令

$$F_i(t,x)=\sum_{j\in E}f_{ij}(t)x^j,\quad(t\geqslant 0,|x|\leqslant 1). \tag{12.10.19}$$

由于 $f_{ij}(t)$ 连续且

$$f'_{ij}(t) \leqslant 2q_i,$$

于是当 $|x| < 1$ 时

$$\sum_{j\in E} |f_{ij}(t)x^j| \leqslant \sum_{j\in E} 2q_i |x|^j = 2q_i \sum_{j\in E} |x|^j < +\infty. \tag{12.10.20}$$

从而

$$\frac{\partial F_i(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\sum_{j\in E} f_{ij}(t)x^j = \sum_{j\in E} f'_{ij}(t)x^j, \quad |x| < 1. \tag{12.10.21}$$

由(12.10.18)、(12.10.21) 得

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_i(t,x)}{\partial t} &= \sum_{j\in E}\Big(\sum_{k\in E} f_{ik}(t)q_{kj}\Big)x^j \\ &= \sum_{j\in E}\Big(\sum_{k\neq j} f_{ik}(t)q_{kj} - f_{ij}(t)q_j\Big)x^j, \ |x| < 1. \end{aligned}\tag{12.10.22}$$

由 $q_j = jq_1$ 得

$$\begin{aligned}\sum_{j\in E} f_{ij}(t)q_j x^j &= \sum_{j\in E} f_{ij}(t) jq_1 |x|^j \\ &\leqslant q_1 \sum_{j\in E} j|x|^j < +\infty, \quad |x| < 1. \end{aligned}\tag{12.10.23}$$

由(12.10.20)、(12.10.21)、(12.10.22)和(12.10.23) 得

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_i(t,x)}{\partial t} &= \sum_{j\in E}\sum_{k\neq j} f_{ik}(t)q_{kj}x^j - \sum_{j\in E} f_{ij}(t)q_j x^j \\ &= \sum_{k\in E}\sum_{j\neq k} f_{ik}(t)q_{kj}x^j - \sum_{k\in E} f_{ik}(t)q_{kk}x^k \\ &= \sum_{k\in E}\sum_{j\in E} f_{ik}(t)q_{kj}x^j \\ &= \sum_{k\in E} f_{ik}(t)\sum_{j\geqslant k-1} kq_{1,j-k+1}x^j \\ &= \sum_{k\in E} kf_{ik}(t)x^{k-1}\sum_{j\geqslant k-1} q_{1,j-k+1}x^{j-k+1} \\ &= \sum_{k\in E} kf_{ik}(t)x^{k-1}\sum_{j\in E} q_{1j}x^j \\ &= \sum_{k\in E} kf_{ik}(t)x^{k-1}f(x)\end{aligned}$$

$$= f(x) \sum_{k \in E} k f_{ik}(t) x^{k-1}, \quad |x| < 1. \tag{12.10.24}$$

其中

$$f(x) = \sum_{j \in E} q_{1j} x^j, \quad |x| < 1. \tag{12.10.25}$$

由于 $F_i(t,x) = \sum_{k \in E} f_{ik}(t) x^k$ 作为 x 的幂级数在$[-1,1]$上绝对收敛，故

$$\frac{\partial F_i(t,x)}{\partial x} = \sum_{k \in E} k f_{ik}(t) x^{k-1}, |x| \leqslant 1. \tag{12.10.26}$$

由(12.10.24)和(12.10.26)得

$$\frac{\partial F_i(t,x)}{\partial t} = f(x) \frac{\partial F_i(t,x)}{\partial x}, (i \in E, |x| < 1). \tag{12.10.27}$$

由于 $f_{ij}(0) = \delta_{ij}$，所以

$$F_i(0,x) = x^i. \tag{12.10.28}$$

由(12.10.27)和(12.10.28)得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_i(t,x)}{\partial t} = f(x) \dfrac{\partial F_i(t,x)}{\partial x}, \\ F_i(0,x) = x^i, \quad (|x| < 1, t \geqslant 0). \end{cases} \tag{12.10.29}$$

由于 Q 非保守，所以 $q_1 \neq 0$，从而

$$f(x) \not\equiv 0. \tag{12.10.30}$$

以下分两种情况讨论：

(i) $q_{10} = 0$.

这时 $f(0) = 0$，而

$$f'(0) = \sum_{k \in E} k q_{1k} x^{k-1} |_{x=0} = q_{11} = -q_1 < 0. \tag{12.10.31}$$

因此，存在常数 $0 < b < 1$，使

$$f(x) < 0, \quad (0 < x \leqslant b). \tag{12.10.32}$$

在区域 $t \geqslant 0, 0 < x \leqslant b$ 中解方程(12.10.29)得

$$W(x) + t = W(F_i^{\frac{1}{i}}(t,x)), \quad (t \geqslant 0, 0 < x \leqslant b). \tag{12.10.33}$$

其中

$$W(x)=\int_b^x \frac{ds}{f(s)}, \qquad (0<x\leqslant b). \qquad (12.10.34)$$

由(12.10.32)知,$W(x)$是x的单调增函数,由此可知在区域$t\geqslant 0$,$0<x\leqslant b$内唯一决定$F_i(t,x)$,且

$$F_i(t,x)=(F_1(t,x))^i, \quad t\geqslant 0,0<x\leqslant b. \quad (12.10.35)$$

即

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_{ij}(t)x^j=\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{\sum_{s=1}^{i} j_s=j}\prod_{s=1}^{i} f_{1j_s}(t)\Big)x^j, t\geqslant 0,0<x\leqslant b.$$

$$(12.10.36)$$

由于上式两端的幂级数的系数都非负,当$x\downarrow 0$时,(12.10.36)成为

$$f_{i0}(t)=(f_{10}(t))^i. \qquad (12.10.37)$$

由(12.10.35)、(12.10.36)、(12.10.37)以及$F_i(t,x)$和$F_1(t,x)$都是幂级数得

$$F_i(t,x)=(F_1(t,x))^i, t\geqslant 0,|x|\leqslant b. \quad (12.10.38)$$

即

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_{ij}(t)x^j=\sum_{j=0}^{\infty}\Big\{\sum_{\sum_{s=1}^{i} j_s=j}\prod_{s=1}^{i} f_{1j_s}(t)\Big\}x^j, t\geqslant 0,|x|\leqslant b.$$

$$(12.10.39)$$

由于上式两端对任意t可在$|x|<b$内逐项对x求任意阶导数,于是有

$$j!f_{ij}(t)=\frac{\partial^j}{\partial x^j}\Big(\sum_{j\in E} f_{ij}(t)x^j\Big)\Big|_{x=0}$$

$$=\frac{\partial^j}{\partial x^j}\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{\sum_{s=1}^{i} j_s=j}\prod_{s=1}^{i} f_{1j_s}(t)\Big)x^j\Big|_{x=0}$$

$$=j!\sum_{\sum_{s=1}^{i} j_s=j}\prod_{s=1}^{i} f_{1j_s}(t). \qquad (12.10.40)$$

再注意 $\sum_{j\in E}|f_{ij}(t)| = \sum_{j=0}^{\infty}f_{ij}(t) \leqslant 1.$

即

$$\sum_{j=0}^{\infty}f_{ij}(t)x^j = \sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{\sum_{s=1}^{i}j_s=j}\prod_{s=1}^{i}f_{1j_s}(t)\Big)x^j, t \geqslant 0, |x| < 1.$$

(12.10.41)

即

$$F_i(t,x) = F_1^i(t,x), t \geqslant 0, |x| \leqslant 1. \qquad (12.10.42)$$

于是若令 $x = 1$ 立得

$$\sum_{j=0}^{\infty}f_{ij}(t) = \Big(\sum_{j=0}^{\infty}f_{1j}(t)\Big)^i, \quad (i \in E). \qquad (12.10.43)$$

(ii) $q_{10} \neq 0$.

令

$$y = f(x). \qquad (12.10.44)$$

于是

$$y|_{x=0} = f(0) = q_{10} > 0. \qquad (12.10.45)$$

$$y'|_{x=0} = f'(x)|_{x=0} = \sum_{k\in E}kq_{1k}x^{k-1}|_{x=0}$$

$$= q_{11} = -q_1 < 0. \qquad (12.10.46)$$

$$y|_{x=1} = f(1) = \sum_{k\in E}q_{1k} < 0. \qquad (12.10.47)$$

$$y'' = f''(x)$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)q_{1k}x^{k-2} \geqslant 0, 0 \leqslant x \leqslant 1. \qquad (12.10.48)$$

由(12.10.48)知 $y = f(x)$ 在$[0,1]$之间是条斜率为负的直线或是凸函数. 于是由(12.10.45)及(12.10.47)知，在$(0,1)$之间 $y = f(x)$ 恰好有一个零点 $0 < \xi < 1$，且

$$y = f(x) > 0, \quad (0 < x < \xi). \qquad (12.10.49)$$

在区域 $t \geqslant 0, 0 < x < \xi$ 由解方程(12.10.29)得

$$g(x) + t = g(F_1^{\frac{1}{i}}(t,x)), (t \geqslant 0, 0 < x < \xi),$$

(12.10.50)

其中 $g(x)=\int_0^x \frac{ds}{f(s)}$.

仿(i)中讨论,易证.

$$(\sum_{j\in E} f_{1j}(t))^i=\sum_{j\in E} f_{ij}(t),\quad (t\geqslant 0).\qquad (12.10.51)$$

联合(12.10.43)和(12.10.51)立得(12.10.17).

到此,引理证毕.

定理 12.10.2 若 Q 是非保守分枝 Q－矩阵,则 Q 过程不唯一.

证明 显然,Q 非保守的充要条件是 $\sum_{j\in E} q_{1j}<0$. 从而当 Q 非保守时,1 为一个非保守状态,故

$$\sum_{j\in E} f_{1j}(t)<1,\quad (t>0).\qquad (12.10.52)$$

由引理 12.10.1,得

$$\sum_{j\in E} f_{ij}(t)=(\sum_{j\in E} f_{1j}(t))^i\downarrow 0,\quad (i\uparrow +\infty),(t>0).\qquad (12.10.53)$$

所以

$$\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)=\lambda\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\sum_{j\in E} f_{ij}(t)dt$$
$$\downarrow\lambda\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}0dt=0,\quad (i\uparrow +\infty).\qquad (12.10.54)$$

从而

$$\inf_{i\in E}\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)=0,\quad (\lambda>0).\qquad (12.10.55)$$

即(H)条件不成立,由定理 10.1.1,Q 过程不唯一.

定理得证.

§11 广生灭情况及粒子系统的四个模型

设 $E=\{0,1,2,\cdots\}$,称 $Q=(q_{ij};i,j\in E)$ 是广生灭 Q－矩阵,如果 Q 保守,而且

$$\begin{cases} q_{ij} = 0, & j > i+1; \\ q_{i,i+1} > 0. \end{cases} \tag{12.11.1}$$

定理 12.11.1 设 Q 是广生灭 $Q-$ 矩阵,则 Q 过程唯一的充要条件是

$$R \equiv \sum_{i=0}^{\infty} m_i = +\infty. \tag{12.11.2}$$

其中

$$\begin{cases} m_k = \sum_{i=0}^{k} F_k^{(i)}/q_{i,i+1}, & k \in E; \\ F_k^{(k)} = 1, F_k^{(i)} = \sum_{j=i}^{k-1} q_k^{(j)} F_j^{(i)}/q_{k,k+1}, & 0 \leqslant i < k, k \in E; \\ q_k^{(i)} = \sum_{j=0}^{i} q_{kj}, & 0 \leqslant i < k, k \in E. \end{cases}$$

(12.11.3)

证明 分三步完成证明,先证

(a) 对每 $\lambda > 0$,方程

$$\begin{cases} (\lambda I - Q)U = \mathbf{0} \\ u_0 = 1 \end{cases}, \tag{12.11.4}$$

的每一个解 $U = (u_i; i \in E)$ 都是单调上升的.

事实上,方程(12.11.4)的解 U 就是

$$u_0 = 1, u_{i+1} = ((\lambda + q_i)u_i - \sum_{j=0}^{i-1} q_{ij}u_j)/q_{i,i+1}, \quad (i \geqslant 0),$$

(12.11.5)

从而有

$$u_{i+1} - u_i = (\sum_{j=0}^{i-1} q_{ij}(u_i - u_j) + \lambda u_i)/q_{i,i+1}, \quad i \geqslant 0.$$

(12.11.6)

然后由归纳法立得上述断言.

(b) 试证上述的 U 满足

$$\lambda u_0 m_k \leqslant u_{k+1} - u_k \leqslant (u_1 - u_0)F_k^{(0)} + \lambda u_k m_k, k \geqslant 0.$$

(12.11.7)

当 $k=0$ 时，由于

$$u_1 - u_0 = \lambda u_0 / q_{01} = \lambda u_0 m_0.$$

可见(12.11.7) 式成立. 假设对 $k < n$ 已真，那么，利用恒等式

$$\sum_{i=0}^{k-1} q_{ki}(u_k - u_i) = \sum_{i=0}^{k-1} q_k^{(i)}(u_{i+1} - u_i), k \geqslant 0. \quad (12.11.8)$$

(12.11.6) 和(12.11.3)，以及(a) 便得

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \Big(\sum_{k=0}^{n-1} q_n^{(k)}(u_{k+1} - u_k) + \lambda u_n\Big)/q_{n,n+1} \\
&\leqslant \Big(\sum_{k=0}^{n-1} q_n^{(k)}((u_1 - u_0)F_k^{(0)} + \lambda u_k m_k) + \lambda u_n\Big)/q_{n,n+1} \\
&\leqslant \Big((u_1 - u_0)\sum_{k=0}^{n-1} q_n^{(k)} F_k^{(0)} + \lambda u_n\Big(\sum_{k=0}^{n-1} q_n^{(k)} m_k + 1\Big)\Big)/q_{n,n+1} \\
&= (u_1 - u_0)F_n^{(0)} \\
&\quad + \lambda u_n\Big(\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=j}^{n-1} q_n^{(k)} F_k^{(j)}/q_{j,j+1} + F_n^{(n)}\Big)/q_{n,n+1} \\
&= (u_1 - u_0)F_n^{(0)} \\
&\quad + \lambda u_n\Big\{\sum_{j=0}^{n-1}\Big(\sum_{k=j}^{n-1} q_n^{(k)} F_k^{(j)}/q_{n,n+1}\Big)/q_{j,j+1} + F_n^{(n)}/q_{n,n+1}\Big\} \\
&= (u_1 - u_0)F_n^{(0)} + \lambda u_n\Big(\sum_{j=0}^{n-1} F_n^{(j)}/q_{j,j+1} + F_n^{(n)}/q_{n,n+1}\Big) \\
&= (u_1 - u_0)F_n^{(0)} + \lambda u_n m_n
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &\geqslant \Big(\sum_{k=0}^{n-1} q_n^{(k)}(\lambda u_0 m_k) + \lambda u_n\Big)/q_{n,n+1} \\
&\geqslant \lambda u_0\Big(\sum_{k=0}^{n-1} q_n^{(k)} m_k + 1\Big)/q_{n,n+1} = \lambda u_0 m_n.
\end{aligned}$$

于是由归纳法得(12.11.7).

(c) 试征：Q 过程唯一当且仅当 $R = \infty$.

首先注意，Q 过程唯一当且仅当方程(12.11.4) 没有有界解. 这样，我们只需证明后者等价于 $R = +\infty$.

今设 $R < +\infty$，而 u 是由(12.11.5) 所构造的解. 由(12.11.7)

和(12.11.3)得

$$0 \leqslant u_{k+1}u_k^{-1} - 1 \leqslant (u_1 - u_0)u_k^{-1}F_k^{(0)} + \lambda m_k$$
$$\leqslant (u_1 - u_0)(F_k^{(0)}/q_{01}) + \lambda m_k$$
$$\leqslant (\lambda + (u_1 - u_0)q_{01})m_k.$$

由于 $\sum_{i=0}^{\infty} m_i = R < +\infty$,可见对于足够大的 k,有

$$u_{k+1}u_k^{-1} - 1 < 1/2,$$

进而

$$\log(u_{k+1}u_k^{-1}) \leqslant 2 \cdot (u_{k+1}u_k^{-1} - 1),$$

因而存在 $C < +\infty$ 使

$$\log u_k = \sum_{i=0}^{k-1} \log(u_{i+1}u_i^{-1}) \leqslant CR < +\infty,$$

故 $u_k \uparrow u_\infty < +\infty$. 即方程(12.11.4)有有界解.

反之,若(12.11.4)有有界解,仍记作 U,那么由(12.11.7)得

$$R = \sum_{i=0}^{\infty} m_i \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k)/\lambda \leqslant \lim_{n\to\infty} u_n/\lambda = u_\infty < +\infty.$$

定理证毕.

在本节余下的部分,我们要给出交互作用粒子系统的四个例子,并证明存在唯一的 Q 过程. 为此,我们将使用化高维为一维的思想,先给出 Q 过程唯一性的下列充分条件.

定理 12.11.2 设 E 为任一可数集. $Q = (q(x,y): x,y \in E)$ 为保守 Q — 矩阵. 再设存在 E 的可数划分 $\{E_k\}_0^\infty$(即 $E_k \cap E_m = \varnothing \quad (k \neq m)$, $E = \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k$),满足条件:

$$\text{若 } x \in E_k, q(x,y) > 0, \text{则} \quad y \in \sum_{l=0}^{k+1} E_l, \qquad (k = 0,1,\cdots). \tag{12.11.9}$$

$$C_k \triangleq \sup\{q(x) = \sum_y q(x,y); x \in E_k\} < +\infty, \quad (k = 0,1,\cdots). \tag{12.11.10}$$

令 $Z_+ = \{0,1,2,\cdots\}$,定义保守 Q — 矩阵 $Q' = (q_{ij}; i,j \in Z_+)$ 如下

$$
q_{ij}=\begin{cases}\sup\{\sum_{y\in E_j}q(x,y);x\in E_i\}, & j=i+1;\\ \inf\{\sum_{y\in E_j}q(x,y);x\in E_i\}, & j<i;\\ 0, & i\neq j\text{的其它情形},\\ -\sum_{k\in Z_+-\{i\}}q_{ik} & j=i.\end{cases}
$$

(12.11.11)

如果 Q' 过程唯一，则 Q 过程也唯一.

证明 由于 Q 保守从而一切 Q 过程均是 B 型的，由定理10,4,1，我们只要证明对每个 $\lambda>0$，方程

$$
\begin{cases}(\lambda+q(x))u(x)=\sum_{y\neq x}q(x,y)u(y);\\ 0\leqslant u(x)\leqslant 1,\end{cases}\qquad (x\in E)
$$

(12.11.12)

只有零解.

反设对某 $\lambda>0$，方程(12.11.12)有非零解 $\{u(x);x\in E\}$. 令

$$
u_k=\sup\{u(x);x\in E_k\},\quad k=0,1,\cdots.\quad (12.11.13)
$$

则 $(u_k;k\geqslant 0)$ 非零，对每 $k\geqslant 0$，选 $\varepsilon_k>0$ 和 $x^{(k)}\in E_k$ 使

$$
\varepsilon_k(\lambda+C_k)<\lambda/2,\quad u(x^{(k)})>(1-\varepsilon_k)u_k.\ (12.11.14)
$$

用 $x^{(k)}$ 代替(12.11.12)中的 x，并使用(12.11.9)，(12.11.10)，(12.11.13)和(12.11.14)得

$$
\begin{aligned}
&\lambda u_k/2+\Big(\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{y\in E_j}q(x^{(k)},y)+\sum_{y\in E_k-\{x^{(k)}\}}q(x^{(k)},y)+\sum_{y\in E_{k+1}}q(x^{(k)},y)\Big)u_k\\
&\leqslant u_k(\lambda-\varepsilon_k(\lambda+C_k))+q(x^{(k)})u_k\\
&\leqslant(\lambda+q(x^{(k)}))(1-\varepsilon_k)u_k\\
&\leqslant(\lambda+q(x^{(k)}))u(x^{(k)})\\
&=\sum_{y\neq x^{(k)}}q(x^{(k)},y)u(y)
\end{aligned}
$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{y\in E_j} q(x^{(k)},y)u_j + \sum_{y\in E_k-\{x^{(k)}\}} q(x^{(k)},y)u_k + \sum_{y\in E_{k+1}} q(x^{(k)},y)u_{k+1}.$$

即

$$\lambda u_k/2 + \sum_{j=0}^{k-1}\Big(\sum_{y\in E_j} q(x^{(k)},y)\Big)(u_k - u_j) \leqslant \sum_{y\in E_{k+1}} q(x^{(k)},y)(u_{k+1} - u_k). \tag{12.11.15}$$

由于 $u_k \geqslant 0$, $\sum_{y\in E_{k+1}} q(x^{(k)},y) \geqslant 0$,故由此式及归纳法易证 $u_k \uparrow$, $(k \uparrow \infty)$. 因而,由上式及(12.11.11) 立得

$$\lambda u_k/2 + \sum_{j=0}^{k-1} q_{kj}(u_k - u_j) \leqslant q_{k,k+1}(u_{k+1} - u_k)$$

或

$$(\lambda/2 + q_k)u_k \leqslant \sum_{j\neq k} q_{kj}u_j, \quad 0 \leqslant u_k \leqslant 1, k \geqslant 0. \tag{12.11.16}$$

令

$$\begin{cases} u_k^0 = 1, \quad k \geqslant 0; \\ u_k^{n+1} = \sum_{j\neq k} \dfrac{q_{kj}}{\lambda/2 + q_k} u_j^n, \quad n \geqslant 0. \end{cases} \tag{12.11.17}$$

由定理 4.2.1,$u^n = (u_k^n; k \geqslant 0) \downarrow \bar{X}(\lambda/2) = (u_k^\infty; k \geqslant 0)$,$(n \uparrow \infty)$ 且 $\bar{X}(\lambda/2)$ 是方程

$$\begin{cases} (\dfrac{\lambda}{2}I - Q')U' = \mathbf{0}; \\ \mathbf{0} \leqslant U' \leqslant 1. \end{cases} \tag{12.11.18}$$

的最大解. 由(12.11.16)、(12.11.17) 及归纳法知:

$$U^0 \geqslant U = (u_k; k \geqslant 0);$$

$$U^{n+1} \geqslant U; \quad n \geqslant 0.$$

从而 $\bar{X}(\lambda/2) \geqslant U$,由 $U \neq \mathbf{0}$ 得 $\bar{X}(\lambda/2) \neq \mathbf{0}$,从而方程(12.11.18)有非零解,与 Q' 过程唯一相矛盾!从而 Q 过程唯一.

注 由于定理12.11.2中 Q 是保守的,且 Q 过程唯一,从而最小 Q 过程是诚实的.

在以下四个模型中,(见陈木法[2]) 总设 S 为有限集,状态空间为 $E=\mathbb{Z}_+^S$,其中 $\mathbb{Z}_+=\{0,1,2,\cdots\}$. 令

$$|x|=\sum_{u\in S}x(u),\quad x\in E. \qquad (12.11.19)$$

若取 $E_k=\{x\in E;|x|=k\}$,$k\geqslant 0$,那么,使用定理 12.11.2 和定理 12.11.1,不难验证相应的 Q 过程都是唯一的(即存在唯一的 Q 过程且是诚实的).

(i) 单物种自催化模型:



$$A+X\xrightarrow{\lambda_1}2X,\quad X+X\xrightarrow{\lambda_2}B.$$

这里有两个反应式. 第一个反应式说的是:在参数 λ_1 之下,一个 X 粒子与一个 A 粒子生成一个新的 X 粒子;第二个反应式说的是:在参数 λ_2 之下,每两个 X 粒子相遇,两个都死去而产生一个 B 粒子. 我们所关心的是 X 粒子的个数. A 和 B 是参加反应的反应物,在反应中保证持续地供给.

上面是在每一个小盒子 $u\in S$ 里的反应情况. 然而,小盒子之间可以有相互扩散. 例如说,X 粒子以 $P(u,v)$ 的速率从 u 跑到 v.

现在,已经不难写出这个模型的 Q — 矩阵:

$$q(x,y)=\begin{cases}\lambda_1 a(u)x(u), & y=x+e_u;\\ \lambda_2\dbinom{x(u)}{2}, & y=x-2e_u;\\ x(u)p(u,v), & y=x-e_u+e_v,(u\neq v);\\ 0, & y\neq x \text{ 的其它情形};\\ -\sum\limits_{y\neq x}q(x,y), & y=x.\end{cases}$$

(12.11.20)

此处 $\lambda_1,\lambda_2,a(u)$ 为正常数;$x(u)$ 表在 $u\in S$ 中 X 的粒子数;e_u 表在 u 处为 1,其它地方为 0 的 $\mathbb{Z}_+^S$ 中的单位向量、矩阵 $(P(u,x);u,v\in S)$ 非负. 不妨设 $\sum\limits_{v}p(u,v)\leqslant C<+\infty,u\in S$.

显然,定理 12.11.2 中(12.11.9)成立. 若 $x\in E_k=\{x:|x|=k\}$,则

$$
\begin{aligned}
q(x) &= \sum_{y \in E-\{x\}} q(x,y) \\
&= \lambda_1 \sum_{u \in S} a(u)x(u) \\
&\quad + \lambda_2 \sum_{u \in S} \binom{x(u)}{2} + \sum_{u,v \in S, u \neq v} x(u)p(u,v) \\
&\leqslant \lambda_1 \Big(\sum_{u \in S} a(u)\Big)k + \lambda_2 Sk(k-1) + Ck.
\end{aligned}
$$

从而

$$
C_k = \sup\{q(x); x \in E_k\} < +\infty,
$$

故(12.11.10)成立. 又

$$
\begin{aligned}
q_{i,i+1} &= \sup\{\sum_{y \in E_{i+1}} q(x,y); x \in E_i\} \\
&= \sup\{\sum_{u \in S} \lambda_1 a(u)x(u); x \in E_i\} \\
&= \max_{|x|=i}\{\sum_{u \in S} \lambda_1 a(u)x(u)\} \\
&\leqslant \lambda_1(\max_{u \in S} a(u))i.
\end{aligned}
$$

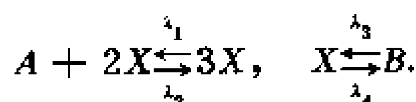
因此,定理 12.11.1 中定义的 R 满足以下关系

$$
\begin{aligned}
R = \sum_{i=0}^{\infty} m_i &= \sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{i}\Big(\frac{F_i^{(k)}}{q_{k,k+1}}\Big) \\
&\geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{F_i^{(i)}}{q_{i,i+1}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{q_{i,i+1}} \\
&\geqslant \frac{1}{\lambda_1 \max_{u \in S} a(u)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = +\infty.
\end{aligned}
$$

由定理12.11.2和定理12.11.1知,Q过程唯一. 由定理12.11.2的注知,这个唯一的 Q 过程还是诚实的.

在以下的模型中,我们使用(i)中类似的记号.

(ii) schlogl 模型



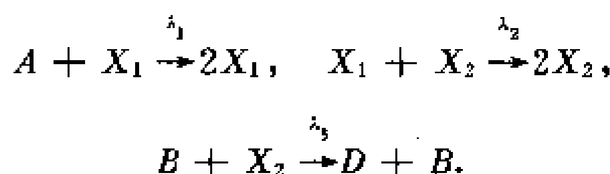
$$
A + 2X \underset{\lambda_2}{\overset{\lambda_1}{\rightleftarrows}} 3X, \quad X \underset{\lambda_4}{\overset{\lambda_3}{\rightleftarrows}} B.
$$

其 Q - 矩阵为:

$$
q(x,y)=\begin{cases}
\lambda_1 a(u)\binom{x(u)}{2}+\lambda_4 b(u), & y=x+e_u;\\
\lambda_2\binom{x(u)}{3}+\lambda_3 x(u), & y=x-e_u;\\
x(u)p(u,v), & y=x-e_u+e_v, u\neq v;\\
0 & y\neq x \text{ 的其它情形};\\
-\sum\limits_{y\in E-\{x\}} q(x,y), & y=x.
\end{cases}
$$

(12.11.21)

(iii) Lotka — Volterra 模型



$$
A+X_1\xrightarrow{\lambda_1}2X_1,\quad X_1+X_2\xrightarrow{\lambda_2}2X_2,
$$

$$
B+X_2\xrightarrow{\lambda_3}D+B.
$$

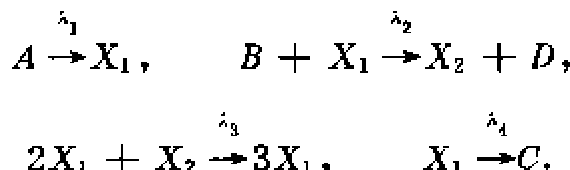
此时状态空间是 $E=(Z_+^2)^S=Z_+^{2S}$. 在 $u\in S$, X_i 的粒子数记作 $x_i(u)$. 当然, $|x|=\sum\limits_{u\in S}(x_1(u)+x_2(u))$, X_i 从 u 跑到 V 的速率是 $P_i(u,v)$. 那么,这个模型的 $Q-$ 矩阵为:

$$
q(x,y)=\begin{cases}
\lambda_1 a(u)x_1(u), & y=x+e_{u1};\\
\lambda_3 b(u)x_2(u), & y=x-e_{u2};\\
\lambda_2 x_1(u)x_2(u), & y=x-e_{u1}+e_{u2};\\
x_i(u)p_i(u,v), & y=x-e_{ui}+e_{vi}, i=1,2, u\neq v;\\
0, & y\neq x \text{ 的其它情形};\\
-\sum\limits_{y\in E-\{x\}} q(x,y), & y=x.
\end{cases}
$$

(12.11.22)

此处 $e_{ui}(v,j)=1$, 如 $u=v$ 且 $i=j$; 否则为 0.

(iv) Brusseltor 模型



$$
A\xrightarrow{\lambda_1}X_1,\qquad B+X_1\xrightarrow{\lambda_2}X_2+D,
$$

$$
2X_1+X_2\xrightarrow{\lambda_3}3X_1,\qquad X_1\xrightarrow{\lambda_4}C.
$$

其状态空间仍然是 $(Z_+^2)^S$. 它的 $Q-$ 矩阵为:

$$
q(x,y)=\begin{cases}
\lambda_1 a(u), & y=x+e_{u1};\\
\lambda_4 x_1(u), & y=x-e_{u1};\\
\lambda_2 b(u)x_1(u), & y=x-e_{u1}+e_{u2};\\
\lambda_3\binom{x_1(u)}{2}x_2(u), & y=x-e_{u2}+e_{u1};\\
x_i(u)p_i(u,v), & y=x-e_{ui}+e_{vi}, i=1,2, u\neq v;\\
0, & y\neq x \text{ 的其它情形};\\
-\sum\limits_{y\in E-\{x\}} q(x,y), & y=x.
\end{cases}
\tag{12.11.23}
$$

类似于(i),容易验证(ii)、(iii)和(iv)均满足定理 12.11.2 和定理 12.11.1 的条件. 从而,存在唯一的 Q 过程且是诚实的.

§12 补充与注记

含瞬时态 Q 过程的非唯一性最初由 D. Williams[5] 指出. 本章中定理 12.1.1 和定理 12.1.2 分别取自于陈安岳[4] 和费志凌[2].

§2 — §10 取自于侯振挺[3].

§11 取材于陈木法[2].

第 4 篇

Q—矩阵问题的进一步讨论

13 定性理论的进一步讨论

对任给的一个拟 Q — 矩阵，所谓 Q 过程的定性理论就是研究 Q 过程的存在性、唯一性以及它的个数的各种可能性. 在前面几章中，我们仅讨论了两种类型 Q 过程的存在性和唯一性. 即一般或诚实 Q 过程的定性问题. 事实上，关于定性问题远不止这两种类型. 下面分二节来讨论定性问题.

§1 全稳定 Q 过程的定性理论

在本节中，我们恒设 Q 为全稳定 Q — 矩阵. 在第一章中，我们定义了满足柯氏向后、向前方程的 Q 过程.

按照 Q 过程是否诚实，是否满足柯氏向后、向前方程，我们把一切 Q 过程分为二十二种类型(不包括专论非诚实的类型).

(一) 结果的陈述

我们需要状态空间 E 的如下扩充：

任取 $\Delta \notin E$，并记 $E_\Delta = E \cup \{\Delta\}$. 令

$$
\begin{aligned}
&\tilde{q}_{\Delta i} = 0, && (i \in E_\Delta); \\
&\tilde{q}_{i\Delta} = q_i - \sum_{j \neq i} q_{ij} = d_i, && (i \in E); \qquad (13.1.1) \\
&\tilde{q}_{ij} = q_{ij}, && (i, j \in E).
\end{aligned}
$$

显然，$Q^\Delta = (\tilde{q}_{ij}; i, j \in E_\Delta)$ 是保守全稳定的 Q — 矩阵，记它所决定的最小 Q^Δ 过程为 $\Phi^\Delta(\lambda) = (\tilde{\varphi}_{ij}(\lambda); i, j \in E_\Delta)$. 则我们有

引理 13.1.1

$$\tilde{\varphi}_{\Delta\Delta}(\lambda) = \frac{1}{\lambda}, \quad \tilde{\varphi}_{\Delta j}(\lambda) = 0, \quad (j \in E, \lambda > 0); \qquad (13.1.2)$$

$$\tilde{\varphi}_{ij}(\lambda) = \varphi_{ij}(\lambda), \qquad (i, j \in E); \qquad (13.1.3)$$

$$\tilde{\varphi}_{i\Delta}(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\sum_{k\in E}\varphi_{ik}(\lambda)d_k, \qquad (i \in E). \qquad (13.1.4)$$

证明 因 $\Phi^{\Delta}(\lambda)$ 是最小 Q^{Δ} 过程，由引理 4.1.1 及其证明易得

$$\tilde{\varphi}_{\Delta\Delta}^{(0)}(\lambda) = \frac{1}{\lambda}, \qquad \tilde{\varphi}_{\Delta\Delta}^{(n)}(\lambda) = 0 \quad (n \geqslant 1),$$

$$\tilde{\varphi}_{\Delta j}^{(n)}(\lambda) = 0 \qquad (j \in E, \lambda > 0, n \geqslant 0). \qquad (13.1.5)$$

由(13.1.5) 立得(13.1.2).

由归纳法得

$$\tilde{\varphi}_{ij}^{(n)}(\lambda) = \varphi_{ij}^{(n)}(\lambda), \qquad (i,j \in E, \lambda > 0, n \geqslant 0).$$

这就得到(13.1.3).

易算出 $\tilde{\varphi}_{i\Delta}^{(1)}(\lambda) = \dfrac{d_i}{\lambda(\lambda+q_i)}$，再由归纳法得

$$\tilde{\varphi}_{i\Delta}^{(n+1)}(\lambda) = \sum_{k\in E}\frac{1}{\lambda}\varphi_{ik}^{(n)}(\lambda)d_k, \qquad (i \in E).$$

从而

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_{i\Delta}(\lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty}\varphi_{i\Delta}^{(n)}(\lambda)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k\in E}\frac{1}{\lambda}\varphi_{ik}^{(n)}(\lambda)d_k\\ &= \sum_{k\in E}\frac{1}{\lambda}\varphi_{ik}(\lambda)d_k,\end{aligned}$$

即得(13.1.4).

我们定义

$$u_\lambda = \{u: 0 \leqslant u \leqslant 1, (\lambda I - Q)u = 0\},$$

$$v_\lambda = \{v: 0 \leqslant v \in L_E, v(\lambda I - Q) = 0\}.$$

相应的，我们可定义

$$v_\lambda^{\Delta} = \{v: v \in L_{E_\Delta}, v(\lambda I - Q^{\Delta}) = 0\}.$$

我们还要用到 v_λ 的如下子空间

$$\bar{v}_\lambda = \{v \in v_\lambda: \sum_{i\in E}v_i d_i < \infty\}.$$

用 $\dim C$ 表示空间 C 的维数

引理 13.1.2 对每个 $\lambda > 0$，$\bar{v}_\lambda$ 与 v_λ^Δ 是一一对应的. 且 $\dim v_\lambda$、$\dim \bar{v}_\lambda$、$\dim v_\lambda^\Delta$、$\dim u_\lambda$ 均与 λ 无关，分别记作 $\dim v$、$\dim \bar{v}$、$\dim v^\Delta$、$\dim u$. 我们有 $\dim \bar{v} = \dim v^\Delta$.

证明 对任取 $\eta(\lambda) \in \bar{v}_\lambda$，记 $\eta_\Delta(\lambda) = \sum_{i \in E} \eta_i(\lambda) d_i$，则 $\eta^\Delta(\lambda) = (\eta_\Delta(\lambda), \eta_i(\lambda), i \in E) \in v_\lambda^\Delta$. 反过来，任取 $\eta^\Delta(\lambda) \in v_\lambda^\Delta$，记 $\eta(\lambda)$ 为 $\eta^\Delta(\lambda)$ 在 E 上的限制，则 $\eta(\lambda) \in \bar{v}_\lambda$. 余下结论显然.

为了简化陈述，我们使用如下代码

G： 一般的.

B： 满足柯氏向后方程.

F： 满足柯氏向前方程.

N： 诚实.

和

C： 保守.

H： $\inf_{i \in E} (\lambda \Phi(\lambda) \mathbf{1})_i > 0 \qquad (\lambda > 0)$

以及关联词

$\bigcup$： 或者.

$-$（上横）： 非.

但我们略去"$\bigcap$：并且"不写. 它们的顺序自然是先"非"，次"并且"，然后"或者". 例如说，$N(\bar{B} \bigcup \bar{F})$ 表示不满足向后方程或者不满足向前方程的诚实 Q 过程.

表 1

类型	个数	充分必要条件
G	1	$H(C \bigcup (\dim v = 0))$
	∞	$\bar{H} \bigcup (\bar{C} \bigcap (\dim v > 0))$
$B \bigcup F$	1	$(C \bigcup (\dim v = 0))(\dim u = 0)$
	∞	$\bar{C}(\dim v > 0) \bigcup (\dim u > 0)$
B	1	$\dim u = 0$
	∞	$\dim u > 0$

F	1	$C(\dim u = 0) \cup (\dim v = 0)$
	∞	$(\overline{C} \cup (\dim u > 0))(\dim v > 0)$
BF	1	$(\dim u = 0) \cup (\dim \bar{v} = 0)$
	∞	$(\dim u > 0)(\dim \bar{v} > 0)$
$\overline{B} \cup \overline{F}$	0	$H(C \cup (\dim v = 0))$
	∞	$\overline{H} \cup (\overline{C} \cap (\dim v > 0))$
$\overline{B}$	0	$C \cup H(\dim v = 0)$
	∞	$\overline{C}(\overline{H} \cup (\dim v > 0))$
$\overline{B}F$	0	$C \cup (\dim v = 0)$
	∞	$\overline{C}(\dim v > 0)$
$\overline{F}$	0	H
	∞	$\overline{H}$
$B\overline{F}$	0	$\dim u = 0$
	∞	$\dim u > 0$
$\overline{B}\,\overline{F}$	0	$C \cup H$
	∞	$\overline{C}\overline{H}$

表 2

类型	个数	充分必要条件
NG	0	$\overline{C}H(\dim v = 0)$
	1	$H(C \cup (\dim v = 1))$
	∞	$\overline{H} \cup \overline{C}(\dim v > 1)$
$N(B \cup F)$	0	$\overline{C}(\dim v = 0)$
	1	$C(\dim u = 0) \cup \overline{C}(\dim v = 1)$
	∞	$C(\dim u > 0) \cup \overline{C}(\dim v > 1)$
NB	0	$\overline{C}$
	1	$C(\dim u = 0)$
	∞	$C(\dim u > 0)$
NF	0	$(C(\dim u > 0) \cup \overline{C})(\dim v = 0)$
	1	$C(\dim u = 0) \cup (\dim v = 1)$
	∞	$(C(\dim u > 0) \cup \overline{C})(\dim v > 1)$

NBF	$\begin{cases}0\\1\\\infty\end{cases}$	$\overline{C}\cup(\dim u>0)(\dim v=0)$ $C((\dim u=0)\cup(\dim v=1))$ $C(\dim u>0)(\dim v>1)$
$N(\overline{B}\cup\overline{F})$	$\begin{cases}0\\1\\\infty\end{cases}$	$H(C\cup(\dim v=0))$ $\overline{C}H(\dim v=1)$ $\overline{H}\cup\overline{C}(\dim v>1)$
$N\overline{B}$	$\begin{cases}0\\1\\\infty\end{cases}$	$C\cup H(\dim v=0)$ $\overline{C}H(\dim v=1)$ $\overline{C}(\overline{H}\cup(\dim v>1))$
$N\overline{B}F$	$\begin{cases}0\\1\\\infty\end{cases}$	$C\cup(\dim v=0)$ $\overline{C}(\dim v=1)$ $\overline{C}(\dim v>1)$
$N\overline{F}$	$\begin{cases}0\\\infty\end{cases}$	H $\overline{H}$
$NB\overline{F}$	$\begin{cases}0\\\infty\end{cases}$	$C(\dim u=0)\cup\overline{C}$ $C(\dim u>0)$
$N\overline{B}\,\overline{F}$	$\begin{cases}0\\\infty\end{cases}$	$C\cup H$ $\overline{C}\overline{H}$

现在,我们把所有的二十二种类型及每种类型 Q 过程的可能个数和相应的判别准则列成以上两个表:表 1 和表 2. 我们用 C,H, $\dim u$,$\dim v$ 和 $\dim\bar{v}$ 这五个条件及其组合表出所有判准. 表 2 由表 1 添加条件 N 得到. 从两个表中可以看出可能的个数的明显的规律性. 此外,G 型和 $\overline{B}\cup\overline{F}$ 型,B 型和 $B\overline{F}$ 型的两种结果不同,却有相同的条件;$\overline{F}$ 型和 $N\overline{F}$ 型,$\overline{B}\,\overline{F}$ 型和 $N\overline{B}\,\overline{F}$ 型不仅有相同的结果,而且有同样的判准.

(二) 结果的证明

我们先证明 B 型 Q 过程的几个等价条件.

定理 13.1.1 设 $P(t)$ 为 Q 过程,$\Psi(\lambda)$ 为其拉氏变换,则下面三条等价

(i) $p'_{ij}(t)=\sum_{k\in E}q_{ik}p_{kj}(t),\qquad(i,j\in E,t\geqslant 0)$;

(ii) $(\lambda I-Q)\Psi(\lambda)=I,\qquad(\lambda>0)$;

(iii) $\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1-\lambda\Psi(\lambda)1)=d.$

证明 在(i)两边取拉氏变换即得(ii). 若(ii)成立,则

$$(\lambda I-Q)(1-\lambda\Psi(\lambda)1)=\lambda 1+d-\lambda 1=d.$$

由$\lim_{\lambda\to\infty}(1-\lambda\Psi(\lambda)1)=0$,及控制收敛定理得(iii).

若(iii)成立,记$d(t)$为$\frac{1}{\lambda}-\Psi(\lambda)1$的反拉氏变换,则$d(t)=1-P(t)1$. 由(iii)知,$d'(0)=d$. 取$\Delta\notin E$,记

$$\bar{p}_{i\Delta}(t)=d_i(t),\quad \bar{p}_{\Delta i}(t)=0,\qquad (i\in E,t\geqslant 0),$$

$$\bar{p}_{\Delta\Delta}(t)=1,\quad \bar{p}_{ij}(t)=p_{ij}(t),\qquad (i,j\in E;t\geqslant 0).$$

则$(\bar{p}_{ij}(t);i,j\in E_\Delta)$为$Q^\Delta$过程,其中$Q^\Delta=(q_{ij};i,j\in E_\Delta)$如(13.1.1)所定义,由柯氏不等式知

$$\begin{aligned}0&=d_i'(t)+\sum_{j\in E}p_{ij}'(t)\\&\geqslant\sum_{k\in E}q_{ik}d_k(t)+d_i+\sum_{k\in E}q_{ik}(1-d_k(t))\\&=\sum_{k\in E}q_{ik}+d_i=0.\end{aligned}$$

因此

$$p_{ij}'(t)=\sum_{k\in E}q_{ik}p_{kj}(t),\qquad (i,j\in E;t>0).$$

即(i)成立.

上述定理说明条件(i),(ii),(iii)中任何一个均可作为B型Q过程的定义.

推论 13.1.1 当$d=0$,即Q保守时,每个Q过程均为B型Q过程.

证明 设$\Psi(\lambda)$为任一Q过程,$\Phi(\lambda)$是最小Q过程,从而

$$0\leqslant\lambda(1-\lambda\Psi(\lambda)1)\leqslant\lambda(1-\lambda\Phi(\lambda)1).$$

因为$\Phi(\lambda)$为B型Q过程,由定理13.1.1知

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1-\lambda\Phi(\lambda)1)=d=0,$$

所以

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1-\lambda\Psi(\lambda)1)=0=d.$$

由定理 13.1.1 知 $\Psi(\lambda)$ 为 B 型 Q 过程

定理 13.1.2 记 $Z(\lambda)=1-\lambda\Phi(\lambda)1$,则

(i) $Z(\lambda)\in M_{\Phi(\lambda)}$;

(ii) $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda Z(\lambda)=d$;

(iii) $Z(\lambda)\geqslant\Phi(\lambda)d$.

证明 由 $\Phi(\lambda)$ 满足预解方程,即可得证(i). 由定理 13.1.1 及 $\Phi(\lambda)$ 为 B 型 Q 过程知(ii) 成立. 由(i) 知

$$Z(\lambda)=(I+(\mu-\lambda)\Phi(\lambda))Z(\mu). \tag{13.1.6}$$

在(13.1.6) 中,令 $\mu\to\infty$,由法都引理得(iii).

定理 13.1.3 记 $\overline{X}(\lambda)=Z(\lambda)-\Phi(\lambda)d$,则

(i) $0\leqslant\overline{X}(\lambda)\leqslant 1$;

(ii) $\overline{X}(\lambda)\in M^0_{\Phi(\lambda)}$;

(iii) $\overline{X}(\lambda)$ 为方程

$$\begin{cases}(\lambda I-Q)U=0,\\ 0\leqslant U\leqslant 1,\end{cases}\qquad(\lambda>0) \tag{13.1.7}$$

的最大解.

证明 (i)、(ii) 由定理 13.1.2 立得,(iii) 由定理 4.2.1 得.

推论 13.1.2 $\dim u=0$ 的充要条件是 $\overline{X}(\lambda)=0$, $(\lambda>0)$.

从现在开始.我们逐步证明上述结果.

1 B型

因为最小 Q 过程为 B 型的,从而 B 型 Q 过程总存在.

若 $\dim u=0$. 设 $\Psi(\lambda)$ 为 B 型 Q 过程,记

$$W_{ij}(\lambda)=\frac{1}{\lambda}(\psi_{ij}(\lambda)-\varphi_{ij}(\lambda))\geqslant 0,$$

于是,对每个 j, $\{W_{ij}(\lambda),i\in E\}$ 是方程(13.1.7) 的解. 然而,由 $\dim u=0$ 知,$W_{ij}(\lambda)=0$. 即 $\psi_{ij}(\lambda)=\varphi_{ij}(\lambda)$. 从而 B 型 Q 过程唯一.

若 $\dim u\neq 0$. 由推论 13.1.2 知,$\overline{X}(\lambda)\neq 0$. 取 $\alpha\geqslant 0$,使 $\sum\limits_{i\in E}\alpha_i<\infty$,再取常数 $c\geqslant\sum\limits_{i\in E}\alpha_i$. 令

$$\Psi(\lambda)=\Phi(\lambda)+\overline{X}(\lambda)\frac{\alpha\Phi(\lambda)}{c+\lambda\alpha\Phi(\lambda)\overline{X}}. \tag{13.1.8}$$

易证 $\Psi(\lambda)$ 是 Q 过程. 因 $(\lambda I - Q)\Psi(\lambda) = I$，再由定理 13.1.1 知 $\Psi(\lambda)$ 为 B 型的.

当 $c \geqslant \sum_{i\in E} \alpha_i$ 变化时，我们可以得到无穷多个 B 型 Q 过程.

下面定理给出了 F 型 Q 过程的两个等价条件.

定理 13.1.4 设 $P(t)$ 为 Q 过程，$\Psi(\lambda)$ 为其拉氏变换，则下面二条件等价

(i) $\quad p'_{ij}(t) = \sum_{k\in E} p_{ik}(t)q_{kj}$；

(ii) $\quad \Psi(\lambda)(\lambda I - Q) = I$.

证明 见定理 2.5.1.

引理 13.1.3 若

$$\begin{cases} \eta(\lambda - Q) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{0} \leqslant \eta, \quad \eta\mathbf{1} < \infty, \end{cases} \qquad (\lambda > 0) \qquad (13.1.9)$$

有非零解，则可造一个非零解，使其满足如下条件

$$\eta(\lambda) = \eta(\mu)A(\mu,\lambda). \qquad (13.1.10)$$

即 $\eta(\lambda) \in L^0_{\Phi(\lambda)}$，且 $\eta(\lambda) \neq \mathbf{0}$.

证明 设(13.1.9) 有非零解，因此存在 $\lambda_0 > 0$ 及 $\xi(\lambda_0)$ 使

$$\begin{cases} \lambda_0\xi(\lambda_0) - \xi(\lambda_0)Q = \mathbf{0}; \\ \mathbf{0} \leqslant \xi(\lambda_0), \xi(\lambda_0)\mathbf{1} < \infty. \end{cases} \qquad (13.1.11)$$

成立. 对任一 $\lambda > 0$，令

$$\eta(\lambda) = \xi(\lambda_0)A(\lambda_0,\lambda). \qquad (13.1.12)$$

由于 $A(\lambda_0,\lambda) = I$，所以 $\eta(\lambda_0) = \xi(\lambda_0)$.

若 $\lambda_0 > \lambda$，则

$$\eta(\lambda) = \eta(\lambda_0)(I + (\lambda_0 - \lambda)\Phi(\lambda)) \geqslant \mathbf{0}. \qquad (13.1.13)$$

若 $\lambda_0 < \lambda$，则由 $\eta(\lambda_0)(\lambda_0 I - Q) = \mathbf{0}$ 得

$$\eta(\lambda_0)(\lambda I - Q) = (\lambda - \lambda_0)\eta(\lambda_0) \geqslant \mathbf{0}. \qquad (13.1.14)$$

于是由引理 4.3.2 得

$$\eta(\lambda_0) \geqslant (\lambda - \lambda_0)\eta(\lambda_0)\Phi(\lambda).$$

因此

$$\eta(\lambda) = \eta(\lambda_0)A(\lambda_0,\lambda) = \eta(\lambda_0)(I + (\lambda_0 - \lambda)\Phi(\lambda)) \geqslant \mathbf{0}.$$

所以

$$\eta(\lambda) \geqslant \mathbf{0}, \qquad (\lambda > 0). \tag{13.1.15}$$

$$\begin{aligned}\eta(\lambda)\mathbf{1} &= \eta(\lambda_0)(I + (\lambda_0 - \lambda)\Phi(\lambda))1 \\ &\leqslant (1 + \frac{|\lambda_0 - \lambda|}{\lambda})\eta(\lambda_0)1 < \infty.\end{aligned} \tag{13.1.16}$$

令

$$S = Q + \begin{pmatrix} 2q_0 & & \\ & 2q_1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix},$$

以$(X)_k$表示X的第k个分量，于是

$$\begin{aligned}(\eta(\lambda_0)\Phi(\lambda)S)_k &= \sum_i (\eta_i(\lambda_0)\varphi_{ik}(\lambda)q_k + \eta_i(\lambda_0)\sum_{j\neq k}\varphi_{ij}(\lambda)q_{jk}) \\ &\leqslant \frac{q_k}{\lambda}\sum_i \eta_i(\lambda_0) + \sum_i \eta_i(\lambda_0)\sum_{j\neq k}\varphi_{ij}(\lambda)q_{jk} \\ &= \frac{q_k}{\lambda}\sum_i \eta_i(\lambda_0) + \sum_i \eta_i(\lambda_0)(\lambda\varphi_{ik}(\lambda) + \varphi_{ik}(\lambda)q_k - \delta_{ik}) \\ &\leqslant \frac{q_k}{\lambda}\sum_i \eta_i(\lambda_0) + \sum_i \eta_i(\lambda_0)(1 + \frac{q_k}{\lambda} + 1) \\ &= 2(1 + \frac{q_k}{\lambda})\sum_i \eta_i(\lambda_0) < +\infty.\end{aligned}$$

所以对于$\eta(\lambda_0)(I + (\lambda_0 - \lambda)\Phi(\lambda))(\lambda I - Q)$可使用结合律. 故

$$\begin{aligned}\eta(\lambda)(\lambda I - Q) &= (\eta(\lambda_0)(I + (\lambda_0 - \lambda)\Phi(\lambda))(\lambda I - Q) \\ &= \eta(\lambda_0)(I - (\lambda_0 - \lambda)\Phi(\lambda))(\lambda I - Q) \\ &= \eta(\lambda_0)((\lambda I - Q) + (\lambda_0 - \lambda)\Phi(\lambda)(\lambda I - Q)) \\ &= \eta(\lambda_0)((\lambda I - Q) + (\lambda_0 - \lambda)I) \\ &= \eta(\lambda_0)(\lambda_0 I - Q) = \mathbf{0}.\end{aligned} \tag{13.1.17}$$

由(13.1.15)、(13.1.16)、(13.1.17)知，$\eta(\lambda)$满足方程(13.1.9).

又

$$A(\lambda,\mu)A(\mu,\nu) = A(\lambda,\nu).$$

于是

$$\eta(\lambda)A(\mu,\lambda) = \eta(\lambda_0)A(\lambda_0,\mu)A(\mu,\lambda)$$

$$= \eta(\lambda_0)A(\lambda_0,\lambda)$$
$$= \eta(\lambda).$$

引理得证.

2 F 型

因为最小 Q 过程为 F 型，从而 F 型 Q 过程总存在.

若 $\dim v = 0$. 设 $\Psi(\lambda)$ 为 F 型 Q 过程，记

$$W_{ij}(\lambda) = \psi_{ij}(\lambda) - \varphi_{ij}(\lambda) \geqslant 0, \qquad (i,j \in E)$$

由定理 13.1.4 知，对每个 i，$\{W_{ij}(\lambda), j \in E\}$ 是方程(13.1.9)的解. 然而，由 $\dim v = 0$ 知 $W_{ij}(\lambda) = 0 \quad (i,j \in E)$，即 $\psi_{ij}(\lambda) = \varphi_{ij}(\lambda) \quad (i, j \in E)$. 故除 $\Phi(\lambda)$ 外，再无其它 F 型 Q 过程.

若 $C(\dim u = 0)$，此时 $d = \mathbf{0}$，$\bar{X}(\lambda) = \mathbf{0}$，从而 $\lambda\Phi(\lambda)\mathbf{1} = \mathbf{1}$. 于是 $\Phi(\lambda)$ 是唯一的 Q 过程，从而也是唯一的 F 型 Q 过程.

若 $[\bar{C} \cup (\dim u > 0)](\dim v > 0)$ 成立. 由 $\bar{C} \cup (\dim u > 0)$ 知 $\mathbf{1} - \lambda\Phi(\lambda)\mathbf{1} \neq \mathbf{1}$. 由 $\dim v > 0$ 及引理 13.1.3 知 $L^0_{\Phi(\lambda)} \neq \{\mathbf{0}\}$. 任取一个 $\eta(\lambda) \in L^0_{\Phi(\lambda)} - \{\mathbf{0}\}$ 命

$$\Psi^c(\lambda) = \Phi(\lambda) + (\mathbf{1} - \lambda\Phi(\lambda)\mathbf{1}) \frac{\eta(\lambda)}{c + \lambda\eta(\lambda)\mathbf{1}}. \qquad (13.1.18)$$

其中 $c \geqslant 0$ 为常数.

易知，$\Psi^c(\lambda)$ 为 Q 过程，由(13.1.18)知 $\Psi^c(\lambda)(\lambda I - Q) = I$，于是由定理 13.1.4 知 $\Psi^c(\lambda)$ 为 F 型 Q 过程，由于不同的 c 得到不同的 F 型 Q 过程，从而存在无穷多个 F 型 Q 过程. 注意

$$\overline{C(\dim u = 0) \cup (\dim v = 0)} = [\bar{C} \cup (\dim u > 0)](\dim v > 0)$$

F 型的判准得证.

我们仍使用本节开头的记号.

引理 13.1.4 每个 Q^Δ 过程在 E 上的限制是一个 B 型 Q 过程，每一个 F 型 Q^Δ 过程在 E 上的限制是 BF 型 Q 过程. 而且两个 F 型 Q^Δ 过程相等当且仅当它们有相同的限制.

证明 设 $\Psi^\Delta(\lambda) = (\psi_{ij}(\lambda), i,j \in E_\Delta)$ 为 Q^Δ 过程. $\Psi(\lambda) = (\psi_{ij}(\lambda), i,j \in E)$ 为其限制. 由 Q^Δ 的定义知 Q^Δ 保守，由推论 13.1.1 知 $\Psi^\Delta(\lambda)$ 为 B 型的，且

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1-\lambda\Psi^{\Delta}(\lambda)\mathbf{1})=\mathbf{0},$$

从而

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1-\lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1})_i=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^2\psi_{i\Delta}(\lambda)=d_i,\qquad (i\in E).$$

再由定理 13.1.1 知 $\Psi(\lambda)$ 为 B 型的. 便得前一断言.

再设 $\Psi^{\Delta}(\lambda)=(\psi_{ij}(\lambda);i,j\in E_{\Delta})$ 为 F 型 Q^{Δ} 过程, $\Psi(\lambda)=(\psi_{ij}(\lambda);i,j\in E)$ 为其限制. 由第一个结论知 $\Psi(\lambda)$ 为 B 型的, 只需证 $\Psi(\lambda)$ 为 F 型的. 由 $\Psi^{\Delta}(\lambda)$ 为 F 型的得

$$(\lambda I^{\Delta}-Q^{\Delta})\Psi^{\Delta}(\lambda)=I^{\Delta}. \tag{13.1.19}$$

其中 I^{Δ} 为 $E_{\Delta}\times E_{\Delta}$ 上的单位矩阵.

由(13.1.19)得

$$\lambda\psi_{\Delta\Delta}(\lambda)=1,,\qquad \lambda\psi_{\Delta i}(\lambda)=0,\quad (i\in E). \tag{13.1.20}$$

$$\Psi(\lambda)(\lambda I-Q)=I,\qquad \psi_{i\Delta}(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\sum_{k\in E}\psi_{ik}(\lambda)d_k. \tag{13.1.21}$$

由(13.1.21)知 $\Psi(\lambda)$ 为 F 型的. 从(13.1.20), (13.1.21)可以看出两个 F 型 Q^{Δ} 过程相等当且仅当它们有相同的限制.

引理 13.1.5 每一个 BF 型 Q 过程是某个 F 型 Q^{Δ} 过程在 E 上的限制. 从而 F 型 Q^{Δ} 过程和它的限制是一对一的.

证明 只需取

$$\tilde{\psi}_{\Delta\Delta}(\lambda)=\frac{1}{\lambda},\quad \tilde{\psi}_{\Delta j}(\lambda)=0,\qquad (\lambda>0,j\in E),$$

$$\tilde{\psi}_{i\Delta}(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\sum_{k\in E}\psi_{ik}(\lambda)d_k\qquad (i\in E,\lambda>0),$$

$$\tilde{\psi}_{ij}(\lambda)=\psi_{ij}(\lambda)\qquad (i,j\in E,\lambda>0).$$

便得前一断言, 然后结合引理 13.1.4 便得后一断言.

引理 13.1.6 若记

$$u_\lambda^{\Delta}=\{u^{\Delta}:1\leqslant u^{\Delta}\leqslant\mathbf{1},\quad (\lambda I^{\Delta}-Q^{\Delta})u^{\Delta}=\mathbf{1}\},$$

则 u_λ 与 u_λ^{Δ} 是一一对应的. 特别地 $\dim u=\dim u^{\Delta}$.

证明 直接验证 $u_\Delta^{\Delta}=0, u_i^{\Delta}=u_i\quad (i\in E)$.

3 BF 型

由于最小 Q 过程是 BF 型的，因而 BF 型 Q 过程总存在. 如 $\dim u = 0$，则 B 型 Q 过程唯一. 从而 BF 型 Q 过程也唯一. 如果 $\dim \bar{v} = 0$，由引理 13.1.2 知，$\dim v^d = 0$，于是 F 型 Q^d 过程唯一. 再由引理 13.1.4 及引理 13.1.5 知 BF 型 Q 过程唯一. 反之，若 $\dim u > 0$ 且 $\dim \bar{v} > 0$，则由引理 13.1.6 及引理 13.1.2 知，$\dim u^d > 0$ 且 $\dim v^d > 0$. 由 2 知存在无穷多个 F 型 Q^d 过程，于是由引理 13.1.5 知有无穷多个 BF 型 Q 过程.

4　$B \cup F$ 型

只要注意 $B \cup F$ 型 Q 过程总存在，它唯一的充要条件是 B 型 Q 过程和 F 型 Q 过程同时唯一.

5　G 型

存在性、唯一性分别在第四、十章已经解决. 我们只需再证，若 Q 过程非唯一，则必定有无穷多个. 但我们已证，若 $\bar{C}(\dim v > 0)$ 则有无穷多个 F 型 Q 过程，从而 Q 过程有无穷多个. 因此，我们只需再证：若 H 不真，则有无穷多个 Q 过程. 然而，我们有如下更一般的结果：

引理 13.1.7　若 $\overline{C}\overline{H}$ 成立，则存在无穷多个 $N\overline{B}\,\overline{F}$ 型 Q 过程. 若 $C\overline{H}$ 成立，则存在无穷多个 $NB\overline{F}$ 型 Q 过程.

证明　由 $\overline{H}$ 成立及引理 3.5.2 知，存在 $\alpha \geqslant 0$，使

$$\sum_{i\in E}\alpha_i\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda) < \infty,\quad \sum_{i\in S}\alpha_i = \infty. \tag{13.1.22}$$

令

$$\Psi(\lambda) = \Phi(\lambda) + (1 - \lambda\Phi(\lambda)1)\,\frac{\alpha\Phi(\lambda)}{\lambda\alpha\Phi(\lambda)1}. \tag{13.1.23}$$

易知，$\Psi(\lambda)$ 是 Q 过程，并且是诚实的. 由定理 13.1.4，$\Psi(\lambda)$ 是 $\overline{F}$ 型的. 因为满足(13.1.22)的 α 有无穷多个. 再利用定理 13.1.1 得引理的结论成立.

引理 13.1.8　若 H 条件成立，则对任意行协调族 $\eta(\lambda)$ 都有

$$\lim_{\mu\to\infty}\mu\eta(\mu)1 < \infty.$$

证明　记 $c(\lambda) = \inf_{i\in E}(\lambda\Phi(\lambda)1)_i$. 由 $\eta(\lambda)$ 为行协调族，我们有

$$\eta(\lambda) - \eta(\mu) = (\mu - \lambda)\eta(\mu)\Phi(\lambda).$$

从而

$$\lambda\eta(\lambda)\mathbf{1} - \lambda\eta(\mu)\mathbf{1} = (\mu - \lambda)\eta(\mu)(\lambda\Phi(\lambda)\mathbf{1}). \quad (13.1.24)$$

设 $\mu > \lambda$,我们有

$$\lambda\eta(\lambda)\mathbf{1} - \lambda\eta(\mu)\mathbf{1} \geqslant (\mu - \lambda)\eta(\mu)\mathbf{1}c(\lambda).$$

于是

$$\lambda\eta(\lambda)\mathbf{1} \geqslant c(\lambda)(\mu\eta(\mu)\mathbf{1}) + (1 - c(\lambda))\lambda\eta(\mu)\mathbf{1}.$$

由假设知 $0 < c(\lambda) \leqslant 1$,从而

$$\lim_{\mu\to\infty} \mu\eta(\mu)\mathbf{1} < \infty.$$

引理 13.1.9 若 H 条件成立,则对任意行协调族 $\eta(\lambda)$ 都有

$$\sum_{i\in B} \eta_i(\lambda)d_i < \infty.$$

证明 由(13.1.24)得(λ 与 μ 互换)

$$\begin{aligned}
\mu\eta(\mu)\mathbf{1} &= \mu\eta(\lambda)\mathbf{1} + (\lambda - \mu)\eta(\lambda)(\mu\Phi(\mu)\mathbf{1}) \\
&= \mu\eta(\lambda)\mathbf{1} + (\lambda - \mu)\eta(\lambda)(\mathbf{1} - Z(\mu)) \\
&= \lambda\eta(\lambda)\mathbf{1} + (\mu - \lambda)\eta(\lambda)Z(\mu) \\
&= \lambda\eta(\lambda)\mathbf{1} + \eta(\lambda)\mu Z(\mu) - \lambda\eta(\lambda)Z(\mu).
\end{aligned} \quad (13.1.25)$$

由定理 13.1.2 知$\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda Z(\lambda) = d$. 在(13.1.25)式两边令 $\mu \uparrow \infty$,由引理 13.1.8 得

$$\sum_{i\in B} \eta_i(\lambda)d_i < \infty.$$

下面是本节的关键性结果

引理 13.1.10 若 H 条件成立,则一切 Q 过程均为 F 型 Q 过程.

证明 设 $\Psi(\lambda)$ 为任一 Q 过程,由 H 条件成立,则 $\dim u = 0$,于是在定理 4.3.1 中的 $B(\lambda) = \mathbf{0}$,从而

$$\psi_{ij}(\lambda) = \varphi_{ij}(\lambda) + \sum_{a\in H} X_i^a(\lambda)F_j^a(\lambda). \quad (13.1.26)$$

如果 H 为空集,由上式知 $\Psi(\lambda) = \Phi(\lambda)$,因而 $\Psi(\lambda)$ 是 F 型 Q 过程.下设 $H \neq \varnothing$,将(13.1.26)代入 $\Psi(\lambda)$ 的预解方程,注意 $\Phi(\lambda)$ 满足

预解方程，以及引理 4.2.7 知 $X^a(\lambda)$，$(a\in H)$ 线性独立，我们得

$$F^a(\lambda)A(\lambda,\mu)=F^a(\mu)+(\mu-\lambda)\sum_{b\in H}[F^a(\lambda),X^b(\mu)]F^b(\mu),\ (a\in H).$$

(13.1.27)

因为 $F^a(\lambda)\geqslant \mathbf{0}$，$\lambda[F^a(\lambda),\mathbf{1}]\leqslant 1$. 由上式可见，对任意 $\lambda,\mu>0$，$F^a(\lambda)A(\lambda,\mu)\in L_E$，于是固定 a 及 $\lambda>0$，易知 $\eta(\mu)=F^a(\lambda)A(\lambda,\mu)$ 是行协调族，依引理 3.1.7 得

$$\eta(\mu)=\alpha\Phi(\mu)+\bar{\eta}(\mu). \qquad (13.1.28)$$

其中 $\alpha\geqslant\mathbf{0}$ 与 μ 无关，使 $\alpha\Phi(\mu)\in L_E$，$\bar{\eta}(\mu)$ 为行协调解族，又由于 α，$\bar{\eta}(\mu)$ 与 a 及 λ 有关，故 $\alpha=\alpha^a(\lambda)$，$\bar{\eta}(\mu)=\bar{\eta}^{a,\lambda}(\mu)$，故

$$F^a(\lambda)A(\lambda,\mu)=\alpha^a(\lambda)\Phi(\mu)+\bar{\eta}^{a,\lambda}(\mu). \qquad (13.1.29)$$

特别地，当 $\mu=\lambda$ 时，

$$F^a(\lambda)=\alpha^a(\lambda)\Phi(\lambda)+\bar{\eta}^{a,\lambda}(\lambda). \qquad (13.1.30)$$

由 H 条件成立，

$$\begin{aligned}1&\geqslant\lambda[F^a(\lambda),\mathbf{1}]\geqslant\lambda[\alpha^a(\lambda)\Phi(\lambda),\mathbf{1}]\\&=[\alpha^a(\lambda),\lambda\Phi(\lambda)\mathbf{1}]\geqslant c(\lambda)[\alpha^a(\lambda),\mathbf{1}],\end{aligned}$$

故

$$[\alpha^a(\lambda),\mathbf{1}]\leqslant\frac{1}{c(\lambda)}. \qquad (13.1.31)$$

在(13.1.27)的两边右乘以 $(\mu I-Q)$ 得

$$\alpha^a(\lambda)=\alpha^a(\mu)+(\mu-\lambda)\sum_{b\in E}[F^a(\lambda),X^b(\mu)]\alpha^b(\mu).$$

(13.1.32)

由上式知 $\alpha^a(\lambda)$ 随 λ 增加而不增. 往证

$$\alpha^a(\lambda)\downarrow\mathbf{0},\qquad(\lambda\uparrow\infty). \qquad (13.1.33)$$

从而

$$[\alpha^a(\lambda),\mathbf{1}]\downarrow 0,\qquad(\lambda\uparrow\infty). \qquad (13.1.34)$$

实际上，由 $\Psi(\lambda)$ 和 $\Phi(\lambda)$ 均满足 Q 条件，(13.1.26) 和(13.1.30) 得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{a\in H}X_i^a(\lambda)[\lambda\alpha^a(\lambda)\Phi(\lambda)]_j=0.$$

从而

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda X_i^a(\lambda)\alpha_j^a(\lambda)\lambda\varphi_{jj}(\lambda)=0,\qquad (a\in H).$$

由 $\Phi(\lambda)$ 的连续性条件即得

$$\delta_{ia}d_a\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\alpha_j^a(\lambda)\delta_{jj}=0.$$

取 $i=a$ 得证(13.1.33). 由(13.1.30) 及(13.1.32) 得

$$\alpha^a(\lambda)=\alpha^a(\mu)+(\mu-\lambda)\sum_{b\in H}[\alpha^a(\lambda)\Phi(\lambda),X^b(\mu)]\alpha^b(\mu)$$
$$+(\mu-\lambda)\sum_{b\in H}[\bar{\eta}^{a,\lambda}(\lambda),X^b(\mu)]\alpha^b(\mu).\qquad(13.1.35)$$

由 $X^a(\lambda)=\varphi_{\cdot a}(\lambda)d_a$ 及 $\bar{\eta}^{a,\lambda}(\mu)$ 的协调性

$$\alpha^a(\lambda)=\alpha^a(\mu)+\sum_{b\in H}[\alpha^a(\lambda),X^b(\lambda)-X^b(\mu)]\alpha^b(\mu)$$
$$+\sum_{b\in H}[\bar{\eta}_b^{a,\lambda}(\lambda)-\bar{\eta}_b^{a,\lambda}(\mu)]d_b\alpha^b(\mu).$$

由(13.1.31) 和上式得

$$[\alpha^a(\lambda),\mathbf{1}]=[\alpha^a(\mu),\mathbf{1}]+$$
$$+\sum_{b\in H}[\alpha^a(\lambda),X^b(\lambda)-X^b(\mu)][\alpha^b(\mu),\mathbf{1}]$$
$$+\sum_{b\in H}[\bar{\eta}_b^{a,\lambda}(\lambda)-\bar{\eta}_b^{a,\lambda}(\mu)]d_b[\alpha^b(\mu),\mathbf{1}].\qquad(13.1.36)$$

因为当 $\mu>\lambda$ 时

$$\sum_{b\in H}[\alpha^a(\lambda),X^b(\lambda)][\alpha^b(\mu),\mathbf{1}]$$
$$\leqslant\sum_{b\in H}[\alpha^a(\lambda),X^b(\lambda)][\alpha^b(\lambda),\mathbf{1}]$$
$$\leqslant\frac{1}{c(\lambda)}\sum_{b\in H}[\alpha^a(\lambda),X^b(\lambda)]$$
$$=\frac{1}{c(\lambda)}[\alpha^a(\lambda),\sum_{b\in H}X^b(\lambda)]\leqslant\frac{1}{c(\lambda)}[\alpha^a(\lambda),\mathbf{1}]$$
$$\leqslant\frac{1}{c^2(\lambda)}<\infty.\qquad(13.1.37)$$

由引理 13.1.9, $\mu>\lambda$ 时得

$$\sum_{b\in H}\bar{\eta}_b^{a,\lambda}(\lambda)d_b[\alpha^b(\mu),\mathbf{1}]$$

$$\leqslant \sum_{b\in H} \bar{\eta}_b^{a,\lambda}(\lambda) d_b[\alpha^b(\lambda),1]$$

$$\leqslant \frac{1}{c(\lambda)} \sum_{b\in H} \bar{\eta}_b^{a,\lambda}(\lambda) d_b < \infty. \qquad (13.1.38)$$

由(13.1.36)、(13.1.37)及(13.1.38)得

$$\begin{aligned}[\alpha^a(\lambda),1] = [\alpha^a(\mu),1] - & \\ & + \sum_{b\in H}[\alpha^a(\lambda),X^b(\lambda)][\alpha^b(\mu),1] \\ & - \sum_{b\in H}[\alpha^a(\lambda),X^b(\mu)][\alpha^b(\mu),1] + \\ & + \sum_{b\in H}\bar{\eta}_b^{a,\lambda}(\lambda)d_b[\alpha^b(\mu),1] \\ & - \sum_{b\in H}\bar{\eta}_b^{a,\lambda}(\mu)d_b[\alpha^b(\mu),1] < \infty. \end{aligned} \qquad (13.1.39)$$

周知,$X^b(\mu) \downarrow \mathbf{0} \quad (\mu \uparrow \infty)$,$\bar{\eta}^{a,\lambda}(\mu) \downarrow \mathbf{0} \quad (\mu \uparrow \infty)$,由(13.1.33)得

$$[\alpha^a(\lambda),1] \equiv 0, \qquad (\lambda > 0, a \in E).$$

于是

$$\alpha^a(\lambda) \equiv \mathbf{0}, \qquad (\lambda > 0, a \in E).$$

由(13.1.30)得

$$F^a(\lambda) = \bar{\eta}^{a,\lambda}(\lambda), \qquad (\lambda > 0, a \in E).$$

由 $\bar{\eta}^{a,\lambda}(\mu)$ 为行协调解族知

$$F^a(\lambda)(\lambda I - Q) = \mathbf{0}.$$

由定理 13.1.4 知,$\Psi(\lambda)$ 为 F 型 Q 过程.

6 $\overline{B}\,\overline{F}$ 型

若 Q 保守,则由推论 13.1.2 知,每个 Q 过程都是 B 型,从而不存在 $\overline{B}\,\overline{F}$ 型 Q 过程. 若 H 条件成立,则由引理 13.1.10 知,一切 Q 过程均为 F 型的,从而也不存在 $\overline{B}\,\overline{F}$ 型 Q 过程.

若 $\overline{CH}$ 成立,则由引理 13.1.7 知存在无穷多个 $N\overline{B}\,\overline{F}$ 型 Q 过程.

为了叙述方便,以下用 $|D|$ 表 D 型 Q 过程的个数.

7 $B\overline{F}$ 型

若 $\dim u = 0$,则 $|B| = |BF| = 1$,从而 $|B\overline{F}| = 0$.

若 $\dim u > 0$，容易证明(13.1.8)中每个 Q 过程均为 $B\overline{F}$ 型的．从而 $|B\overline{F}| = \infty$.

8　$\overline{F}$ 型

若 H 条件成立，则由引理 13.1.10 知 $\overline{F}$ 型 Q 过程不存在．

若 $\overline{H}$ 成立，则必有 $C\overline{H}$ 或 $\overline{C}\overline{H}$ 之一成立．由引理 13.1.7 知存在无穷多个 $\overline{F}$ 型 Q 过程．

9　$\overline{B}$ 型

若 Q 保守，显然有 $|\overline{B}| = 0$；若 $\overline{C}H(\dim v = 0)$，则 $|G| = 1 = |B|$，也有 $|\overline{B}| = 0$.

若 $\overline{C}\overline{H}$ 成立，则由引理 13.1.7 知 $|\overline{B}| \geqslant |N\overline{B}\,\overline{F}| = \infty$；如 $\overline{C}(\dim v > 0)$，则在(13.1.18)中所构造的 Q 过程均为 $\overline{B}F$ 型，从而 $|\overline{B}| = \infty$.

注意　$\overline{C \cup H(\dim v = 0)} = \overline{C}(\overline{H} \cup (\dim v > 0))$.

10　$\overline{B}F$ 型

若 Q 保守，显然有 $|\overline{B}F| = 0$. 若 $\dim v = 0$，则 $|F| = |BF| = 1$，从而 $|\overline{B}F| = 0$.

若 $\overline{C}(\dim v > 0)$. 则在(13.1.18)中所构造的 Q 过程均为 $\overline{B}F$ 型，从而 $|\overline{B}F| = \infty$.

11　$\overline{B} \cup \overline{F}$ 型

它是 $\overline{B}$ 型和 $\overline{F}$ 型条件的组合．

下面证明表 2 中十一种类型的判准．

12　NB 型

若 Q 非保守，则 $\boldsymbol{d} \neq \mathbf{0}$. 设 $\Psi(\lambda)$ 是任一 B 型 Q 过程，由定理 13.1.1 知

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda(\mathbf{1} - \lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1}) = \boldsymbol{d} \neq \mathbf{0},$$

从而 $\Psi(\lambda)$ 非诚实，因此，$|NB| = 0$.

若 Q 保守且 $\dim u = 0$，则显然有 $|NB| = 1$；

若 Q 保守且 $\dim u > 0$，此时 $C\overline{H}$ 成立，由引理 13.1.7 知 $|NB\overline{F}| = \infty$，从而 $|NB| = \infty$.

13　NF 型

如 $\dim v = 0$，则 $|F| = 1$，它即是最小 Q 过程. 但不论 $C(\dim u > 0)$ 或 $\overline{C}$，最小 Q 过程都是非诚实，从而 $|NF| = 0$.

如 $C(\dim u = 0)$，则 $|G| = 1$，最小 Q 过程诚实. 从而 $|NF| = 1$；

如 $\dim v = 1$，则存在 $\eta(\lambda) \in L^0_{\Phi(\lambda)} - \{\mathbf{0}\}$. 令

$$\Psi(\lambda) = \Phi(\lambda) + (\mathbf{1} - \lambda\Phi(\lambda)\mathbf{1}) \frac{\eta(\lambda)}{\lambda\eta(\lambda)\mathbf{1}}.$$

于是 $\Psi(\lambda)$ 是一个 NF 型 Q 过程. 另一方面，如 $R(\lambda)$ 是任一 NF 型 Q 过程，则由 $\dim v = 1$ 知必有

$$R(\lambda) - \Phi(\lambda) = Z(\lambda)\eta(\lambda).$$

从而由 $R(\lambda)$ 的诚实性得 $Z(\lambda) = (\mathbf{1} - \lambda\Phi(\lambda)\mathbf{1})/(\lambda\eta(\lambda)\mathbf{1})$，故此时有 $|NF| = 1$.

最后，如果 $C(\dim u > 0)$ 或 $\overline{C}$，则 $\mathbf{1} - \lambda\Phi(\lambda)\mathbf{1} \neq \mathbf{0}$. 若还有 $\dim v > 1$，可以取线性无关的行协调解族 $\eta^1(\lambda), \eta^2(\lambda)$，以及任意 $c > 0$，使得

$$\Psi^c(\lambda) = \Phi(\lambda) + (\mathbf{1} - \lambda\Phi(\lambda)\mathbf{1}) \frac{c\eta^1(\lambda) + \eta^2(\lambda)}{c\lambda\eta^1(\lambda)\mathbf{1} + \lambda\eta^2(\lambda)\mathbf{1}}. \tag{13.1.40}$$

是一个 NF 型 Q 过程. 由线性无关性易见对于不同的 c，$\Psi^c(\lambda)$ 是不同的 Q 过程，从而 $|NF| = \infty$. 注意

$$\begin{aligned}
&\overline{(\dim v = 0)(\overline{C} \cup C(\dim u > 0))} \\
&= (\dim v > 0) \cup (C(\dim u = 0)), \\
&= (\dim v = 1) \cup (C(\dim u = 0)) \\
&\quad \cup (\dim v > 1)((C(\dim u > 0)) \cup \overline{C}).
\end{aligned}$$

NF 型的判准得证.

14　NBF 型

注意只要 $|NB|$ 和 $|NF|$ 之一为 0，就有 $|NBF| = 0$，因此，若 $\overline{C} \cup (\dim u > 0)(\dim v = 0)$ 时，$|NBF| = 0$.

若 $C(\dim u = 0)$ 成立，则唯一的 Q 过程 $\Phi(\lambda)$ 是 NBF 型. 因此，$|NBF| = 1$.

若 $C(\dim v = 1)$ 成立，此时 $|NF| = 1$. 且它也是 B 型的. 因此

$|NBF| = 1$.

若$C(\dim u > 0)(\dim v > 0)$成立，此时，由(13.1.40)所定义的每一个$Q$过程均为$NBF$型，从而$|NBF| = \infty$. 注意

$$\overline{\overline{C} \cup (\dim u > 0)(\dim v = 0)} = C((\dim u = 0) \cup (\dim v > 0))$$
$$= C((\dim u = 0) \cup (\dim v = 1)) \cup C(\dim u > 0)(\dim v > 1).$$

由此得NBF型的判准.

15　$N(B \cup F)$型

这是NB型和NF型判准的综合.

16　NG型

若$\overline{C}H(\dim v = 0)$，则$Q$过程唯一且非诚实，从而$|NG| = 0$.

若CH条件成立，从而$C(\dim v = 0)$成立，显然有$|NG| = 1$.

若$\overline{C}H(\dim v = 1)$成立，则由引理13.1.10知$|F| = 0$. 再由$NF$型的判准知$|NF| = 1$，立得$|NG| = 1$.

若$\overline{H}$成立，则由引理13.1.7知$|NG| = \infty$.

若$\overline{C}H(\dim v > 1)$成立，则$|NG| \geqslant |NF| = \infty$.

显然，

$$\overline{\overline{C}H(\dim v = 0)} = C \cup \overline{H} \cup (\dim v > 0)$$
$$= CH \cup \overline{C}H(\dim v = 1) \cup \overline{H} \cup \overline{C}H(\dim v > 1).$$

由此得NG型的判准.

17　$N\overline{B}\,\overline{F}$型

重复$\overline{B}\,\overline{F}$型之证.

18　$NB\overline{F}$型

若$C(\dim u = 0)$，则$|G| = 1 = |F|$，从而$|NB\overline{F}| = 0$；如$\overline{C}$，则$|NB\overline{F}| \leqslant |NB| = 0$. 反之，若$C(\dim u > 0)$. 此时，$C\overline{H}$成立，由引理13.1.7知$|NB\overline{F}| = \infty$.

19　$N\overline{F}$型

与$\overline{F}$型相同.

20　$N\overline{B}F$型

若$C \cup (\dim v = 0)$成立，则$|N\overline{B}F| \leqslant |N\overline{B}| = 0$　或者$|N\overline{B}F| \leqslant |NF| = 0$.

若 $\overline{C}(\dim v=1)$ 成立,则 $|NF|=1$,且这唯一的 NF 型也是 $\overline{B}$ 型的,从而 $|N\overline{B}F|=1$.

若 $\overline{C}(\dim v>1)$ 成立,则由(13.1.40)所构造的每个 Q 过程均为 $N\overline{B}F$ 型的,从而 $|N\overline{B}F|=\infty$. 显然,$\overline{C\cup(\dim v=0)}=\overline{C}(\dim v>1)$,$N\overline{B}F$ 型的判别得证.

21　$N\overline{B}$ 型

若 $C\cup H(\dim v=0)$ 成立,则 $|N\overline{B}|\leqslant|\overline{B}|=0$.

若 $\overline{C}H(\dim v=1)$ 成立,则 $|NB|=0$, $|N\overline{B}\ \overline{F}|=0$, $|B|=1$, $|NF|=1$. 从而 $|N\overline{B}|=1$;

若 $\overline{C}\overline{H}$ 成立,则由引理 13.1.7 知 $|N\overline{B}\ \overline{F}|=\infty$,从而 $|N\overline{B}|=\infty$;

若 $\overline{C}H(\dim v>1)$ 成立,则由(13.1.40)所构造的每个 Q 过程均为 $N\overline{B}$ 型,从而 $|N\overline{B}|=\infty$;显然

$$\begin{aligned}\overline{C\cup H(\dim v=0)}&=\overline{C}(\overline{H}\cup(\dim v>0))\\&=\overline{C}\overline{H}\cup\overline{C}H(\dim v=1)\cup\overline{C}H(\dim v>1).\end{aligned}$$

$N\overline{B}$ 型的判别得证.

22　$N(\overline{B}\cup\overline{F})$ 型

这是 $N\overline{B}$ 和 $N\overline{F}$ 的组合. 至此,我们已经全部证明了表 1 和表 2.

§2　含瞬时态 Q 过程的定性理论

含瞬时态 Q 过程的定性理论,虽然取得一系列的结果,但相对于全稳定 Q 过程较为完整的定性理论来说,还相差甚远. 首先,我们不能对一般含瞬时态 Q 过程恰当的定义 F 型 Q 过程;其次,关于 B 型 Q 过程存在性也还未彻底解决. 由于我们已经在前面讨论了含瞬时态 Q 过程及诚实 Q 过程的存在性、唯一性. 下面仅讨论含瞬时态 B 型 Q 过程及诚实 B 型 Q 过程的存在性、唯一性.

(一)　B 型 Q 过程的定义及性质

D. williams[4] 首先对诚实 Q 过程给出了满足 Kolmogorov 向后

方程的定义，并且给出了定义的几种等价形式. 下面给出的定义就是其中的一种.

设 $Q=(q_{ij})$ 是 E 上 $Q-$ 矩阵，$P(t)$ 是 Q 过程(不要求诚实). 任意 $b\in E$，让 $f_{ib}(t), g_{bj}(t)(i,j\in E-\{b\})$ 是 K. L. Chung[1] Ⅱ §11, §12 中的首达和末离函数，那么

$$p_{ib}(t)=\int_0^t f_{ib}(s)p_{bb}(t-s)\mathrm{d}s,\qquad (i\in E-\{b\}),$$

$$p_{bj}(t)=\int_0^t p_{bb}(s)g_{bj}(t-s)\mathrm{d}s,\qquad (j\in E-\{b\}).$$

${}_bP(t)$ 表示禁止概率半群，由 K. L. Chung[1] 知，${}_bP(t)$ 是 $Q_{E-\{b\}}$ 过程，并且

$$g_{bj}(t)\geqslant \sum_{i\in E-\{b\}} q_{bi}\,{}_bp_{ij}(t),\qquad (j\in E-\{b\},t>0). \tag{13.2.1}$$

定义 13.2.1 设 $P(t)$ 是 Q 过程，$b\in E$，称 $P(t)$ 的 KB_b 成立. 如果

$$g_{bj}(t)=\sum_{i\in E-\{b\}} q_{bi}\,{}_bp_{ij}(t),\qquad (j\in E-\{b\},t>0). \tag{13.2.2}$$

称 $P(t)$ 是 B 型的，如果对任意 $i\in E$，$P(t)$ 的 KB_i 均成立.

让 $\Psi(\lambda), {}_b\Psi(\lambda), \xi_i^b(\lambda), \eta_j^b(\lambda)$ 分别表示 $P(t), {}_bP(t), f_{ib}(t), g_{bj}(t)$ 的拉氏变换；$\xi^b(\lambda)=(\xi_i^b(\lambda); i\in E-\{b\})$ 是 $E-\{b\}$ 上列向量；$\eta^b(\lambda)=(\eta_j^b(\lambda); j\in E-\{b\})$，$e^b=(q_{bj}; j\in E-\{b\})$ 是 $E-\{b\}$ 上行向量. 那么(13.2.2) 等价于

$$\eta^b(\lambda)=e^b\,{}_b\Psi(\lambda). \tag{13.2.3}$$

定理 13.2.1 若 $q_b<+\infty$，那么(13.2.3) 成立当且仅当

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\Big(1-\lambda\sum_{j\in E}\psi_{bj}(\lambda)\Big)=q_b-\sum_{j\in E-\{b\}}q_{bj}.$$

证明 由分解定理

$$\Psi(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & \mathbf{0}\\ 0 & {}_b\Psi(\lambda)\end{pmatrix}+r_b(\lambda)\begin{pmatrix}1\\ \xi^b(\lambda)\end{pmatrix}(1\quad \eta^b(\lambda)),$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1-\lambda\sum_{j\in E}\psi_{bj}(\lambda))$$
$$=q_b-\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta^b(\lambda)1$$
$$=q_b-\lim_{\lambda\to\infty}\lambda e^b\,{}_b\Psi(\lambda)1-\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\bar{\eta}(\lambda)1,$$

其中 $\eta^b(\lambda)=e^b\,{}_b\Psi(\lambda)+\bar{\eta}(\lambda),\bar{\eta}(\lambda)\in L^0_{{}_b\Psi(\lambda)}$.

因 $\lambda\bar{\eta}(\lambda)1$ 关于 λ 单调增，故 $\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1-\lambda\sum_{j\in E}\psi_{bj}(\lambda))=q_b-\sum_{j\in E-\{b\}}q_{bj}$. 等价于 $\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\bar{\eta}(\lambda)1=0$. 后者等价于 $\bar{\eta}(\lambda)=\mathbf{0}$，从而也等价于(13.2.3)成立.

由定理 13.2.1 及定理 13.1.1 知，当 Q 为全稳定时，此处 B 型 Q 过程的定义与通常全稳定情况 B 型 Q 过程的定义是一致的.

关于 B 型 Q 过程的禁止概率，有如下结果. 它在 B 型 Q 过程的定性理论中起重要作用.

定理 13.2.2 设 Q 是 Q - 矩阵.

(i) 若 $\Psi(\lambda)$ 是 Q 过程，任取 $b\in E$，禁止状态 b 分解为

$$\Psi(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & {}_b\Psi(\lambda)\end{pmatrix}+r_b(\lambda)\begin{pmatrix}1\\ \xi^b(\lambda)\end{pmatrix}(1\quad \eta^b(\lambda)).$$

那么，$\Psi(\lambda)$ 是 B 型的当且仅当 ${}_b\Psi(\lambda)$ 是 B 型的，而且 $\eta^b(\lambda)=e^b\,{}_b\Psi(\lambda)$. 其中 $e^b=(q_{bj};j\in E-\{b\})$ 是 $E-\{b\}$ 上行向量.

(ii) 若 $\Psi(\lambda)$ 是 B 型 Q 过程，且 ${}_H\Psi(\lambda)$ 在 $E-H$ 上满足连续性条件(从而是 Q_{E-H} 过程)，那么 ${}_H\Psi(\lambda)$ 是 $E-H$ 上 B 型 Q_{E-H} 过程，而且对任意 $i\in E-H$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1-\lambda\sum_{j\in E-H}{}_H\psi_{ij}(\lambda))\geqslant\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1-\lambda\sum_{j\in E}\psi_{ij}(\lambda))+\sum_{j\in H}q_{ij}. \tag{13.2.4}$$

证明 (i) 对任意 $i\in E-\{b\}$，由分解定理

$${}_b\Psi(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & {}_{ib}\Psi(\lambda)\end{pmatrix}+{}_br_i(\lambda)\begin{pmatrix}1\\ {}_b\xi^i(\lambda)\end{pmatrix}(1\quad {}_b\eta^i(\lambda)). \tag{13.2.5}$$

其中 ${}_b\eta^i(\lambda)\geqslant{}_be^i\,{}_{ib}\Psi(\lambda)$，${}_be^i=(q_{ij};j\in E-\{b,i\})$.

$$ {}_i\Psi(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}_{ib}\Psi(\lambda) \end{pmatrix} + {}_i r_b(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ {}_i\xi^b(\lambda) \end{pmatrix} (1 \quad {}_i\eta^b(\lambda)). \tag{13.2.6} $$

$$ \Psi(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}_i\Psi(\lambda) \end{pmatrix} + r_i(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ \xi^i(\lambda) \end{pmatrix} (1 \quad \eta^i(\lambda)). \tag{13.2.7} $$

其中 $\eta^i(\lambda) \geqslant e^i {}_i\Psi(\lambda)$.

令

$$ \eta^i(\lambda) = e^i {}_i\Psi(\lambda) + \bar{\eta}^i(\lambda), \qquad {}_b\eta^i(\lambda) = {}_b e^i {}_{ib}\Psi(\lambda) + {}_b\bar{\eta}^i(\lambda). $$

由(13.2.5)—(13.2.7)及分解定理

$$ \bar{\eta}^i(\lambda)|_{E-\{i,b\}} = {}_b\bar{\eta}^i(\lambda) + \bar{\eta}^i_b(\lambda)\, {}_i\eta^b(\lambda). \tag{13.2.8} $$

其中 $\bar{\eta}^i(\lambda)|_{E-\{i,b\}}$ 表示 $\bar{\eta}^i(\lambda)$ 限制在 $E-\{i,b\}$ 上.

若${}_b\Psi(\lambda)$ 是 B 型的,则${}_b\eta^i(\lambda) = {}_b e^i {}_{ib}\Psi(\lambda)$. 由(13.2.8)式

$$ \bar{\eta}^i(\lambda)|_{E-\{i,b\}} = {}_b e^i {}_{ib}\Psi(\lambda) - (e^i {}_i\Psi(\lambda))|_{E-\{i,b\}} + \eta^i_b(\lambda)\, {}_i\eta^b(\lambda), $$

$$ \begin{aligned} \lambda\bar{\eta}^i(\lambda)\mathbf{1} &= \lambda\bar{\eta}^i_b(\lambda) + \lambda \sum_{j\in E-\{i,b\}} \bar{\eta}^i_j(\lambda) \\ &\leqslant \lambda\bar{\eta}^i_b(\lambda) + \lambda\eta^i_b(\lambda) \sum_{j\in E-\{i,b\}} {}_i\eta^b_j(\lambda). \end{aligned} $$

因为

$$ \lim_{\lambda\to\infty} \lambda\bar{\eta}^i_b(\lambda) = 0, \quad \lim_{\lambda\to\infty} \lambda\eta^i_b(\lambda) = q_{bi}, $$

$$ \lim_{\lambda\to\infty} \sum_{j\in E-\{i,b\}} {}_i\eta^b_j(\lambda) = 0. $$

因此$\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda\bar{\eta}^i(\lambda)\mathbf{1} = 0$,从而 $\bar{\eta}^i(\lambda) \equiv \mathbf{0}$,故 $\Psi(\lambda)$ 的 KB_i 成立.

如果还有 $\eta^b(\lambda) = e^b {}_b\Psi(\lambda)$,则 $\Psi(\lambda)$ 的 KB_b 成立. 从而 $\Psi(\lambda)$ 是 B 型 Q 过程.

反之,若 $\Psi(\lambda)$ 是 B 型 Q 过程,那么 $\eta^i(\lambda) = e^i {}_i\Psi(\lambda)$,从而

$$ \begin{aligned} \eta^i(\lambda)|_{E-\{i,b\}} &= e^i\left(\begin{pmatrix} 0 \\ {}_{ib}\Psi(\lambda) \end{pmatrix} + {}_i r_b(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ {}_i\xi^b(\lambda) \end{pmatrix} {}_i\eta^b(\lambda) \right) \\ &= {}_b e^i {}_{ib}\Psi(\lambda) + e^i \begin{pmatrix} {}_i r_b(\lambda) \\ {}_i\psi_{\cdot b}(\lambda) \end{pmatrix} {}_i\eta^b(\lambda) \\ &= {}_b e^i {}_{ib}\Psi(\lambda) + \eta^i_b(\lambda)\, {}_i\eta^b(\lambda). \end{aligned} $$

由(13.2.8)知

$$ {}_b\eta^j(\lambda) = {}_b e^j\, {}_b\Psi(\lambda), $$

故${}_b\Psi(\lambda)$是B型Q过程，显然$\eta^b(\lambda) = e^b\, {}_b\Psi(\lambda)$.

(ii) 如果$\Psi(\lambda)$是B型Q过程，$H \subsetneq E$，H是有限集，那么${}_H\Psi(\lambda)$在$E-H$上满足连续性条件. 由(i)知此时${}_H\Psi(\lambda)$是B型Q_{E-H}过程，且(13.2.4)式等号成立.

现设H是无限集，取有限集H_n，$H_n \uparrow H\ (n\to\infty)$，那么${}_{H_n}\Psi(\lambda)$是$B$型$Q_{E-H_n}$过程，而且对任意$i \in E - H_n$

$$ \lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1-\lambda\sum_{j\in E-H_n} {}_H\psi_{ij}(\lambda)) = \lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1-\lambda\sum_{j\in E}\psi_{ij}(\lambda)) + \sum_{j\in H_n} q_{ij}. $$

由禁止概率定义，当$n\to\infty$时

$$ {}_{H_n}\psi_{ij}(\lambda) \downarrow {}_H\psi_{ij}(\lambda), \qquad (i,j\in E-H, \lambda > 0). $$

对${}_{H_n}\Psi(\lambda)$，${}_H\Psi(\lambda)$分别禁止状态$b\in E-H$. 由于${}_H\Psi(\lambda)$满足连续性条件

$$ {}_{H_n}\Psi(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}_{H_n\cup\{b\}}\psi_{ij}(\lambda) \end{bmatrix} + {}_{H_n}r_b(\lambda)\begin{pmatrix} 1 \\ {}_{H_n}\xi^b(\lambda) \end{pmatrix} \times (1 \quad {}_n e^b \cdot {}_{H_n\cup\{b\}}\psi_{ij}(\lambda)), $$

$$ {}_H\Psi(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}_{H\cup\{b\}}\Psi(\lambda) \end{pmatrix} + {}_H r_b(\lambda)\begin{pmatrix} 1 \\ {}_H\xi^b(\lambda) \end{pmatrix}(1 \quad {}_H\eta^b(\lambda)). $$

其中${}_n e^b = (q_{bj}; j\in E-\{H_n\cup\{b\}\})$.

$$ {}_{H_n}r_b(\lambda) = {}_{H_n}\psi_{bb}(\lambda) \downarrow {}_H\psi_{bb}(\lambda) = {}_H r_b(\lambda), \qquad (n\to+\infty). $$

对任意$j\in E-\{H\cup\{b\}\}$，由单调收敛定理

$$ {}_H\eta_j^b(\lambda) = \frac{1}{{}_H r_b(\lambda)}\, {}_H\psi_{bj}(\lambda) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{{}_{H_n}r_b(\lambda)}\, {}_{H_n}\psi_{bj}(\lambda) $$

$$ = \lim_{n\to\infty} {}_{H_n}\eta_j^b(\lambda) = \lim_{\lambda\to\infty} {}_n e^b \cdot {}_{H_n\cup\{b\}}\psi_{\cdot j}(\lambda) = {}_\infty e^b \cdot {}_{H\cup\{b\}}\psi_{\cdot j}(\lambda). $$

其中${}_\infty e^b = (q_{bj}; j\in E-\{H\cup\{b\}\})$，

从而${}_H\Psi(\lambda)$是B型Q_{E-H}过程.

注意

$$ \lambda(1-\lambda\sum_{j\in E-H} {}_H\psi_{bj}(\lambda)) \geqslant \lambda(1-\lambda\sum_{j\in E-H_n} {}_{H_n}\psi_{bj}(\lambda)), $$

$$ (b\in E-H, n\in N). $$

从而

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\Big(1-\lambda\sum_{j\in E-H}{}_{H}\psi_{bj}(\lambda)\Big)\\
\geqslant&\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\Big(1-\lambda\sum_{j\in E}\psi_{bj}(\lambda)\Big)+\sum_{j\in H_n}q_{bj},\qquad (n\in N).
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\Big(1-\lambda\sum_{j\in E-H}{}_{H}\psi_{bj}(\lambda)\Big)\\
\geqslant&\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\Big(1-\lambda\sum_{j\in E}\psi_{bj}(\lambda)\Big)+\sum_{j\in H}q_{bj}.
\end{aligned}
$$

注 对任意 Q 过程 $\Psi(\lambda)$，(13.2.4) 均成立. 换言之，当 $\Psi(\lambda)$ 不是 B 型 Q 过程时，(13.2.4) 式仍然成立. 这只要注意当 $H=\{b\}$ 时，利用分解定理可得(13.2.4) 等号成立；同样可证当 H 为有限集时，(13.2.4) 式等号成立；然后，类似于上面证明可得(13.2.4) 式成立.

推论 13.2.1 若 $\Psi(\lambda)$ 是 Q 过程，那么

(i) $\Psi(\lambda)$ 是 B 型的当且仅当 $\Psi^{\Delta}(\lambda)$ 是 B 型的，其中 $\Delta\notin E$

$$
\Psi^{\Delta}_{ij}(\lambda)=\begin{cases}\psi_{ij}(\lambda), & i,j\in E;\\[4pt] \dfrac{1}{\lambda}-\displaystyle\sum_{k\in E}\psi_{ik}(\lambda); & i\in E,j=\Delta\\[4pt] \dfrac{1}{\lambda}\delta_{\Delta j}, & i=\Delta,j\in E.\end{cases}
$$

(ii) 对任意有限集 $H\subset E$，$\Psi(\lambda)$ 是 B 型的当且仅当 ${}_{H}\Psi(\lambda)$ 是 B 型的和 $\eta^{(i)}(\lambda)=e^{(i)}\,{}_{H}\Psi(\lambda)\,(i\in H)$ 同时成立，其中

$$
\Psi(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & {}_{H}\Psi(\lambda)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}A(\lambda) & A(\lambda)\eta(\lambda)\\ \xi(\lambda)A(\lambda) & \xi(\lambda)A(\lambda)\eta(\lambda)\end{pmatrix}
$$

$$
\eta(\lambda)=\begin{bmatrix}\eta^{(i_1)}(\lambda)\\ \cdots\\ \eta^{(i_n)}(\lambda)\end{bmatrix},
$$

$H=\{i_1,\cdots,i_n\}$，　　$e^{(i)}=(q_{ij};j\in E-H)$ 是行向量.

证明 (i) 自定理 13.2.2(i) 可得. (ii) 可仿定理 13.2.2(i) 证明.

定理 13.2.3 设 $\Psi^{(n)}(\lambda)$ 是 E 上 B 型 $Q^{(n)}$ 过程，$\Psi^{(\infty)}(\lambda)$ 是 E 上 $Q^{(\infty)}$ 过程，如果 $\Psi^{(n)}(\lambda)\uparrow$（或 $\downarrow$）$\Psi^{(\infty)}(\lambda)$，那么 $\Psi^{(\infty)}(\lambda)$ 是 B 型的，且 $Q^{(\infty)}=\lim\limits_{n\to\infty}Q^{(n)}$.

证明 使用定理 13.2.2，单调收敛定理及 $Q-$ 矩阵上极限不等式（引理 11.5.4）．可知定理的结论成立．

（二） B 型 Q 过程的非唯一性

以下定理说明：如果带瞬时态的 B 型 Q 过程存在，那么 B 型 Q 过程必不唯一．

定理 13.2.4 设 Q 是带瞬时态的 $Q-$ 矩阵，如果存在 B 型 Q 过程，那么必存在无穷多个 B 型 Q 过程．

证明 设 $\Psi(\lambda)$ 是任意 B 型 Q 过程，任取瞬时态 $b\in E$，对 $\Psi(\lambda)$ 禁止 b，分解得

$$\Psi(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & {}_b\Psi(\lambda)\end{pmatrix}+\psi_{bb}(\lambda)\begin{pmatrix}1\\ \xi^{(b)}(\lambda)\end{pmatrix}(1\quad e^{(b)}{}_b\Psi(\lambda)).$$

其中

$$\psi_{bb}(\lambda)=(c_b+\lambda+\lambda[e^{(b)}{}_b\Psi(\lambda),\xi^{(b)}])^{-1},$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda[e^{(b)}{}_b\Psi(\lambda),1-\xi^{(b)}]\leqslant c_b<+\infty.$$

任取 $c\in(c_b,+\infty)$，令

$$\psi_{bb}^c(\lambda)=(c+\lambda+\lambda[e^{(b)}{}_b\Psi(\lambda),\xi^{(b)}])^{-1},$$

$$\Psi^c(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & {}_b\Psi(\lambda)\end{pmatrix}+\psi_{bb}^c(\lambda)\begin{pmatrix}1\\ \xi^{(b)}(\lambda)\end{pmatrix}(1\quad e^{(b)}{}_b\Psi(\lambda)).$$

由定理 13.2.2 知，$\Psi^c(\lambda)$ 为 B 型 Q 过程．且当 $c_1\neq c_2$ 时，$\Psi^{c_1}(\lambda)\neq\Psi^{c_2}(\lambda)$．从而存在无穷多个 B 型 Q 过程．

虽然 B 型 Q 过程不唯一，但 NB 型 Q 过程仍可能唯一，见下面定理 13.2.10.

（三） B 型（NB 型）Q 过程的存在性及 NB 型 Q 过程的唯一性

与全稳定 $Q-$ 矩阵不同，带瞬时态的 $Q-$ 矩阵，可以存在 Q 过程而不存在 B 型 Q 过程．

定理 13.2.5 (i) 存在带瞬时态的 $Q-$ 矩阵，它存在 Q 过程，

但不存在 B 型 Q 过程.

(ii) 存在带瞬时态的 $Q-$ 矩阵,它的瞬时态保守,存在 Q 过程,但不存在 B 型 Q 过程.

证明 设

$$Q=\begin{pmatrix} -\infty & b_1 & b_2 & \cdots \\ & -q_1 & & \\ & & -q_2 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

其中 $b_i\geqslant 0, 0\leqslant q_i<+\infty, \sum\limits_{i\in E}\dfrac{b_i}{\lambda-q_i}<+\infty \quad (\lambda>0)$,存在子集 $K\subset\{1,2,\cdots\}$ 使

$$\sum_{i\in K}b_i<+\infty,\quad \sup_{i\in K}q_i=+\infty.$$

由定理 9.3.1 存在 Q 过程. 现证不存在 B 型 Q 过程.

反设存在 B 型 Q 过程 $P(t)$,设 $E=\{0,1,\cdots\}$. 让 $\Delta\overline{\in}E$; $i,j\in E\cup\{\Delta\}$. 令

$$\tilde{p}_{ij}(\lambda)=\begin{cases} p_{ij}(t), & i,j\in E; \\ \delta_{\Delta j}, & i=\Delta; \\ 1-\sum\limits_{k\in E}p_{ik}(t), & i\in E, j=\Delta. \end{cases}$$

让 $\tilde{\Psi}(\lambda),\Psi(\lambda)$ 分别是 $\tilde{P}(t),P(t)$ 的拉氏变换. 由 $P(t)$ 是 B 型的及定理 13.2.1 知

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^2\tilde{\psi}_{i\Delta}(\lambda)=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\Big(1-\lambda\sum_{j\in E}\psi_{ij}(\lambda)\Big)=q_i.$$

从而 $\tilde{P}(t)$ 有 $Q-$ 矩阵

$$\overline{Q}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ c & -\infty & b_1 & \cdots \\ q_1 & 0 & -q_1 & \cdots \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

对于 $\tilde{P}(t)$ 禁止状态 0,分解得

$$\tilde{\Psi}(\lambda)=\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}_0\tilde{\Psi}(\lambda) \end{pmatrix}+\tilde{r}_0(\lambda)\begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{\xi}^0(\lambda) \end{pmatrix}(1\quad \tilde{\eta}^0(\lambda)),$$

其中$_3\tilde{\Psi}(\lambda)$是$\{\Delta\}\cup E-\{0\}$上$Q_{\{\Delta\}\cup E-\{0\}}$过程. 注意到$Q_{\{\Delta\}\cup E-\{0\}}$是全稳定的保守$Q$－矩阵,并且零流出,从而$Q_{\{\Delta\}\cup E-\{0\}}$过程唯一,由$\overline{Q}$是单瞬时$Q$－矩阵,这与定理7.1.2矛盾. 从而不存在$B$型$Q$过程.

以下是含瞬时态B型Q过程存在的一个必要条件.

定理 13.2.6 如果Q是E上拟Q－矩阵,那么

(i) 若存在B型Q过程,那么瞬时态全保守;

(ii) 若存在诚实B型Q过程,那么Q保守.

证明 由分解定理及定理13.2.1及(13.2.3)式可知定理结论成立.

定理 13.2.7 设Q是任意Q－矩阵,若存在B型Q过程,那么存在诚实B型Q过程当且仅当Q保守.

证明 全稳定态情况显然成立. 不妨设Q含瞬时态. 条件的必要性由定理13.2.6可得. 以下证明充分性.

设$\Psi(\lambda)$是B型Q过程,E_1,E_2分别表示Q的稳定态和瞬时态之集,让$E_2=\{i_1,i_2,\cdots\}$,由分解定理得

$$\Psi(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & {}_{i_1}\Psi(\lambda)\end{pmatrix}+\psi_{i_1i_1}(\lambda)\begin{pmatrix}1\\ \xi^{i_1}(\lambda)\end{pmatrix}(1\quad \eta^{i_1}(\lambda)),$$

$$\psi_{i_1i_1}(\lambda)=(c_{i_1}+\lambda+\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta^{i_1}(\lambda)(1-\xi^{i_1})+$$
$$+\lambda\eta^{i_1}(\lambda)\xi^{i_1})^{-1},\quad c_{i_1}\geqslant 0.$$

令

$$\psi_{i_1i_1}^{(1)}(\lambda)=(\lambda+\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta^{i_1}(\lambda)(1-\xi^{i_1})+\lambda\eta^{i_1}(\lambda)\xi^{i_1})^{-1},$$

$$\Psi^{(1)}(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & {}_{i_1}\Psi(\lambda)\end{pmatrix}+\psi_{i_1i_1}^{(1)}(\lambda)\begin{pmatrix}1\\ \xi^{i_1}(\lambda)\end{pmatrix}(1\quad \eta^{i_1}(\lambda)).$$

由$\Psi^{(1)}(\lambda)$及i_2按以上方法可得到$\Psi^{(2)}(\lambda)$,…,从而可依次得到一列$\{\Psi^{(n)}(\lambda)\}$,显然$\Psi(\lambda)\leqslant\Psi^{(1)}(\lambda)\leqslant\cdots\leqslant\cdots$(若$E_2$为有限集时,取$\{\Psi^{(n)}(\lambda)\}$为尾定序列). 由定理13.2.2知$\Psi^{(n)}(\lambda)$均为$B$型$Q$过程. 由定理13.2.3知$\Psi^{(\infty)}(\lambda)=\lim\limits_{n\to\infty}\Psi^{(n)}(\lambda)$是$B$型$Q$过程. 易知,对任意$i_n\in E_2$,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1-\lambda\sum_{j\in E}\psi_{ij}^{(n)}(\lambda))=0.$$

从而,对任意 $i\in E_2$,有

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1-\lambda\sum_{j\in E}\psi_{ij}^{(\infty)}(\lambda))=0.$$

由于 Q 保守,从而

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1-\lambda\Psi^{(\infty)}(\lambda)\mathbf{1})=0.$$

取不等于零的非负可和行向量 $\alpha=(\alpha_i,i\in E)$,令

$$R(\lambda)=\Psi^{(\infty)}(\lambda)+(1-\lambda\Psi^{(\infty)}(\lambda)\mathbf{1})\frac{\alpha\Psi^{(\infty)}(\lambda)}{\lambda\alpha\Psi^{(\infty)}(\lambda)\mathbf{1}}.$$

那么 $R(\lambda)$ 是诚实 Q 过程,以下证明 $R(\lambda)$ 是 B 型的.

对任意 $i\in E$,分别分解 $R(\lambda),\Psi^{(\infty)}(\lambda)$

$$R(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & {}_iR(\lambda)\end{pmatrix}+r_{ii}(\lambda)\begin{pmatrix}1\\ \mathbf{1}-\lambda\,{}_iR(\lambda)\mathbf{1}\end{pmatrix}\times(1\quad e^{(i)}\,{}_iR(\lambda)+\bar\eta(\lambda)).$$

$$\Psi^{(\infty)}(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & {}_i\Psi^{(\infty)}(\lambda)\end{pmatrix}+\psi_{ii}^{(\infty)}(\lambda)\begin{pmatrix}1\\ \xi^{(i)}(\lambda)\end{pmatrix}(1\quad e^{(i)}\,{}_i\Psi^{(\infty)}(\lambda)),$$

其中 $e^{(i)}=(q_{ij};i\in E-\{i\})$ 是行向量.

因此

$$\lambda r_{ii}(\lambda)(1+e^{(i)}\,{}_iR(\lambda)\mathbf{1}+\bar\eta(\lambda)\mathbf{1})=1.$$

由定理 13.2.1 及上式得

$$\begin{aligned}\lambda r_{ii}(\lambda)\bar\eta(\lambda)\mathbf{1}&=1-\lambda r_{ii}(\lambda)(1+e^{(i)}\,{}_iR(\lambda)\mathbf{1})\\&\overset{*}{\leqslant}1-\lambda\psi_{ii}^{(\infty)}(\lambda)(1+e^{(i)}\,{}_i\Psi^{(\infty)}(\lambda)\mathbf{1})\\&=1-\lambda\sum_{j\in E}\psi_{ij}^{(\infty)}(\lambda),\end{aligned}$$

所以

$$\lambda\bar\eta(\lambda)\mathbf{1}\leqslant\frac{1}{\lambda r_{ii}(\lambda)}\lambda(1-\lambda\sum_{j\in E}\psi_{ij}^{(\infty)}(\lambda))\to 0,\quad(\lambda\uparrow+\infty).$$

从而 $\bar\eta(\lambda)\equiv\mathbf{0}$,因此 $R(\lambda)$ 是 B 型的.

注 以上 * 使用了"若 $R(\lambda)\geqslant\Psi^{(\infty)}(\lambda)$,则 ${}_iR(\lambda)\geqslant{}_i\Psi^{(\infty)}(\lambda)$" 见 J. Neveu 中定理 3.4.2 和定理 3.4.3.

定理 13.2.8 设Q是含瞬时态的Q－矩阵.若存在唯一的诚实Q过程$R(\lambda)$,那么$R(\lambda)$是B型的,且任意Q过程均被$R(\lambda)$所控制(即$\Psi(\lambda)\leqslant R(\lambda)$).

证明 设$R(\lambda)$是唯一的诚实Q过程,那么$R(\lambda)$必是B型的.事实上,若存在瞬时态$b\in E$,使$R(\lambda)$的KB_b不成立,那么对$R(\lambda)$禁止b分解为

$$R(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & {}_bR(\lambda)\end{pmatrix}+r_{bb}(\lambda)\begin{pmatrix}1\\ \mathbf{1}-\lambda\,{}_bR(\lambda)\mathbf{1}\end{pmatrix}$$
$$\times(1\quad e^{(b)}\,{}_bR(\lambda)+\eta(\lambda)).$$

其中$\eta(\lambda)\in L^0_{{}_bR(\lambda)},\bar{\eta}(\lambda)\neq\mathbf{0},e^{(b)}=(q_{bj};j\in E-\{b\})$.
对任意$\mu>0$,令

$$\bar{\eta}^\mu=\mu\bar{\eta}(\lambda),$$

$$R^\mu(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & {}_bR(\lambda)\end{pmatrix}+r^\mu_{bb}(\lambda)\begin{pmatrix}1\\ \mathbf{1}-\lambda\,{}_bR(\lambda)\mathbf{1}\end{pmatrix}$$
$$\times(1\quad e^{(b)}\,{}_bR(\lambda)+\bar{\eta}^\mu(\lambda)).\tag{13.2.9}$$

其中

$$r^\mu_{bb}(\lambda)=(\lambda+\lambda[e^{(b)}\,{}_bR(\lambda)+\bar{\eta}^\mu(\lambda),\mathbf{1}])^{-1}.\tag{13.2.10}$$

那么$R^\mu(\lambda)$是诚实Q过程,当μ不同时$R^\mu(\lambda)$不同,矛盾!

若存在稳定态$i\in E$,使$R(\lambda)$的KB_i不成立,任取瞬时态$b\in E$,对$R(\lambda)$禁止$\{i,b\}$分解为

$$R(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & {}_{ib}R(\lambda)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}A(\lambda) & A(\lambda)\eta(\lambda)\\ \xi(\lambda)A(\lambda) & \xi(\lambda)A(\lambda)\eta(\lambda)\end{pmatrix},$$

其中

$$\eta(\lambda)=\begin{pmatrix}e^{(i)}\,{}_{ib}R(\lambda)+\bar{\eta}(\lambda)\\ \eta^{(b)}(\lambda)\end{pmatrix},\qquad e^{(i)}=(q_{ij};j\in E-\{i,b\}),$$

$$\bar{\eta}(\lambda)\in L^0_{{}_{ib}R(\lambda)},\bar{\eta}(\lambda)\neq\mathbf{0},\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\bar{\eta}(\lambda)\mathbf{1}<+\infty.$$

对任意$\mu>0$,令

$$\eta^\mu(\lambda)=\begin{pmatrix}e^{(i)}\,{}_{ib}R(\lambda)+\bar{\eta}(\lambda)\\ \eta^{(b)}(\lambda)+\mu\bar{\eta}(\lambda)\end{pmatrix}.$$

仿(13.2.9)、(13.2.10)可定义$A^\mu(\lambda)$(二维情况),$R^\mu(\lambda)$;得到无穷

多个不中断 Q 过程. 矛盾!从而 $R(\lambda)$ 是 B 型 Q 过程. 由定理 13.2.6 知 Q 保守.

设 $\Psi(\lambda)$ 是任意 Q 过程,显然, $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda(1-\lambda\sum\limits_{j\in E}\psi_{ij}(\lambda))=0$, $(i\in E_1)$.

设 $E_2=\{i_1,i_2,\cdots\}$ 是瞬时态之集,仿定理13.2.7的证明方法,可构造一列 Q 过程 $\{\Psi^{(n)}(\lambda)\}$

$$\Psi(\lambda)\leqslant\Psi^{(1)}(\lambda)\leqslant\cdots$$

对任意 $i_n\in E_2$,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1-\lambda\sum_{j\in E}\psi_{i_nj}^{(n)}(\lambda))=0. \qquad (13.2.11)$$

令

$$\Psi^{(\infty)}(\lambda)=\lim_{n\to\infty}\Psi^{(n)}(\lambda).$$

易证 $\Psi^{(\infty)}(\lambda)$ 是 Q 过程,由(13.2.11)及 $\Psi^{(n)}(\lambda)$ 关于 n 单调上升和 Q 保守,可得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1-\lambda\Psi^{(\infty)}(\lambda)1)=0. \qquad (13.2.12)$$

由上式及诚实 Q 过程唯一可得

$$\Psi^{(\infty)}(\lambda)=R(\lambda).$$

(否则可按通常方法构造无穷多个诚实 Q 过程). 从而 $\Psi(\lambda)\leqslant R(\lambda)$.

在上一部分,我们已经指出含瞬时态的 B 型 Q 过程存在必不唯一,但 NB 型 Q 过程仍可能唯一,下面定理给出 NB 型 Q 过程唯一的例子.

定理 13.2.9 存在含有限个瞬时态的 Q — 矩阵和"双无限"Q — 矩阵,它们存在唯一的诚实 B 型 Q 过程.

证明 由定理 9.4.1 知,以下 Kolmogorov 矩阵

$$Q=\begin{pmatrix}-\infty & 1 & 1 & \cdots\\ q_1 & -q_1 & & \\ q_2 & & -q_2 & \\ \vdots & & & \ddots\end{pmatrix}, \qquad (13.2.13)$$

其中 $0 < q_i < +\infty, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{q_i} < +\infty$.

存在唯一的诚实 Q 过程.

由定理 13.2.8,存在唯一诚实 Q 过程,则存在唯一诚实 B 型 Q 过程. 因此,Kolmogorov 矩阵(13.2.13) 及定理 11.5.1 中的"双无限"$Q-$ 矩阵,分别满足本定理的要求.

以下分别对有限个瞬时态无限个稳定态,无限个瞬时态有限个稳定态二种情况,讨论 B 型 Q 过程的定性理论.

设 Q 是 E 上拟 $Q-$ 矩阵,$E_1 = \{i: q_i < +\infty\}$,$E_2 = \{i: q_i = +\infty\}$. 在下面定理 13.2.10—13.2.12 中,我们均假定 $E_2 = \{b_1, \cdots, b_n\}$ 为有限集,E_1 为无限集.

定理 13.2.10　设 Q 是有限个瞬时态无限个稳定态的拟 $Q-$ 矩阵,那么存在 B 型 Q 过程当且仅当下列两条同时成立

(i) $\sum_{j \in E - \{b_k\}} q_{b_k j} = +\infty, \quad e^{(k)}\Phi(\lambda)1 < +\infty, \qquad (\lambda > 0; k = 1, \cdots, n)$.

(ii) 方程

$$\begin{cases} (\lambda I - Q_{E_1})\bar{\xi} = 0, \\ 0 \leqslant \bar{\xi} \leqslant 1, \end{cases} \qquad (\lambda > 0). \qquad (13.2.14)$$

有满足以下条件的 n 个解 $\bar{\xi}^{(k)}(\lambda) \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$.

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{n} \bar{\xi}^{(k)}(\lambda) \leqslant \bar{X}(\lambda); \qquad (13.2.15)$$

$$(2) \quad \bar{\xi}^{(k)}(\lambda) \in M^0_{\Phi(\lambda)}; \qquad (13.2.16)$$

$$(3) \quad \lim_{\lambda \to \infty} \lambda e^{(k)}\Phi(\lambda)(1 - \Phi\varepsilon^{(k)} - \bar{\xi}^{(k)}) < +\infty, \quad (k = 1, \cdots, n). \qquad (13.2.17)$$

其中 $\Phi(\lambda)$ 是最小 Q_{E_1} 过程,$\bar{X}(\lambda)$ 是(13.2.14) 的最大解,

$$\xi^{(k)} = \lim_{\lambda \downarrow 0} \bar{\xi}^{(k)}(\lambda), \qquad \Phi\varepsilon^{(k)} = \lim_{\lambda \downarrow 0} \Phi(\lambda)\varepsilon^{(k)},$$

$$e^{(k)} = (q_{b_k j}; j \in E_1), \qquad \varepsilon^{(k)} = (q_{i b_k}; i \in E_1).$$

证明　条件的充分性的证明仿照定理 7.2.6 充分性部分的证明,由推论 13.2.1 可知定理 7.2.6 证明中构造的 Q 过程是 B 型

的.

由定理 13.2.1 和定理 7.2.7 可得本定理条件的必要性.

定理 13.2.11 设 Q 是有限个瞬时态无限个稳定态的拟 Q－矩阵,那么存在诚实 B 型 Q 过程的充要条件是定理 13.2.10 中的条件(i)、(ii) 以及 Q 保守同时成立.

证明 由定理 13.2.10 及定理 13.2.7 立得本定理成立.

关于诚实 B 型 Q 过程的唯一性有以下结果.

定理 13.2.12 设 Q 是有限个瞬时态无限个稳定态的拟 Q－矩阵,那么诚实 B 型 Q 过程存在而唯一当且仅当以下几条同时成立

(i) Q 保守;

(ii) $e^{(k)}\Phi(\lambda)1 < +\infty$, $(k = 1,\cdots,n)$;

(iii) 方程

$$\begin{cases}(\lambda I - Q)\bar{\xi} = 0,\\ 0 \leqslant \bar{\xi} \leqslant 1.\end{cases}$$

有唯一的解族 $\{\bar{\xi}^{(k)}(\lambda);k = 1,\cdots,n\}$ 满足下列条件.

(1) $\sum\limits_{k=1}^{n}\bar{\xi}^{(k)}(\lambda) = \bar{X}(\lambda)$;

(2) $\bar{\xi}^{(k)}(\lambda) \in M^0_{\Phi(\lambda)}$, $(k = 1,\cdots,n)$.

其中 $\Phi(\lambda)$, $\bar{X}(\lambda)$, $e^{(k)}$, $e^{(k)}$ 以及 $\Phi e^{(k)}$ 的意义与定理 13.2.10 中类似.

证明 仿定理 11.4.4 的证明方法,即可证明本定理.

下面讨论无限个瞬时态有限个稳定态时 B 型 Q 过程的定性理论. 首先,我们不加证明给出 D. Williams[4] 中的一个定理.

定理 13.2.13(D. Williams) 设 Q 是全瞬时的拟 Q－矩阵,那么存在 NB 型 Q 过程当且仅当 (N)、(S) 条件成立以及 Q 保守. 当条件满足时,存在无穷多个 NB 型 Q 过程.

设 Q 是 E 上拟 Q－矩阵,$E_1 = \{i:q_i < +\infty\}$,$E_2 = \{i:q_i = +\infty\}$. 下面总假定 E_2 是无限集,$E_1 = \{b_1,\cdots,b_n\}$ 是有限集.

由于拟 Q－矩阵满足 (N) 条件,下面几个定理中 (N) 条件可以不写出来. 但为了与 D. Williams[3]、[4] 定理形式一致,也给出

来了.

定理 13.2.14 设 Q 是无限个瞬时态有限个稳定态的拟 Q—矩阵，那么存在 B 型 Q 过程当且仅当 (N)、(S) 条件成立以及所有瞬时态均保守.

证明 首先注意，由于 Q 只有有限个稳定态，从而 Q 满足 (N)、(S) 条件及所有瞬时态均保守等价于 $Q_{E_2}=(q_{ij};i,j\in E_2)$ 满足 (N)、(S) 条件及 Q_{E_2} 保守.

如果 $\Psi(\lambda)$ 是 B 型 Q 过程，对 $\Psi(\lambda)$ 禁止有限个状态集 E_1 分解得

$$\Psi(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & {}_{E_1}\Psi(\lambda)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}A(\lambda) & A(\lambda)\eta(\lambda)\\ \xi(\lambda)A(\lambda) & \xi(\lambda)A(\lambda)\eta(\lambda)\end{pmatrix}. \tag{13.2.18}$$

由推论 13.2.1，${}_{E_1}\Psi(\lambda)$ 是 B 型 Q_{E_2} 过程，由定理 5.1.1 及定理 13.2.6 知 Q_{E_2} 保守，并且满足 (N)、(S) 条件.

反之，若 Q_{E_2} 满足 (N)、(S) 条件以及保守，让 K 是 Q_{E_2} 的一个安全因子. 让 $K=K_1\cup K_2$，$K_1\cap K_2=\varnothing$，K_1,K_2 均为无限集. 令

$$\bar{q}_{ij}=\begin{cases}q_{ij}, & i,j\in E_2;\\ 1, & i=\Delta, j\in K_2;\\ -\infty, & i=j=\Delta;\\ 0, & i=\Delta, j\in E_2-K_2;\\ d_i, & i\in E_2, j=\Delta.\end{cases}$$

其中 $d_i=\sum\limits_{j\in E_2}q_{ij}$，$\quad(i\in E_2)$.

那么 $\bar{Q}=(\bar{q}_{ij};i,j\in\{\Delta\}\cup E_2)$ 是 $\{\Delta\}\cup E_2$ 上全瞬时保守的拟 Q—矩阵，K_1 是安全因子，从而 $\bar{Q}$ 是保守的拟 Q—矩阵满足 (N)、(S) 条件，由定理 13.2.13，存在 NB 型 $\bar{Q}$ 过程 $R(\lambda)$，对 $R(\lambda)$ 禁止状态 Δ 分解得

$$R(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & {}_\Delta R(\lambda)\end{pmatrix}+r_\Delta(\lambda)\begin{pmatrix}1\\ \xi^\Delta(\lambda)\end{pmatrix}(1\quad \eta^\Delta(\lambda)). \tag{13.2.19}$$

其中${}_{\Delta}R(\lambda)d \leqslant \xi^{\Delta}(\lambda) \leqslant 1 - \lambda_{\Delta}R(\lambda)1, d \equiv (d_i; i \in E_2)$ 是列向量，

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\xi^{\Delta}(\lambda) = d. \tag{13.2.20}$$

由定理 13.2.2，${}_{\Delta}R(\lambda)$ 是 B 型 Q_{E_2} 过程.

记 $e^{(k)} = (q_{b_k j}; j \in E_2), \varepsilon^{(k)} = (q_{i b_k}; i \in E_2)\quad (k = 1, \cdots, n)$ 是行向量和列向量. 显然

$$e^{(k)}1 \leqslant q_{b_k} < +\infty, \quad \sum_{k=1}^{n}\varepsilon^{(k)} = d.$$

令

$$\eta^{(k)}(\lambda) = e^{(k)}{}_{\Delta}R(\lambda), \xi^{(k)}(\lambda) = {}_{\Delta}R(\lambda)\varepsilon^{(k)}, \quad (\lambda > 0; k = 1, \cdots, n).$$

那么

$$\eta^{(k)}(\lambda) \in M_{{}_{\Delta}R(\lambda)}, \xi^{(k)}(\lambda) \in L_{{}_{\Delta}R(\lambda)}.$$

且

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda[\eta^{(k)}(\lambda), 1 - \xi^{(k)}] = \lim_{\lambda\to\infty}\lambda[e^{(k)}{}_{\Delta}R(\lambda), 1 - {}_{\Delta}R\varepsilon^{(k)}]$$

$$= e^{(k)}(1 - {}_{\Delta}R\varepsilon^{(k)}) < +\infty.$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta^{(k)}(\lambda) = e^{(k)}, \quad \lim_{\lambda\to\infty}\lambda\xi^{(k)}(\lambda) = \varepsilon^{(k)}.$$

令

$$-c_{ij} = q_{b_i b_j} + \lim_{\lambda\to\infty}\lambda[\eta^{(i)}(\lambda), \xi^{(j)}] < +\infty, \quad (i, j = 1, \cdots, n), \tag{13.2.21}$$

$$c_{ii} = q_{b_i} - \sum_{j\in E-\{b_i\}} q_{b_i j} - \sum_{j\neq i} c_{ij} +$$

$$+ \lim_{\lambda\to\infty}\lambda[\eta^{(i)}(\lambda), 1 - \sum_{j=1}^{n}\xi^{(j)}] < +\infty, \quad (i = 1, \cdots, n). \tag{13.2.22}$$

$$C = (c_{ij}; i, j = 1, \cdots, n) \text{ 是 } n \times n \text{ 矩阵.} \tag{13.2.23}$$

$$\lambda[\eta(\lambda), \xi] = (\lambda[\eta^{(i)}(\lambda), \xi^{(j)}]; i, j = 1, \cdots, n) \text{ 是 } n \times n \text{ 矩阵,} \tag{13.2.24}$$

$$G(\lambda) = C + \lambda I + \lambda[\eta(\lambda), \xi]. \tag{13.2.25}$$

由线性代数知识易知 $G(\lambda) = (g_{ij}(\lambda); i, j = 1, \cdots, n)$ 有非负逆矩阵. 记

$$A(\lambda) = G^{-1}(\lambda).$$

令

$$\eta(\lambda)=\begin{pmatrix}\eta^{(1)}(\lambda)\\ \cdots\\ \eta^{(n)}(\lambda)\end{pmatrix},\quad \xi(\lambda)=(\xi^{(1)}(\lambda),\cdots,\xi^{(n)}(\lambda)),$$

$$\Psi(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & {}_{\Delta}R(\lambda)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}A(\lambda) & A(\lambda)\eta(\lambda)\\ \xi(\lambda)A(\lambda) & \xi(\lambda)A(\lambda)\eta(\lambda)\end{pmatrix}.$$

(13.2.26)

由 n 维分解定理，$\Psi(\lambda)$ 是 Q 过程，由(13.2.21)—(13.2.26) 可得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1-\lambda\sum_{j\in E}\psi_{ij}(\lambda))=\begin{cases}0, & i\in E_2;\\ q_i-\sum_{j\in E-\{i\}}q_{ij}, & i\in E_1.\end{cases}$$

(13.2.27)

由推论 13.2.1，$\Psi(\lambda)$ 是 B 型 Q 过程.

关于 NB 型 Q 过程的存在性和唯一性有下列结果.

定理 13.2.15 设 Q 是有限个稳定态无限个瞬时态的拟 Q－矩阵，那么存在 NB 型 Q 过程当且仅当 Q 保守而且满足(N)、(S) 条件. 如果条件满足，那么 NB 型 Q 过程有无穷多个.

证明 由定理 13.2.14 及定理 13.2.6，可得条件的必要性.

反之，若 Q 保守且满足(N)、(S)，仿定理 13.2.14 充分性部分的证明，可以构造出 B 型 Q 过程 $\Psi(\lambda)$，由 (13.2.27) 及 Q 保守可得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1-\lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1})=\mathbf{0}. \tag{13.2.28}$$

由定理 13.2.13 可知定理 13.2.14 充分性证明中的 NB 型 $\overline{Q}$ 过程 $R(\lambda)$ 有无穷多个，从而有无穷多个不同的${}_{\Delta}R(\lambda)$，由禁止概率分解式的唯一性，可得到无穷多个不同的 B 型 Q 过程均满足(13.2.28). 如果这些过程都诚实，那么定理就已证明了；如果存在诚实 B 型 Q过程 $\Psi(\lambda)$ 满足(13.2.28)式，那么，取 E 上不等于零的非负可和行向量 $\alpha=(\alpha_i,i\in E)$，令

$$\overline{\Psi}(\lambda)=\Psi(\lambda)+(\mathbf{1}-\lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1})\frac{\alpha\Psi(\lambda)}{\lambda\alpha\Psi(\lambda)\mathbf{1}}. \tag{13.2.29}$$

那么$\overline{\Psi}(\lambda)$是诚实Q过程，由定理 13.2.7 的证明，可知$\overline{\Psi}(\lambda)$ 是 B 型

的；当取不同的 α 时，可得到不同的 $\Psi(\lambda)$，从而诚实 B 型 Q 过程有无穷多个.

§3　补充与注记

侯振挺、郭青峰[1] 就全稳定 Q − 矩阵完成了 Q 过程的定性理论这一深刻、繁难的工作. 张汉君[5] 得到引理 13.1.8 及引理 13.1.9，从而把侯、郭的结果（主要是 NG 型，F 型，$N\overline{F}$ 型及 $N\overline{B}\,\overline{F}$）简化. 由此可以知道 Q 过程唯一性准则中两个条件各自的作用，实际上

(i)　H 条件成立 $\Leftrightarrow$ 一切 Q 过程均为 F 型的.

(ii)　$C(\dim u = 0) \bigcup (\dim v = 0) \Leftrightarrow F$ 型 Q 过程唯一.

因此，$H\{C(\dim u = 0) \bigcup (\dim v = 0)\} = H(C \bigcup (\dim v = 0)) \Leftrightarrow Q$ 过程唯一.

D. Williams[4] 就全瞬时拟 Q − 矩阵得到 B 型 Q 过程的存在唯一性准则. 陈安岳[4] 解决了单瞬时拟 Q − 矩阵 B 型 Q 过程的存在性问题. 刘再明[1] 就有限稳定及有限瞬时拟 Q − 矩阵得到 B 型 Q 过程的存在性准则和唯一性准则.

本章的 §1 取材于侯振挺、郭青峰[1]，我们参考了陈木法[2] 的处理. §2 取材于刘再明[1].

14 极大 Q 过程

当 Q 是全稳定 Q — 矩阵时，“最小 Q 过程”的存在，对研究 Q 过程的存在性、唯一性、构造等问题，曾起过重要作用. 对一般 Q — 矩阵，我们提出了“极大 Q 过程”的概念. 对它进行了系统的研究. 从某种意义上看，“极大 Q 过程”是与“最小 Q 过程”相对的另一极端情况. 因而对“极大 Q 过程”的研究，丰富和深化了 Q 过程的构造理论.

当 Q 为全稳定的 Q — 矩阵时，Q 过程唯一当且仅当最小 Q 过程为极大 Q 过程. 本章将紧紧围绕着对任一给定的 Q 过程何时为极大 Q 过程的问题而展开. 我们给出了这一问题的完整解答. 从而推广了侯振挺[1]. 我们还讨论了极大 Q 过程的定性理论.

§1 极大 Q 过程的定义及性质

除非另有说明，本章恒设 Q 为一般 Q — 矩阵.

定义 14.1.1 设 $\Psi(\lambda)=\{\psi_{ij}(\lambda);i,j\in E,\lambda>0\}$ 是一个 Q 过程，若满足条件

$$R(\lambda)\geqslant\Psi(\lambda), \tag{14.1.1}$$

即

$$r_{ij}(\lambda)\geqslant\psi_{ij}(\lambda), \qquad (i,j\in E;\lambda>0)$$

的 Q 过程 $R(\lambda)=\{r_{ij}(\lambda);i,j\in E;\lambda>0\}$ 唯一，即 $R(\lambda)=\Psi(\lambda)$，则称 $\Psi(\lambda)$ 为极大 Q 过程.

由定义可得

性质 14.1.1 任一诚实 Q 过程均为极大 Q 过程.

性质 14.1.2 设 Q 为全稳定的 Q — 矩阵，$\Phi(\lambda)$ 为最小 Q 过程，则 $\Phi(\lambda)$ 为极大 Q 过程当且仅当 Q 过程唯一.

§2 若干引理

下面引理是广义协调族的重要性质：

引理 14.2.1 设 $\eta(\lambda) \in L_{\Psi(\lambda)}, \xi(\lambda) \in M_{\Psi(\lambda)}$，则

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\eta(\lambda), \quad \lim_{\lambda\to\infty} \lambda\xi(\lambda)$$

均存在且有限.

为证引理 14.2.1，先证下面两个引理.

引理 14.2.2 设 $\eta(\lambda) \in L_{\Psi(\lambda)}, \xi(\lambda) \in M_{\Psi(\lambda)}$，将过程 $\Psi(\lambda)$ 按其个状态 b 分解

$$\Psi(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & {}_b\Psi(\lambda) \end{pmatrix} + \psi_{bb}(\lambda)\begin{pmatrix} 1 \\ \xi^b(\lambda) \end{pmatrix}(1, \eta^b(\lambda)),$$

则

(i) $\bar{\eta}(\lambda) = \eta_{(b)}(\lambda) - \eta_b(\lambda)\eta^b(\lambda)$ 是关于 ${}_b\Psi(\lambda)$ 的行协调族，即 $\bar{\eta}(\lambda) \in L_{{}_b\Psi(\lambda)}$；

(ii) $\bar{\xi}(\lambda) = \xi_{(b)}(\lambda) - \xi_b(\lambda)\xi^b(\lambda)$ 是关于 ${}_b\Psi(\lambda)$ 的列协调族，即 $\bar{\xi}(\lambda) \in M_{{}_b\Psi(\lambda)}$.

其中 $\eta_{(b)}(\lambda)$ 是 $\eta(\lambda)$ 去掉 $\eta_b(\lambda)$ 后 $E - \{b\}$ 上的行矢量，$\xi_{(b)}(\lambda)$ 是 $\xi(\lambda)$ 去掉 $\xi_b(\lambda)$ 后 $E - \{b\}$ 上的列矢量.

证明 只证(i)；(ii) 类似.

由 $\Psi(\lambda)$ 的分解式及 $\eta(\lambda) \in L_{\Psi(\lambda)}$ 知

$$\begin{aligned}(\eta_b(\lambda), \eta_{(b)}(\lambda)) &= (\eta_b(\mu), \eta_{(b)}(\mu))(I + (\mu - \lambda)\Psi(\lambda)) \\ &= (\eta_b(\mu), \eta_{(b)}(\mu))\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I_b + (\mu - \lambda)\,{}_b\Psi(\lambda) \end{pmatrix}\right. \\ &\quad \left. + (\mu - \lambda)\psi_{bb}(\lambda)\begin{pmatrix} 1 \\ \xi^b(\lambda) \end{pmatrix}(1, \eta^b(\lambda))\right\}. \end{aligned} \tag{14.2.1}$$

其中 I_b 表示 $E - \{b\} \times E - \{b\}$ 上的单位矩阵，于是

$$\eta_b(\lambda) = \eta_b(\mu) + (\mu - \lambda)\psi_{bb}(\lambda)(\eta_b(\mu) + \eta_{(b)}(\mu)\xi^b(\lambda)), \tag{14.2.2}$$

$$\eta_{(b)}(\lambda)=\eta_{(b)}(\mu)(I_b+(\mu-\lambda)\,{}_b\Psi(\lambda))+(\eta_b(\lambda)-\eta_b(\mu))\eta^b(\lambda).$$

所以

$$\begin{aligned}&\eta_{(b)}(\lambda)-\eta_b(\lambda)\eta^b(\lambda)\\&=(\eta_{(b)}(\mu)-\eta_b(\mu)\eta^b(\mu))(I_b+(\mu-\lambda)\,{}_b\Psi(\lambda)).\end{aligned}\tag{14.2.3}$$

记 $\bar{\eta}(\lambda)=\eta_{(b)}(\lambda)-\eta_b(\lambda)\eta^b(\lambda)$，则

$$\bar{\eta}(\lambda)=\bar{\eta}(\mu)(I_b+(\mu-\lambda)\,{}_b\Psi(\lambda)).$$

令 $\mu\uparrow+\infty$，由 $\eta_b(\mu)\downarrow 0$，及法都引理得 $\bar{\eta}(\lambda)\geqslant 0$，所以

$$\bar{\eta}(\lambda)\in L_{{}_b\Psi(\lambda)}.$$

引理 14.2.3 记号同引理 14.2.2，$\eta(\lambda)\in L_{\Psi(\lambda)}$，$\xi(\lambda)\in M_{\Psi(\lambda)}$，则存在 $\bar{\eta}(\lambda)\in L_{{}_b\Psi(\lambda)}$，$\bar{\xi}(\lambda)\in M_{{}_b\Psi(\lambda)}$，以及常数 $c_1,c_2\geqslant 0$ 使

$$\eta_b(\lambda)=\psi_{bb}(\lambda)(c_1-\lambda\bar{\eta}(\lambda)\xi^b).\tag{14.2.4}$$

$$\xi_b(\lambda)=\psi_{bb}(\lambda)(c_2-\lambda\eta^b(\lambda)\bar{\xi}).\tag{14.2.5}$$

其中 $\bar{\xi}=\lim\limits_{\lambda\downarrow 0}\bar{\xi}(\lambda)$，$\xi^b=\lim\limits_{\lambda\downarrow 0}\xi^b(\lambda)$.

证明 只证(14.2.4)；(14.2.5)类似.

由 $\eta(\lambda)\in L_{\Psi(\lambda)}$ 及(14.2.2)得

$$\eta_b(\lambda)=\eta_b(\mu)+(\mu-\lambda)\psi_{bb}(\lambda)(\eta_b(\mu)+\eta_{(b)}(\mu)\xi^b(\lambda)).$$

由引理 14.2.2

$$\bar{\eta}(\lambda)=\eta_{(b)}(\lambda)-\eta_b(\lambda)\eta^b(\lambda)\in L_{{}_b\Psi(\lambda)},$$

故

$$\begin{aligned}\eta_b(\lambda)&=\eta_b(\mu)+(\mu-\lambda)\psi_{bb}(\lambda)\{\eta_b(\mu)+[\bar{\eta}(\mu)+\eta_b(\mu)\eta^b(\mu)]\xi^b(\lambda)\}\\&=\eta_b(\mu)[1+(\mu-\lambda)\psi_{bb}(\lambda)(1+\eta^b(\mu)\xi^b(\lambda))]\\&\quad+(\mu-\lambda)\psi_{bb}(\lambda)\bar{\eta}(\mu)\xi^b(\lambda).\end{aligned}$$

两端再乘 $\psi_{bb}(\mu)$，利用预解方程及引理 3.1.3 中的(ii)，我们有

$$\begin{aligned}\eta_b(\lambda)\psi_{bb}(\mu)&=\eta_b(\mu)\psi_{bb}(\lambda)+(\mu-\lambda)\psi_{bb}(\lambda)\psi_{bb}(\mu)\bar{\eta}(\mu)\xi^b(\lambda)\\&=\eta_b(\mu)\psi_{bb}(\lambda)+\psi_{bb}(\lambda)\psi_{bb}(\mu)(\mu\bar{\eta}(\mu)\xi^b-\lambda\bar{\eta}(\lambda)\xi^b).\end{aligned}$$

两端同除 $\psi_{bb}(\lambda)\psi_{bb}(\mu)$ 并整理得

$$\frac{\eta_b(\lambda)}{\psi_{bb}(\lambda)}+\lambda\bar{\eta}(\lambda)\xi^b=\frac{\eta_b(\mu)}{\psi_{bb}(\mu)}+\mu\bar{\eta}(\mu)\xi^b.$$

故

$$\frac{\eta_b(\lambda)}{\psi_{bb}(\lambda)}+\lambda\bar{\eta}(\lambda)\xi^b\triangleq c_1\quad(\text{常数})；$$

从而

$$\eta_b(\lambda) = \psi_{bb}(\lambda)(c_1 - \lambda\bar{\eta}(\lambda)\xi^b).$$

由引理 14.2.3,引理 3.1.3 以及 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda\Psi_{bb}(\lambda) = 1$ 立得引理 14.2.1.

由引理 14.2.1 得

推论 14.2.1 若 $\eta(\lambda) \in L_{\Psi(\lambda)}$,$\xi(\lambda) \in M_{\Psi(\lambda)}$,则存在 E 上行矢量 $\alpha \geqslant \mathbf{0}$,列矢量 $\beta \geqslant \mathbf{0}$,以及 $\bar{\eta}(\lambda) \in L^0_{\Psi(\lambda)}$,$\bar{\xi}(\lambda) \in M^0_{\Psi(\lambda)}$,使

$$\eta(\lambda) = \alpha\Psi(\lambda) + \bar{\eta}(\lambda). \tag{14.2.6}$$

$$\xi(\lambda) = \Psi(\lambda)\beta + \bar{\xi}(\lambda). \tag{14.2.7}$$

设 $\Psi(\lambda)$ 为任一 Q 过程,令

$$\xi(\lambda) \triangleq \mathbf{1} - \lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1}. \tag{14.2.8}$$

不难验证,$\xi(\lambda) \in M_{\Psi(\lambda)}$,由推论 14.2.1 知,存在列矢量 $h \geqslant \mathbf{0}$ 以及 $\overline{Y}(\lambda) \in M^0_{\Psi(\lambda)}$,使

$$\xi(\lambda) = \Psi(\lambda)h + \overline{Y}(\lambda). \tag{14.2.9}$$

即

$$\mathbf{1} - \lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1} = \Psi(\lambda)h + \overline{Y}(\lambda). \tag{14.2.10}$$

其中 $h = \lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda(\mathbf{1} - \lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1})$.

引理 14.2.4 若 $\bar{\xi}(\lambda) \in M^0_{\Psi(\lambda)}$ 且 $\bar{\xi}(\lambda) \leqslant \mathbf{1} - \lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1}$,则 $\bar{\xi}(\lambda) \leqslant \overline{Y}(\lambda)$.

证明 记

$$\bar{\bar{\xi}}(\lambda) = \mathbf{1} - \lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1} - \bar{\xi}(\lambda). \tag{14.2.11}$$

易证,$\bar{\bar{\xi}}(\lambda) \in M_{\Psi(\lambda)}$ 且

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\bar{\bar{\xi}}(\lambda) = \lim_{\lambda\to\infty}\lambda(\mathbf{1} - \lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1}) - \lim_{\lambda\to\infty}\lambda\bar{\xi}(\lambda) = h.$$

由推论 14.2.1 得

$$\bar{\bar{\xi}}(\lambda) = \Psi(\lambda)h + \xi^*(\lambda).$$

其中 $\xi^*(\lambda) \in M^0_{\Psi(\lambda)}$. 由(14.2.10)和(14.2.11)得

$$\xi^*(\lambda) = \overline{Y}(\lambda) - \bar{\xi}(\lambda),$$

所以,$\overline{Y}(\lambda) \geqslant \bar{\xi}(\lambda)$.

由引理 14.2.4,我们给出如下

定义 14.2.1 称由(14.2.10)所定义 $\overline{Y}(\lambda)$ 为过程 $\Psi(\lambda)$ 的最大流出族.

注 当 Q 为全稳定 Q — 矩阵,$\Psi(\lambda) = \Phi(\lambda)$(最小 Q 过程)时,由定理 4.2.1 知,$\overline{Y}(\lambda) = \overline{X}(\lambda)$,其中 $\overline{X}(\lambda)$ 是方程

$$\begin{cases}(\lambda I - Q)U = \mathbf{0}, \\ \mathbf{0} \leqslant U \leqslant \mathbf{1},\end{cases} \qquad (\lambda > 0) \qquad (14.2.12)$$

的最大解.

引理 14.2.5 (i) 若行矢量 α 满足 $\alpha\Psi(\lambda) = \mathbf{0}$(此即对每个 $j \in E$,有 $\sum_{i \in E} \alpha_i \psi_{ij}(\lambda) = 0$,这个级数绝对收敛),则 $\alpha = \mathbf{0}$.

(ii) 若列矢量 β 满足 $\Psi(\lambda)\beta = \mathbf{0}$(此即对每个 $i \in E$,有 $\sum_{j \in E} \psi_{ij}(\lambda)\beta_j = 0$,这个级数绝对收敛),则 $\beta = \mathbf{0}$.

证明 只证(i);(ii)类似.

记 α_i^+, α_i^- 分别为 α_i 的正部和负部,则

$$\alpha = \alpha^+ - \alpha^-.$$

由 $\sum_{i \in E} \alpha_i \psi_{ij}(\lambda)$ 绝对收敛,则

$$\sum_{i \in E} \alpha_i^+ \psi_{ij}(\lambda) < +\infty, \sum_{i \in E} \alpha_i^- \psi_{ij}(\lambda) < +\infty, \qquad (\lambda > 0).$$

易证对任意 $j \in E$,有

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \sum_{i \in E} \alpha_i^+ \psi_{ij}(\lambda) = \alpha_j^+$$

及

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \sum_{i \in E} \alpha_i^- \psi_{ij}(\lambda) = \alpha_j^-.$$

因为

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\lambda \to \infty} \lambda \sum_{i \in E} \alpha_i \psi_{ij}(\lambda) \\ &= \lim_{\lambda \to \infty} \lambda \sum_{i \in E} \alpha_i^+ \psi_{ij}(\lambda) - \lim_{\lambda \to \infty} \lambda \sum_{i \in E} \alpha_i^- \psi_{ij}(\lambda) \\ &= \alpha_j^+ - \alpha_j^-, \end{aligned}$$

所以,$\alpha_j^+ = \alpha_j^-$, $(j \in E)$ 即 $\alpha = \mathbf{0}$.

引理 14.2.6 设 $\Psi(\lambda)$ 为任一 Q 过程.

(i) 若行矢量 $\alpha(\lambda)(\lambda>0)$ 满足 $\alpha(\lambda)\Psi(\lambda)=\mathbf{0}(\lambda>0)$（此即对每个 $j\in E,\lambda>0$，有 $\sum\limits_{i\in E}\alpha_i(\lambda)\psi_{ij}(\lambda)=0$，且这个级数绝对收敛），则 $\alpha(\lambda)=\mathbf{0}(\lambda>0)$.

(ii) 若列矢量 $\beta(\lambda)(\lambda>0)$ 满足 $\Psi(\lambda)\beta(\lambda)=\mathbf{0}(\lambda>0)$（此即对每个 $i\in E,\lambda>0$，有 $\sum\limits_{j\in E}\psi_{ij}(\lambda)\beta_j(\lambda)=0$，且这个级数绝对收敛），则 $\beta(\lambda)=\mathbf{0}(\lambda>0)$.

证明 只证(i)；(ii) 类似.

固定 $\lambda_0>0$，往证 $\alpha(\lambda_0)=\mathbf{0}$. 由引理14.2.5的证明知，只需证

$$\alpha(\lambda_0)\Psi(\mu)=\mathbf{0},\qquad (\mu\geqslant\lambda_0).\qquad (14.2.13)$$

固定 $j\in E$，因为 $\Psi(\lambda)$ 关于 λ 单调非增

$$\sum_{i\in E}|\alpha_i(\lambda_0)|\psi_{ij}(\mu)\leqslant\sum_{i\in E}|\alpha_i(\lambda_0)|\psi_{ij}(\lambda_0)<+\infty,\qquad (\mu\geqslant\lambda_0).$$

所以级数 $\sum\limits_{i\in E}\alpha_i(\lambda_0)\psi_{ij}(\mu)$ 绝对收敛，由预解方程得

$$\sum_{i\in E}|\alpha_i(\lambda_0)|\psi_{ij}(\lambda_0)$$
$$=\sum_{i\in E}|\alpha_i(\lambda_0)|(\psi_{ij}(\mu)+(\mu-\lambda_0)\sum_{k\in E}\psi_{ik}(\lambda_0)\psi_{kj}(\mu)),$$

所以，当 $\mu\geqslant\lambda_0$ 时，级数

$$(\mu-\lambda_0)\sum_{i\in E}\alpha_i(\lambda_0)(\sum_{k\in E}\psi_{ik}(\lambda_0)\psi_{kj}(\mu))$$

也绝对收敛. 于是

$$\sum_{i\in E}\alpha_i(\lambda_0)\sum_{k\in E}\psi_{ik}(\lambda_0)\psi_{kj}(\mu)=\sum_{k\in E}[\sum_{i\in E}\alpha_i(\lambda_0)\psi_{ik}(\lambda_0)]\psi_{kj}(\mu)=0,$$

从而

$$\sum_{i\in E}\alpha_i(\lambda_0)\psi_{ij}(\mu)=0,\qquad (j\in E).$$

即得(14.2.13).

类似于引理 3.5.2，我们有

引理 14.2.7 存在与 λ 无关的行向量 $\alpha\geqslant\mathbf{0}$，使 $\alpha\Psi(\lambda)\mathbf{1}<+\infty$，而 $\alpha\mathbf{1}=+\infty$ 的充要条件是

$$\inf_{i\in E}\lambda\sum_{j\in E}\psi_{ij}(\lambda)=0\quad（对某个 \lambda>0,从而对一切 \lambda>0）.$$

引理 14.2.8 设 $R(\lambda),\Psi(\lambda)$ 为两个 Q 过程,$R(\lambda)\geqslant\Psi(\lambda)$ 且 $\eta(\lambda)\in L_{R(\lambda)}$,对任一固定 λ_0,令

$$\eta'(\lambda)=\eta(\lambda_0)A^{\Psi}(\lambda_0,\lambda).$$

其中 $A^{\Psi}(\mu,\lambda)=I+(\mu-\lambda)\Psi(\lambda)$.

则 $\eta'(\lambda)\in L_{\Psi(\lambda)}$,且 $\lambda\geqslant\lambda_0$ 时有 $\eta'(\lambda)\geqslant\eta(\lambda)$.

证明 先证 $\eta'(\lambda)\in L_E$.

(i) 若 $\lambda_0\geqslant\lambda$,则 $A^{\Psi}(\lambda_0,\lambda)\geqslant 0$,所以 $\eta'(\lambda)\geqslant 0$.

$$\begin{aligned}\eta'(\lambda)&=\eta(\lambda_0)[I+(\lambda_0-\lambda)\Psi(\lambda)]\\&\leqslant\eta(\lambda_0)[I+(\lambda_0-\lambda)R(\lambda)]\\&=\eta(\lambda)\in L_E,\end{aligned}$$

所以,$\eta'(\lambda)\in L_E$.

(ii) 若 $\lambda\geqslant\lambda_0$,由 $R(\lambda)\geqslant\Psi(\lambda)$,则

$$\begin{aligned}\eta'(\lambda)&=\eta(\lambda_0)[I+(\lambda_0-\lambda)\Psi(\lambda)]\\&\geqslant\eta(\lambda_0)[I+(\lambda_0-\lambda)R(\lambda)]=\eta(\lambda)\geqslant 0,\end{aligned}$$

且 $\eta'(\lambda)\leqslant\eta(\lambda_0)\in L_E$,所以,$\eta'(\lambda)\in L_E$. 由(i),(ii),我们有 $\eta'(\lambda)\in L_E$. 而

$$\begin{aligned}\eta'(\lambda)A^{\Psi}(\lambda,\mu)&=\eta(\lambda_0)A^{\Psi}(\lambda_0,\lambda)A^{\Psi}(\lambda,\mu)\\&=\eta(\lambda_0)A^{\Psi}(\lambda_0,\mu)=\eta'(\mu),\end{aligned}$$

所以,$\eta'(\lambda)\in L_{\Psi(\lambda)}$.

引理 14.2.9 设 $L^0_{\Psi(\lambda)}=\{0\}$, $R(\lambda)\geqslant\Psi(\lambda)$ 为两个 Q 过程,则

$$R(\lambda)=\Psi(\lambda)+U(\lambda)\Psi(\lambda).\tag{14.2.14}$$

其中 $U(\lambda)\geqslant 0$.

证明 固定 i,记 $\eta^i_j(\lambda)=r_{ij}(\lambda)$,则

$$\eta^i(\lambda)\in L_{R(\lambda)}.$$

固定 λ_0,由引理 14.2.8 得

$$\eta'(\lambda)\in L_{\Psi(\lambda)},且 \lambda\geqslant\lambda_0 时,\eta'(\lambda)\geqslant\eta(\lambda),$$

其中 $\eta'(\lambda)=\eta^i(\lambda_0)A^{\Psi}(\lambda_0,\lambda)$.

由引理 14.2.1 知

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta^i(\lambda) \text{ 存在,记为 } \beta^i(\lambda_0). \tag{14.2.15}$$

因为

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta^i_j(\lambda) = \delta_{ij},$$

所以

$$\beta^i_j(\lambda_0) \geqslant \delta_{ij}.$$

记

$$u_{ij}(\lambda_0) = \beta^i_j(\lambda_0) - \delta_{ij}.$$

由推论 14.2.1 及(14.2.15) 和 $L^0_{\Psi(\lambda)} = \{0\}$ 得

$$\eta^i_j(\lambda) = (\beta\Psi(\lambda))_j = \psi_{ij}(\lambda) + \sum_{k\in E}u_{ik}(\lambda_0)\psi_{kj}(\lambda).$$

特别

$$r_{ij}(\lambda_0) = \psi_{ij}(\lambda_0) + \sum_{k\in E}u_{ik}(\lambda_0)\psi_{kj}(\lambda_0),$$

即 $R(\lambda) = \Psi(\lambda) + U(\lambda)\Psi(\lambda)$ 且 $U(\lambda) \geqslant 0$.

§3 极大 Q 过程判别准则

下面就是本章的主要结果:

定理 14.3.1 设 Q 为任一 Q — 矩阵,$\Psi(\lambda)$ 为一 Q 过程,则它为极大 Q 过程的充要条件是下面四条同时成立

(i) $\inf_{i\in E}\lambda\sum_{j\in E}\psi_{ij}(\lambda) \triangleq c(\lambda) > 0, \qquad (\lambda > 0);$

(ii) $\overline{Y}(\lambda) = 0;$

(iii) $\Psi(\lambda)$ 诚实;或者 $L^0_{\Psi(\lambda)} = \{0\};$

(iv) $h_i = 0$,如果 i 为瞬时态.

其中

$$h = \lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1 - \lambda\Psi(\lambda)1), \quad \overline{Y}(\lambda) = 1 - \lambda\Psi(\lambda)1 - \Psi(\lambda)h,$$

$$L^0_{\Psi(\lambda)} = \{\eta(\lambda);\eta(\lambda) \in L_{\Psi(\lambda)}, \lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta(\lambda) = 0\}.$$

下面分五个命题来完成定理 14.3.1 的证明,其中前四个命题分别说明所给条件(i),(ii),(iii),(iv) 是必要的,命题 14.3.5 说明

条件(i),(ii),(iii),(iv) 是充分的.

命题 14.3.1 若$\inf\limits_{i\in E}\lambda\sum\limits_{j\in E}\psi_{ij}(\lambda)=0$,则$\Psi(\lambda)$不是极大$Q$过程.

证明 由假设和引理 14.2.7,存在与λ无关的行矢量$\alpha\geqslant \mathbf{0}$,使$\alpha\Psi(\lambda)\mathbf{1}<\infty$,但$\alpha\mathbf{1}=+\infty$,从而

$$\frac{h_i\alpha_i}{\alpha\mathbf{1}}=0,\qquad (i,j\in E).$$

由假设知,$Z(\lambda)=\mathbf{1}-\lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1}\neq\mathbf{0}$,令

$$R(\lambda)=\Psi(\lambda)+Z(\lambda)\frac{\alpha\Psi(\lambda)}{\lambda\alpha\Psi(\lambda)\mathbf{1}}.$$

不难验证,$R(\lambda)$是异于$\Psi(\lambda)$的Q过程,且$R(\lambda)\geqslant\Psi(\lambda)$. 从而$\Psi(\lambda)$不是极大$Q$过程.

命题 14.3.2 若$\overline{Y}(\lambda)\neq\mathbf{0}$,则$\Psi(\lambda)$不是极大$Q$过程.

证明 令

$$R(\lambda)=\Psi(\lambda)+\overline{Y}(\lambda)\frac{e\Psi(\lambda)}{c+\lambda e\Psi(\lambda)\overline{Y}},$$

其中$e>\mathbf{0}$,$e\mathbf{1}<+\infty$,$\overline{Y}=\lim\limits_{\lambda\downarrow 0}\overline{Y}(\lambda)$,$\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda[e\Psi(\lambda),\mathbf{1}-\overline{Y}]\leqslant c$(常数). 不难验证,$R(\lambda)$是异于$\Psi(\lambda)$的$Q$过程,且$R(\lambda)\geqslant\Psi(\lambda)$,从而$\Psi(\lambda)$不是极大$Q$过程.

命题 14.3.3 若$L^0_{\Psi(\lambda)}\neq\{\mathbf{0}\}$且$\Psi(\lambda)$中断,则$\Psi(\lambda)$不是极大$Q$过程.

证明 由$L^0_{\Psi(\lambda)}\neq\{\mathbf{0}\}$,任取一$\eta(\lambda)\in L^0_{\Psi(\lambda)}$,使$\eta(\lambda)\neq\mathbf{0}$,则

$$R(\lambda)=\Psi(\lambda)+(\mathbf{1}-\lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1})\frac{\eta(\lambda)}{\lambda\eta(\lambda)\mathbf{1}}$$

是一个Q过程,$R(\lambda)\neq\Psi(\lambda)$,且$R(\lambda)\geqslant\Psi(\lambda)$,所以$\Psi(\lambda)$不是极大$Q$过程.

命题 14.3.4 若对某个瞬时态$i\in E$,有$h_i>0$,则$\Psi(\lambda)$不是极大Q过程.

证明 对$\Psi(\lambda)$关于状态i分解,则

$$\Psi(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & {}_i\Psi(\lambda)\end{pmatrix}+r(\lambda)\begin{pmatrix}1\\ \xi(\lambda)\end{pmatrix}(1,\eta(\lambda)).$$

其中记号见第三章

$$\begin{aligned}h_i &= \lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1-\lambda\Psi(\lambda)1)_i\\&= \lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1-\lambda r(\lambda)(1+\lambda\eta(\lambda)1))\\&= \lim_{\lambda\to\infty}\lambda r(\lambda)(c_i+\lambda\eta(\lambda)\xi-\lambda\eta(\lambda)1)\\&= c_i-\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta(\lambda)(1-\xi)>0.\end{aligned}$$

取常数 $\tilde{c}_i$ 满足

$$c_i>\tilde{c}_i\geqslant\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta(\lambda)(1-\xi).$$

令

$$\tilde{r}(\lambda)=\frac{1}{\tilde{c}_i+\lambda+\lambda\eta(\lambda)(1-\xi)},$$

$$R(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & {}_i\Psi(\lambda)\end{pmatrix}+\tilde{r}(\lambda)\begin{pmatrix}1\\ \xi(\lambda)\end{pmatrix}(1,\eta(\lambda)),$$

则 $\tilde{r}(\lambda)>r(\lambda)$. 由 i 为瞬时态和分解定理知,$R(\lambda)$ 为 Q 过程,且 $R(\lambda)\geqslant\Psi(\lambda)$,$R(\lambda)\neq\Psi(\lambda)$,所以 $\Psi(\lambda)$ 不是极大 Q 过程.

命题 14.3.5 若定理 14.3.1 中的条件(i),(ii),(iii),(iv) 同时成立,则 $\Psi(\lambda)$ 是极大 Q 过程.

证明 若 $\Psi(\lambda)$ 诚实,结论显然. 所以,下面我们假定 $\Psi(\lambda)$ 中断,且定理 14.3.1 中(i),(ii),(iv) 以及 $L^{0}_{\Psi(\lambda)}=\{\mathbf{0}\}$ 成立.

反设 $\Psi(\lambda)$ 不是极大 Q 过程,则存在 Q 过程 $R(\lambda)$ 满足

$$R(\lambda)\geqslant\Psi(\lambda),R(\lambda)\neq\Psi(\lambda). \tag{14.3.1}$$

由引理 14.2.9 知,存在矩阵 $U(\lambda)\geqslant\mathbf{0}$,使

$$R(\lambda)=\Psi(\lambda)+U(\lambda)\Psi(\lambda). \tag{14.3.2}$$

由 Q 过程 $R(\lambda)$ 满足范条件得

$$\lambda U(\lambda)\Psi(\lambda)1\leqslant\lambda R(\lambda)1\leqslant 1. \tag{14.3.3}$$

再由条件(i) 得

$$1\leqslant c^{-1}(\lambda)\lambda\Psi(\lambda)1, \tag{14.3.4}$$

所以

$$\begin{aligned}U(\lambda)1 &\leqslant U(\lambda)c^{-1}(\lambda)\lambda\Psi(\lambda)1\\&= c^{-1}(\lambda)\lambda U(\lambda)\Psi(\lambda)1\end{aligned}$$

$$\leqslant c^{-1}(\lambda). \tag{14.3.5}$$

因此，$U(\lambda)$ 的每一行是 L_E 的元素，$U(\lambda)$ 的每一列是 M_E 的元素. 由 $R(\lambda)$，$\Psi(\lambda)$ 均为 Q 过程得

$$\Psi(\lambda) - \Psi(\mu) + (\lambda - \mu)\Psi(\lambda)\Psi(\mu) = \mathbf{0} \tag{14.3.6}$$

及

$$R(\lambda) - R(\mu) + (\lambda - \mu)R(\lambda)R(\mu) = \mathbf{0}. \tag{14.3.7}$$

将(14.3.2)代入(14.3.7)，并利用(14.3.6)得

$$U(\lambda)\Psi(\lambda) - U(\mu)\Psi(\mu) + (\lambda - \mu)U(\lambda)\Psi(\lambda) +$$
$$+ (\lambda - \mu)\Psi(\lambda)U(\mu)\Psi(\mu) + (\lambda - \mu)U(\lambda)\Psi(\lambda)U(\mu)\Psi(\mu) = \mathbf{0}. \tag{14.3.8}$$

由(14.3.5)知，上式出现的矩阵的乘积都是有限的. 由(14.3.6)得

$$(\lambda - \mu)U(\lambda)\Psi(\lambda)\Psi(\mu) = U(\lambda)(\Psi(\mu) - \Psi(\lambda)). \tag{14.3.9}$$

由(14.3.3)得

$$U(\lambda)\Psi(\lambda)\mathbf{1} < +\infty. \tag{14.3.10}$$

由(14.3.5)得

$$U(\lambda)\Psi(\mu)\mathbf{1} \leqslant \frac{1}{\mu}U(\lambda)\mathbf{1} < -\infty. \tag{14.3.11}$$

由(14.3.9)，(14.3.10)以及(14.3.11)得

$$(\lambda - \mu)U(\lambda)\Psi(\lambda)\Psi(\mu) = U(\lambda)\Psi(\mu) - U(\lambda)\Psi(\lambda). \tag{14.3.12}$$

把(14.3.12)代入(14.3.8)得

$$U(\lambda)\Psi(\mu) - U(\mu)\Psi(\mu) + (\lambda - \mu)\Psi(\lambda)U(\mu)\Psi(\mu) +$$
$$+ (\lambda - \mu)U(\lambda)\Psi(\lambda)U(\mu)\Psi(\mu) = \mathbf{0}. \tag{14.3.13}$$

由(14.3.5)知，$U(\lambda)$，$U(\mu)$，$\Psi(\lambda)U(\mu)$ 及 $U(\lambda)\Psi(\lambda)\Psi(\mu)$ 都是有限的，从而得

$$[U(\lambda) - U(\mu) + (\lambda - \mu)\Psi(\lambda)U(\mu) +$$
$$+ (\lambda - \mu)U(\lambda)\Psi(\lambda)U(\mu)]\Psi(\mu) = \mathbf{0}. \tag{14.3.14}$$

于是，由引理 14.2.6 得

$$U(\lambda) - U(\mu) + (\lambda - \mu)\Psi(\lambda)U(\mu) +$$
$$+ (\lambda - \mu)U(\lambda)\Psi(\lambda)U(\mu) = 0. \quad (14.3.15)$$

即

$$U(\lambda) + (\lambda - \mu)U(\lambda)\Psi(\lambda)U(\mu)$$
$$= U(\mu) + (\mu - \lambda)\Psi(\lambda)U(\mu). \quad (14.3.16)$$

当 $\lambda \geqslant \mu$ 时,(14.3.16) 左边大于或等于 0. 因此,右边也大于或等于 0. 所以,固定 $\mu_0 > 0, j_0 \in E$. 令

$$\xi_i(\lambda) \triangleq u_{ij_0}(\mu_0) + (\mu_0 - \lambda)\sum_{k\in E}\psi_{ik}(\lambda)u_{kj_0}(\mu_0). \quad (14.3.17)$$

不难验证

$$\xi(\lambda) \in M_{\Psi(\lambda)}. \quad (14.3.18)$$

由(14.3.2) 以及(i) 得

$$U(\lambda)1 \leqslant c^{-1}(\lambda)(1 - \lambda\Psi(\lambda)1), \quad (\lambda > 0). \quad (14.3.19)$$

所以

$$\xi(\lambda) \leqslant c^{-1}(\mu_0)(1 - \mu_0\Psi(\mu_0)1) +$$
$$+ (\mu_0 - \lambda)\sum_{k\in E}\psi_{ik}(\lambda)c^{-1}(\mu_0)(1 - \mu_0\Psi(\mu_0)1)_k$$
$$\leqslant c^{-1}(\mu_0)(1 - \lambda\Psi(\lambda)1), \quad (\mu_0 \geqslant \lambda). \quad (14.3.20)$$

另一方面,由(14.3.16) 得

$$\xi(\lambda) \leqslant c^{-1}(\lambda)(1 - \lambda\Psi(\lambda)1) + (\lambda - \mu_0)c^{-1}(\mu_0)U(\lambda)\Psi(\lambda)1$$
$$\leqslant c^{-1}(\lambda)(1 - \lambda\Psi(\lambda)1) + \frac{\lambda - \mu_0}{\lambda}c^{-1}(\mu_0)(1 - \lambda\Psi(\lambda)1)$$
$$\leqslant c^{-1}(\mu_0)(1 - \lambda\Psi(\lambda)1) + c^{-1}(\mu_0)(1 - \lambda\Psi(\lambda)1)$$
$$= 2c^{-1}(\mu_0)(1 - \lambda\Psi(\lambda)1), \quad (\lambda \geqslant \mu_0). \quad (14.3.21)$$

由(14.3.20),(14.3.21) 立得

$$\xi(\lambda) \leqslant 2c^{-1}(\mu_0)(1 - \lambda\Psi(\lambda)1). \quad (14.3.22)$$

记

$$\bar{\xi}(\lambda) = \frac{1}{2}c(\mu_0)\xi(\lambda),$$

则

$$\tilde{\xi}(\lambda) \leqslant \mathbf{1} - \lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1},$$

且

$$\bar{\xi}(\lambda) \in M_{\Psi(\lambda)}.$$

由(ii),引理 14.2.4 以及引理 14.2.1 知,存在与 λ 无关的 $\beta(\mu_0, j_0) \geqslant 0$,使

$$\bar{\xi}(\lambda) = \Psi(\lambda)\beta(\mu_0, j_0),$$

所以

$$\xi(\lambda) = \Psi(\lambda)\tilde{\beta}(\mu_0, j_0).$$

其中

$$\tilde{\beta}(\mu_0, j_0) = 2c^{-1}(\mu_0)\beta(\mu_0, j_0).$$

特别

$$u_{\cdot j_0}(\mu_0) = \Psi(\mu_0)\tilde{\beta}(\mu_0, j_0).$$

故存在矩阵 $V(\mu_0)$,使

$$U(\mu_0) = \Psi(\mu_0)V(\mu_0), \tag{14.3.23}$$

其中 $V(\mu_0) \geqslant \mathbf{0}$.

由 $\mu_0 > 0$ 的任意性,存在矩阵 $V(\lambda) \geqslant \mathbf{0}$,使

$$U(\lambda) = \Psi(\lambda)V(\lambda), \qquad (\lambda > 0). \tag{14.3.24}$$

于是(14.3.2)式变成

$$R(\lambda) = \Psi(\lambda) + \Psi(\lambda)V(\lambda)\Psi(\lambda). \tag{14.3.25}$$

用 $U(\lambda) = \Psi(\lambda)V(\lambda)$ 代入(14.3.15)并利用(14.3.6)得

$$\Psi(\lambda)[V(\lambda) - V(\mu) + (\lambda - \mu)V(\lambda)\Psi(\lambda)\Psi(\mu)V(\mu)] = \mathbf{0}. \tag{14.3.26}$$

由引理 14.2.6 的(ii),并利用 $\Psi(\mu) - \Psi(\lambda)$ 代替 $(\lambda - \mu)\Psi(\lambda)\Psi(\mu)$ 得

$$V(\lambda) - V(\mu) + V(\lambda)(\Psi(\mu) - \Psi(\lambda))V(\mu) = \mathbf{0}. \tag{14.3.27}$$

由(14.3.25)知

$$\lambda\Psi(\lambda)V(\lambda)\Psi(\lambda)\mathbf{1} \leqslant \mathbf{1}. \tag{14.3.28}$$

根据条件(i)

$$c(\lambda) \leqslant \lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1}. \tag{14.3.29}$$

由(14.3.28)和(14.3.29)得

$$c(\lambda)\Psi(\lambda)V(\lambda)1 = \Psi(\lambda)V(\lambda)c(\lambda)1 \leqslant \Psi(\lambda)V(\lambda)\lambda\Psi(\lambda)1$$
$$= \lambda\Psi(\lambda)V(\lambda)\Psi(\lambda)1 \leqslant 1. \qquad (14.3.30)$$

因此

$$c(\lambda)\psi_{ii}(\lambda)(V(\lambda)1)_i \leqslant 1. \qquad (14.3.31)$$

这里$(V(\lambda)1)_i$表示$V(\lambda)1$的第i个分量,所以

$$V(\lambda)1 < +\infty. \qquad (14.3.32)$$

由(14.3.5)得

$$\Psi(\mu)V(\mu)1 = U(\mu)1 \leqslant c^{-1}(\mu)1, \qquad (14.3.33)$$

所以

$$V(\lambda)\Psi(\mu)V(\mu)1 \leqslant c^{-1}(\mu)V(\lambda)1 < +\infty. \quad (14.3.34)$$

因$\Psi(\lambda)$为λ的非增函数及(14.3.27)知,$V(\lambda)$是λ的非增函数,于是由(14.3.34)得

$$V(\lambda)\Psi(\lambda)V(\mu)1 \leqslant V(\lambda)\Psi(\lambda)V(\lambda)1 < +\infty, \qquad (\lambda \leqslant \mu), \qquad (14.3.35)$$

及

$$V(\lambda)\Psi(\lambda)V(\mu)1 \leqslant V(\mu)\Psi(\mu)V(\mu)1 < +\infty, \qquad (\lambda \geqslant \mu). \qquad (14.3.36)$$

由(14.3.34),(14.3.35)和(14.3.36)知(14.3.27)可改写成

$$V(\lambda) + V(\lambda)\Psi(\mu)V(\mu) = V(\mu) + V(\lambda)\Psi(\lambda)V(\mu). \qquad (14.3.37)$$

由$R(\lambda)$,$\Psi(\lambda)$为Q过程知

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(\lambda R(\lambda) - I) = \lim_{\lambda\to\infty}\lambda(\lambda\Psi(\lambda) - I) = Q, \qquad (14.3.38)$$

所以,由(14.3.25)知,当$i \neq j$;或者$i = j$,但i为稳定态时,有

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^2(\Psi(\lambda)V(\lambda)\Psi(\lambda))_{ij} = 0. \qquad (14.3.39)$$

另一方面,由(14.3.25)知

$$1 - \lambda\Psi(\lambda)1 \geqslant \lambda\Psi(\lambda)V(\lambda)\Psi(\lambda)1. \qquad (14.3.40)$$

再由条件(iv),当i为瞬时态时,有

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1 - \lambda\Psi(\lambda)1)_i = 0. \qquad (14.3.41)$$

所以

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^2(\Psi(\lambda)V(\lambda)\Psi(\lambda)\mathbf{1})_i = 0. \qquad (14.3.42)$$

特别，i 为瞬时态时

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^2(\Psi(\lambda)V(\lambda)\Psi(\lambda))_{ii} = 0. \qquad (14.3.43)$$

由(14.3.39)，(14.3.43)知，对任意 $i,j\in E$，均有

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^2(\Psi(\lambda)V(\lambda)\Psi(\lambda))_{ij} = 0. \qquad (14.3.44)$$

再又由 $\Psi(\lambda)$ 为 Q 过程知

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda\psi_{ii}(\lambda) = \lim_{\lambda\to\infty}\lambda\psi_{jj}(\lambda) = 1. \qquad (14.3.45)$$

而

$$\lambda^2(\Psi(\lambda)V(\lambda)\Psi(\lambda))_{ij} \geqslant \lambda^2\psi_{ii}(\lambda)v_{ij}(\lambda)\psi_{jj}(\lambda). \quad (14.3.46)$$

由(14.3.44)，(14.3.45)，(14.3.46)及 $V(\lambda)$ 为 λ 的非增函数知

$$v_{ij}(\lambda)\downarrow 0, \qquad (\lambda\uparrow\infty;i,j\in E). \qquad (14.3.47)$$

注意(14.3.47)及 $\Psi(\lambda)\downarrow\mathbf{0}$，$(\lambda\uparrow\infty)$. 并在 $\lambda\uparrow\infty$ 之下，对(14.3.37)的两端取极限，立得

$$\mathbf{0}+\mathbf{0} = V(\mu)+\mathbf{0},$$

所以

$$V(\mu) = \mathbf{0}.$$

于是，$R(\mu)=\Psi(\mu)$. 这与(14.3.1)矛盾，故 $\Psi(\lambda)$ 为极大 Q 过程. 至此，定理证毕.

推论 14.3.1 设 Q 为全瞬时的 Q－矩阵，$\Psi(\lambda)$ 为 Q 过程，则它为极大 Q 过程的充要条件是 $\Psi(\lambda)$ 诚实.

证明 充分性显然.

必要性 若 $\Psi(\lambda)$ 为极大 Q 过程，由 Q 为全瞬时，故 $h=\mathbf{0}$. 再由(ii)有 $\overline{Y}(\lambda)=\mathbf{0}$，所以

$$\mathbf{1}-\lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1} = \Psi(\lambda)h+\overline{Y}(\lambda) = \mathbf{0},$$

即 $\Psi(\lambda)$ 诚实.

§4 几点注记及 Q 过程唯一性准则的导出

注 1 在一般情形下，我们的定理 14.4.1 中的条件是相互独

立，在此，我们仅举例说明条件(i)和条件(ii)的独立性.

首先，由条件(ii)不能推出条件(i)是显然的. 例如，Q 为全稳定的对角型 Q — 矩阵，且对角线元素无界，$\Psi(\lambda)$ 为最小 Q 过程. 此时，(ii)成立，但(i)不成立.

下面例子说明，在一般情况下，(i)也不能推出(ii).

例如，Q 取保守纯生 Q — 矩阵

$$Q=\begin{pmatrix} -b_0 & b_0 & & & \\ & -b_1 & b_1 & & \\ & & -b_2 & b_2 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}. \tag{14.4.1}$$

其中 $b_i = 2^i b \quad (i=0,1,2,\cdots), b>0$.

不难证明，Q 保守，单流出，零流入. 所以

$$\inf_{i\in E}\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)=0, \tag{14.4.2}$$

即

$$\sup_{i\in E}(1-\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda))=1. \tag{14.4.3}$$

由(14.4.2)及引理14.2.7知，存在与 λ 无关的行矢量 $\alpha\geqslant \mathbf{0}$，使 $\alpha\mathbf{1}=+\infty$，且 $\alpha\Phi(\lambda)\in L_E$，令

$$\Psi(\lambda)=\Phi(\lambda)+(1-\lambda\Phi(\lambda)\mathbf{1})\frac{\alpha\Phi(\lambda)}{c+\lambda\alpha\Phi(\lambda)\mathbf{1}}. \tag{14.4.4}$$

其中 $c>0$ 为常数. 不难证明，$\Psi(\lambda)$ 为 Q 过程且

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1-\lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1})=\mathbf{0}. \tag{14.4.5}$$

于是，我们有

$$\begin{aligned}\overline{Y}(\lambda)&=1-\lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1}-\Psi(\lambda)h\\&=1-\lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1}\\&=(1-\lambda\Phi(\lambda)\mathbf{1})\frac{c}{c+\lambda\alpha\Phi(\lambda)\mathbf{1}}\neq\mathbf{0}.\end{aligned} \tag{14.4.6}$$

而

$$\sup_{i\in E}(1-\lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1})_i=\sup_{i\in E}(\mathbf{1}-\lambda\Phi(\lambda)\mathbf{1})_i\frac{c}{c+\lambda\alpha\Phi(\lambda)\mathbf{1}}$$

$$= \frac{c}{c + \lambda a \Phi(\lambda) \mathbf{1}}, \tag{14.4.7}$$

所以

$$\inf_{i \in E} \lambda \sum_{j \in E} \psi_{ij}(\lambda) > 0. \tag{14.4.8}$$

由(14.4.6)和(14.4.8)知,条件(ii)不成立,但条件(i)成立.

但当Q为全稳定Q-矩阵,$\Psi(\lambda)$为最小Q过程$\Phi(\lambda)$时,由第十章知,定理14.3.1中的条件(i)蕴含条件(ii).

在本节余下部分,我们将假定Q为全稳定Q-矩阵,$\Phi(\lambda)$为最小Q过程.

注 2 $L^0_{\Phi(\lambda)} = \{\mathbf{0}\}$等价于方程

$$\begin{cases} \lambda\eta - \eta Q = \mathbf{0}, \\ \mathbf{0} \leqslant \eta, \eta \mathbf{1} < +\infty, \end{cases} \quad (\lambda > 0) \tag{14.4.9}$$

只有零解. 即$\dim v = 0$.

证明 若$L^0_{\Phi(\lambda)} = \{\mathbf{0}\}$,反设方程(14.4.9)存在非零解. 由引理13.1.3存在非零$\eta(\lambda) \in L_{\Phi(\lambda)}$,使

$$\eta(\lambda)(\lambda I - Q) = \mathbf{0}. \tag{14.4.10}$$

由引理3.1.1知,$\eta(\lambda) \downarrow \mathbf{0} \quad (\lambda \uparrow +\infty)$,于是由(14.4.10)得

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \eta(\lambda) = \mathbf{0}, \tag{14.4.11}$$

所以,$\eta(\lambda) \in L^0_{\Phi(\lambda)}$,而$\eta(\lambda) \neq \mathbf{0}$,这与$L^0_{\Phi(\lambda)} = \{\mathbf{0}\}$矛盾. 故方程(14.4.9)只有零解.

另一方面,若方程(14.4.9)只有零解,任取$\eta(\lambda) \in L^0_{\Phi(\lambda)}$,由

$$\eta(\lambda) = \eta(\mu)(I + (\mu - \lambda)\Phi(\lambda)). \tag{14.4.12}$$

在上式两端分别乘$(\lambda I - Q)$得

$$\eta(\lambda)(\lambda I - Q) = \eta(\mu)(\mu I - Q). \tag{14.4.13}$$

于是,$\eta(\lambda)$是方程(14.4.9)的解,由假设方程(14.4.9)只有零解,故$\eta(\lambda) = \mathbf{0}$,所以

$$L^0_{\Phi(\lambda)} = \{\mathbf{0}\}.$$

注 3 由注1、注2和定理14.3.1知,当$\Psi(\lambda) = \Phi(\lambda)$(最小$Q$过程)时,我们有$\Phi(\lambda)$为极大$Q$过程(即$Q$过程唯一)的充要条件

是下面两条同时成立：

(i) $\inf\limits_{i\in E}\lambda\sum\limits_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)>0$;

(ii) $\Phi(\lambda)$ 诚实或者方程

$$\begin{cases}\lambda\eta-\eta Q=\mathbf{0},\\ 0\leqslant\eta,\eta\mathbf{1}<+\infty,\end{cases}\qquad(\lambda>0)$$

只有零解.

§5 极大 Q 过程存在性准则

本节讨论极大 Q 过程的存在性问题，我们得到，对任给 Q — 矩阵 Q，极大 Q 过程总存在.

引理 14.5.1 设 $\Psi(\lambda)$ 为 Q 过程，则存在 Q 过程 $R(\lambda)$，使 $R(\lambda)\geqslant\Psi(\lambda)$，且

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(\mathbf{1}-\lambda R(\lambda)\mathbf{1})_i=0,\qquad i\in\widetilde{E}=\{k:q_k=+\infty\}.\tag{14.5.1}$$

证明 记

$$\tilde{h}=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(\mathbf{1}-\lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1}),$$

$$h_i=\begin{cases}\tilde{h}_i, & i\in\widetilde{E};\\ 0, & i\in E-\widetilde{E}.\end{cases}$$

$$h_k^{(i)}=\begin{cases}h_k, & k=i;\\ 0, & k\neq i.\end{cases}\quad e_k^{(i)}=\begin{cases}1, & k=i;\\ 0, & k\neq i.\end{cases}\tag{14.5.2}$$

不妨设 $E=\{1,2,\cdots\}$. 令

$$R^{(1)}(\lambda)=\Psi(\lambda)+\Psi(\lambda)h^{(1)}\frac{e^{(1)}\Psi(\lambda)}{c_1+\lambda e^{(1)}\Psi(\lambda)\Psi h^{(1)}},\tag{14.5.3}$$

其中

$$c_1=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda e^{(1)}\Psi(\lambda)(\mathbf{1}-\Psi h^{(1)})\leqslant e^{(1)}\mathbf{1}=1.$$

由 $\Psi(\lambda)$ 满足预解方程得

$$S^{(1)}(\lambda)\triangleq\Psi(\lambda)h^{(1)}\in M_{\Psi(\lambda)}.\tag{14.5.4}$$

再由定理 1.6.2 知，

$$R^{(1)}(\lambda) \text{ 为 } Q \text{ 过程}. \tag{14.5.5}$$

此处约定 $-\infty + c = -\infty, |c| < +\infty$. 所以

$$R^{(1)}(\lambda) = R^{(1)}(\mu)(I + (\mu - \lambda)R^{(1)}(\lambda)). \tag{14.5.6}$$

由此得到

$$T^{(1)}(\lambda) \triangleq \frac{e^{(1)}\Psi(\lambda)}{c_1 + \lambda e^{(1)}\Psi(\lambda)\Psi h^{(1)}} \in L_{R^{(1)}(\lambda)}. \tag{14.5.7}$$

由归纳法原理易知，存在 $\{R^{(n)}(\lambda)\}_1^\infty$ 满足

$$R^{(n)}(\lambda) \text{ 是 } Q \text{ 过程}. \tag{14.5.8}$$

$$R^{(n)}(\lambda) = R^{(n-1)}(\lambda) + R^{(n-1)}(\lambda)h^{(n)} \times \frac{e^{(n)}R^{(n-1)}(\lambda)}{c_n + \lambda e^{(n)}R^{(n-1)}(\lambda)R^{(n-1)}h^{(n)}} \quad (n \geqslant 1). \tag{14.5.9}$$

其中

$$R^{(0)}(\lambda) = \Psi(\lambda),$$

$$c_n = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda e^{(n)}R^{(n-1)}(\lambda)(1 - R^{(n-1)}h^{(n)}) \leqslant 1. \tag{14.5.10}$$

$$S^{(n)}(\lambda) \triangleq R^{(n-1)}(\lambda)h^{(n)} \in M_{R^{(n-1)}(\lambda)}. \tag{14.5.11}$$

$$T^{(n)}(\lambda) \triangleq \frac{e^{(n)}R^{(n-1)}(\lambda)}{c_n + \lambda e^{(n)}R^{(n-1)}(\lambda)R^{(n-1)}h^{(n)}} \in L_{R^{(n)}(\lambda)}, \tag{14.5.12}$$

且

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda S^{(n)}(\lambda) = h^{(n)}, \qquad \lim_{\lambda\to\infty} \lambda T^{(n)}(\lambda) = e^{(n)}. \tag{14.5.13}$$

由(14.5.9)知

$$R^{(n)}(\lambda) \uparrow, \tag{14.5.14}$$

于是 $R(\lambda) = \lim_{n\to\infty} R^{(n)}(\lambda)$ 存在且

$$R(\lambda) = \Psi(\lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} S^{(n)}(\lambda)T^{(n)}(\lambda). \tag{14.5.15}$$

由(14.5.14)得

$$1 - \lambda R(\lambda)1 = \lim_{n\to\infty}(1 - \lambda R^{(n)}(\lambda)1) \geqslant 0, \tag{14.5.16}$$

所以，$R(\lambda)$ 满足范条件，再由(14.5.14)及 $R^{(n)}(\lambda)$ 满足预解方程及连续性条件，所以，$R(\lambda)$ 也满足预解方程和连续性条件. 现证 $R(\lambda)$

满足 Q 条件，即证

$$\lambda(\lambda R_{ij}(\lambda)-\delta_{ij})\to q_{ij},\qquad (\lambda\uparrow+\infty;i,j\in E).\tag{14.5.17}$$

由(14.5.16)得

$$\lambda(\lambda R_{ij}(\lambda)-\delta_{ij})=\lambda(\lambda\psi_{ij}(\lambda)-\delta_{ij})+ + \lambda^2S_i^{(i)}(\lambda)T_j^{(i)}(\lambda)+\sum_{n\neq i}\lambda S_i^{(n)}(\lambda)\lambda T_j^{(n)}(\lambda).\tag{14.5.18}$$

因

$$\lambda(\lambda\psi_{ij}(\lambda)-\delta_{ij})\to q_{ij},\ \lambda^2S_i^{(i)}(\lambda)T_j^{(i)}(\lambda)\to h_ie_j^{(i)},\ (\lambda\uparrow+\infty).$$

所以，只需证明

$$\sum_{n\neq i}\lambda S_i^{(n)}(\lambda)\lambda T_j^{(n)}(\lambda)\to 0,\qquad (\lambda\uparrow+\infty).\tag{14.5.19}$$

固定 $\mu>0$，由(14.5.11)，(14.5.12)知，当 $\lambda\geqslant\mu$ 时

$$\begin{aligned}&(\lambda-\mu)^2\psi_{ii}(\mu)S_i^{(n)}(\lambda)T_j^{(n)}(\lambda)\psi_{jj}(\mu)\\ \leqslant&(\lambda-\mu)^2R_{ii}^{(n-1)}(\mu)S_i^{(n)}(\lambda)T_j^{(n)}(\lambda)R_{jj}^{(n)}(\mu)\\ \leqslant&(\lambda-\mu)(\sum_{k\in E}R_{ik}^{(n-1)}(\mu)S_k^{(n)}(\mu))\\ &\times(\lambda-\mu)(\sum_{k\in E}T_k^{(n)}(\lambda)R_{kj}^{(n)}(\mu))\\ =&(S_i^{(n)}(\mu)-S_i^{(n)}(\lambda))(T_j^{(n)}(\mu)-T_j^{(n)}(\lambda))\\ \leqslant&S_i^{(n)}(\mu)T_j^{(n)}(\mu).\end{aligned}\tag{14.5.20}$$

但

$$\sum_{n\neq i}S_i^{(n)}(\mu)T_j^{(n)}(\mu)<+\infty.$$

由控制收敛定理，$\psi_{ii}(\mu)>0$，$\psi_{jj}(\mu)>0$ 以及 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}(\lambda-\mu)S_i^{(n)}(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda S_i^{(n)}(\lambda)=0\quad(n\neq i)$ 得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{n\neq i}\lambda S_i^{(n)}(\lambda)\lambda T_j^{(n)}(\lambda)=0.\tag{14.5.21}$$

于是，我们便证明了 $R(\lambda)$ 是 Q 过程，且 $R(\lambda)\geqslant\Psi(\lambda)$. 当 $i\in\bar{E}$ 时

$$\begin{aligned}&\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1-\lambda R(\lambda)1)_i\\ \leqslant&\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1-\lambda R^{(i)}(\lambda)1)_i\end{aligned}$$

$$= \lim_{\lambda\to\infty} \lambda(1 - \lambda\Psi(\lambda)1)_i$$

$$- \lim_{\lambda\to\infty} \lambda^2 \sum_{n=1}^{i} S_i^{(n)}(\lambda) \sum_{j\in E} T_j^{(n)}(\lambda)$$

$$\leqslant \tilde{h}_i - \lim_{\lambda\to\infty} \lambda S_i^{(i)}(\lambda) T_i^{(i)}(\lambda)$$

$$= \tilde{h}_i - \tilde{h}_i = 0. \tag{14.5.22}$$

所以，$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda(1 - \lambda R(\lambda)1)_i = 0, \quad (i \in \tilde{E})$. 证毕.

因其证明较复杂，我们略去下面引理 14.5.2 的证明. 有兴趣的读者可参见张汉君[7].

引理 14.5.2 设 $\Psi(\lambda)$ 为 Q 过程，令

$$R(\lambda) = \Psi(\lambda) + \overline{Y}(\lambda) \frac{\alpha\Psi(\lambda)}{c + \lambda\alpha\Psi(\lambda)\overline{Y}}.$$

其中行向量 $\alpha \geqslant 0$，且

$$0 < \alpha 1 < +\infty,$$

$$\overline{Y}(\lambda) = 1 - \lambda\Psi(\lambda)1 - \Psi(\lambda)h,$$

$$h = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda(1 - \lambda\Psi(\lambda)1),$$

$$c + \lim_{\lambda\to\infty} \lambda\alpha\Psi(\lambda)(1 - \overline{Y}) < +\infty.$$

若 $L^0_{\Psi(\lambda)} = \{0\}$，则 $L^0_{R(\lambda)} = \{0\}$.

我们先证下面的定理.

定理 14.5.1 设 $\Psi(\lambda)$ 为 Q 过程，则一定存在极大 Q 过程 $R(\lambda)$，使 $R(\lambda) \geqslant \Psi(\lambda)$.

证明 由引理 14.5.1，存在 Q 过程 $\tilde{R}(\lambda) \geqslant \Psi(\lambda)$，使 $\tilde{R}(\lambda)$ 满足定理 14.3.1 的(iv)，即

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda(1 - \lambda\tilde{R}(\lambda)1)_i = 0, \qquad (i \in \tilde{E} = \{k : q_k = +\infty\}).$$

若 $\tilde{R}(\lambda)$ 为极大 Q 过程，结论证毕.

若 $\tilde{R}(\lambda)$ 不是极大 Q 过程，因此，它满足定理 14.3.1 的(iv)，故下面三条至少一条成立：

(i) $\inf_{i\in E} \lambda \sum_{j\in E} \tilde{R}_{ij}(\lambda) = 0$;

(ii) $\overline{Y}(\lambda) \neq 0$;

(iii) $L_{\tilde{R}(\lambda)}^{0} \neq \{0\}$ 且 $\tilde{R}(\lambda)$ 中断.

如果(i) 成立,则由引理 14.2.7,存在与 λ 无关行向量 $\alpha > 0$,使 $\alpha 1 = +\infty$,但 $\lambda\alpha\tilde{R}(\lambda)1 < +\infty$,令

$$R(\lambda) = \tilde{R}(\lambda) + (1 - \lambda\tilde{R}(\lambda)1)\frac{\alpha\tilde{R}(\lambda)}{\lambda\alpha\tilde{R}(\lambda)1}.$$

不难验证,$R(\lambda)$ 是诚实 Q 过程,所以,存在极大 Q 过程 $R(\lambda)$ 满足 $R(\lambda) \geqslant \tilde{R}(\lambda) \geqslant \Psi(\lambda)$.

如果(iii) 成立,取 $0 \neq \eta(\lambda) \in L_{\tilde{R}(\lambda)}^{0}$,令

$$R(\lambda) = \tilde{R}(\lambda) + (1 - \lambda\tilde{R}(\lambda)1)\frac{\eta(\lambda)}{\lambda\eta(\lambda)1}.$$

不难验证,$R(\lambda)$ 是诚实 Q 过程,所以,存在极大 Q 过程 $R(\lambda)$ 满足 $R(\lambda) \geqslant \tilde{R}(\lambda) \geqslant \Psi(\lambda)$.

如果(i),(iii) 不成立,而(ii) 成立,即 $\bar{Y}(\lambda) \neq 0$,令

$$R(\lambda) = \tilde{R}(\lambda) + \bar{Y}(\lambda)\frac{\alpha\tilde{R}(\lambda)}{c + \lambda\alpha\tilde{R}(\lambda)\bar{Y}}. \qquad (14.5.23)$$

其中行向量 $\alpha \geqslant 0$,且 $0 < \alpha 1 < +\infty$,

$$c = \lim_{\lambda\to\infty}\lambda\alpha\tilde{R}(\lambda)(1 - \bar{Y}) < +\infty. \qquad (14.5.24)$$

由(i) 不成立得

$$\inf_{i\in E}\lambda\sum_{j\in E}R_{ij}(\lambda) \geqslant \inf_{i\in E}\lambda\sum_{j\in E}\tilde{R}_{ij}(\lambda) > 0. \qquad (14.5.25)$$

直接验证得

$$Z(\lambda) = 1 - \lambda R(\lambda)1 - R(\lambda)h = 0. \qquad (14.5.26)$$

其中 $h = \lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1 - \lambda R(\lambda)1)$.

由 $L_{\tilde{R}(\lambda)}^{0} = \{0\}$,$\alpha 1 < +\infty$ 以及引理 14.5.2 知

$$L_{R(\lambda)}^{0} = \{0\}. \qquad (14.5.27)$$

再由

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1 - \lambda\tilde{R}(\lambda)1)_i = 0, \qquad (i \in \tilde{E}), \qquad (14.5.28)$$

所以

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1 - \lambda R(\lambda)1)_i \leqslant \lim_{\lambda\to\infty}\lambda(1 - \lambda\tilde{R}(\lambda)1)_i = 0, \quad (i \in \tilde{E}). \qquad (14.5.29)$$

由(14.5.26)－(14.5.29)及定理14.3.1知,$R(\lambda)$为极大Q过程,且$R(\lambda)\geqslant\Psi(\lambda)$.　证毕.

由定理14.5.1立得极大Q过程存在准则.

定理 14.5.2　设Q为任一Q－矩阵,极大Q过程总存在.

§6　极大Q过程的唯一性准则

我们仅给出Q为全稳定时极大Q过程的唯一性准则,在这一部分恒设Q为全稳定Q－矩阵,$\Phi(\lambda)$为最小Q过程.

设$\Psi(\lambda)$为任一Q过程,令

$$\eta_j^i(\lambda)\triangleq\lambda\psi_{ij}(\lambda)-\sum_{k\in E}q_{ik}\psi_{kj}(\lambda)-\delta_{ij},\qquad(i,j\in E;\lambda>0).\tag{14.6.1}$$

$$\eta^i(\lambda)\triangleq\{\eta_j^i(\lambda);j\in E\}\qquad(i\in E;\lambda>0).\tag{14.6.2}$$

引理 14.6.1　固定$i\in E$,则$\eta^i(\lambda)\in L^0_{\Psi(\lambda)}$.

证明　由柯氏向后不等式组得

$$\eta^i(\lambda)\geqslant 0,\qquad(i\in E).\tag{14.6.3}$$

由(14.6.1)得

$$\sum_{j\in E}\eta_j^i(\lambda)\leqslant(\lambda+q_i)\sum_{j\in E}\psi_{ij}(\lambda)\leqslant\frac{\lambda+q_i}{\lambda}<+\infty.\tag{14.6.4}$$

由(14.6.3),(14.6.4)得

$$\eta^i(\lambda)\in L.\tag{14.6.5}$$

利用预解方程,我们有

$$\begin{aligned}\eta_j^i(\lambda)-\eta_j^i(\mu)&=\lambda\psi_{ij}(\lambda)-\sum_{k\in E}q_{ik}\psi_{kj}(\lambda)-\mu\psi_{ij}(\mu)+\sum_{k\in E}q_{ik}\psi_{kj}(\mu)\\&=\lambda\psi_{ij}(\lambda)-\lambda\psi_{ij}(\mu)+(\lambda-\mu)\psi_{ij}(\mu)\\&\quad+(\lambda-\mu)\sum_{k\in E}q_{ik}\sum_{l\in E}\psi_{kl}(\lambda)\psi_{lj}(\mu)\\&=(\mu-\lambda)\sum_{l\in E}\Big(\lambda\psi_{il}(\lambda)-\sum_{k\in E}q_{ik}\psi_{kl}(\lambda)-\delta_{il}\Big)\psi_{lj}(\mu)\end{aligned}$$

$$= (\mu - \lambda) \sum_{l \in E} \eta_l^i(\lambda) \psi_{lj}(\mu). \qquad (14.6.6)$$

由(14.6.5),(14.6.6) 立得

$$\eta^i(\lambda) \in L_{\Psi(\lambda)}, \qquad (i \in E). \qquad (14.6.7)$$

往证 $\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \eta^i(\lambda) = 0, \quad (i \in E).$

分两种情形

(1) $j = i$,由(14.6.1)

$$\lambda \eta_i^i(\lambda) = \lambda(\lambda \psi_{ii}(\lambda) - 1) + q_i \lambda \psi_{ii}(\lambda) - \lambda \sum_{k \neq i} q_{ik} \psi_{ki}(\lambda).$$

由 $\Psi(\lambda)$ 的标准性以及控制收敛定理得

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \sum_{k \neq i} q_{ik} \psi_{ki}(\lambda) = 0.$$

再由 $\Psi(\lambda)$ 满足 Q 条件得

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \eta_i^i(\lambda) = 0. \qquad (14.6.8)$$

(2) $j \neq i$,由(14.6.1)

$$\lambda \eta_j^i(\lambda) = \lambda^2 \psi_{ij}(\lambda) + q_i \lambda \psi_{ij}(\lambda) - \lambda q_{ij} \psi_{jj}(\lambda) - \lambda \sum_{k \neq i,j} q_{ik} \psi_{kj}(\lambda).$$

由 $\Psi(\lambda)$ 的标准性及控制收敛定理得

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \sum_{k \neq i,j} q_{ik} \psi_{kj}(\lambda) = 0.$$

再由 $\Psi(\lambda)$ 满足 Q 条件及标准性得

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \eta_j^i(\lambda) = 0. \qquad (14.6.9)$$

由(14.6.7),(14.6.8),(14.6.9) 得

$$\eta^i(\lambda) \in L^0_{\Psi(\lambda)}, \qquad (i \in E).$$

引理 14.6.2 若 $\Psi(\lambda)$ 是非 B 型 Q 过程,则 $L^0_{\Psi(\lambda)} \neq \{0\}$.

证明 由引理 14.6.1 知,对每个 $i \in E$,$\eta^i(\lambda) \in L^0_{\Psi(\lambda)}$,其中 $\eta_j^i(\lambda) = \lambda \psi_{ij}(\lambda) - \sum_{k \in E} q_{ik} \psi_{kj}(\lambda) - \delta_{ij}$. 由 $\Psi(\lambda)$ 为非 B 型 Q 过程,故必存在 $i_0 \in E$,使 $\eta^{i_0}(\lambda) \neq 0$. 所以,$L^0_{\Psi(\lambda)} \neq \{0\}$.

由引理 14.6.2 及极大 Q 过程的判别准则得.

引理 14.6.3 设 $\Psi(\lambda)$ 为非 B 型 Q 过程,则 $\Psi(\lambda)$ 为极大 Q 过程的充要条件是 $\Psi(\lambda)$ 诚实.

引理 14.6.4 设 Q 是全稳定的 Q－矩阵，极大 Q 过程唯一的充要条件是 Q 过程唯一，或者诚实 Q 过程唯一.

证明 必要性 只需证明，若极大 Q 过程唯一且 Q 过程不唯一，则诚实 Q 过程唯一. 事实上，因为 Q 过程不唯一，由 Q 过程的唯一性准则的证明知诚实 Q 过程存在. 再由诚实均为极大 Q 过程知诚实 Q 过程唯一.

充分性 若 Q 过程唯一，结论显然.

若 Q 过程不唯一且诚实 Q 过程唯一，由诚实 Q 过程的唯一性准则知

$$\inf_{i\in E}\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)>0. \tag{14.6.10}$$

设 $\Psi(\lambda)$ 为任一极大 Q 过程，由(14.6.10)知 $\dim u=0$，从而 B 型 Q 过程唯一，而 $\Phi(\lambda)$ 不是极大 Q 过程，则 $\Psi(\lambda)$ 是非 B 型的极大 Q 过程. 由引理 14.6.3 知，$\Psi(\lambda)$ 诚实，所以，极大 Q 过程唯一.

由引理 14.6.4，Q 过程唯一性准则以及诚实 Q 过程唯一性准则得.

定理 14.6.1 设 Q 为全稳定的 Q－矩阵，极大 Q 过程唯一的充要条件是下面两条同时成立：

(i) H－条件成立.

(ii) 或者 $\Phi(\lambda)$ 诚实；或者 $\dim v\leqslant 1$.

§7 补充与注记

侯振挺提出了极大 Q 过程(又名端 Q 过程)的概念. 张汉君对它进行了系统的研究，本章结果由张汉君[2]、[4]、[7]得到.

由第五章和第六章知，当 Q 为全瞬时，或者有限稳定无限瞬时时，诚实 Q 过程不唯一. 从而极大 Q 过程不唯一. 当 Q 为有限瞬时无限稳定时，利用第十一章的结果，我们也可以给出极大 Q 过程的唯一性准则. 在此不一一陈述.

当 Q 为"双无限"Q－矩阵时，极大 Q 过程的唯一性还未解决.

但我们知道它与诚实 Q 过程的唯一性有密切的联系(张汉君[2]).因此,我们相信只有最终解决诚实 Q 过程的唯一性问题,才能最终解决极大 Q 过程的唯一性问题.

15 可逆Q过程

可逆马尔可夫过程的概念来源于统计物理，它反映了过程关于时间的可逆性质，即所谓"细致平衡"的微观可逆性. 因此，这类过程有重要的实际意义.

本章将论述可逆 Q 过程的基本理论. 主要有可逆 Q 过程存在准则.

§1 可逆 Q 过程

定义 15.1.1 一个定义在概率空间 (Ω,F,P) 上的齐次马尔可夫过程 $\{X_t,t\geqslant 0\}$（以下简称马氏过程 $X=\{X_t,t\geqslant 0\}$）称为可逆的，如果对于任意的

$$0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n, \tag{15.1.1}$$

只要

$$t_n-t_{n-1}=t_2-t_1,t_{n-1}-t_{n-2}=t_3-t_2,\cdots \tag{15.1.2}$$

和 $i_1,i_2,\cdots,i_n\in E$，就有

$$\begin{aligned}&P(X_{t_1}=i_1,X_{t_2}=i_2,\cdots,X_{t_n}=i_n)\\&=P(X_{t_1}=i_n,X_{t_2}=i_{n-1},\cdots,X_{t_n}=i_1).\end{aligned} \tag{15.1.3}$$

上述定义给出了可逆马氏过程明显的直观意义：有限维分布关于时间是对称的.

称 $U=(u_i)_{i\in E}$ 为正分布，如果

$$u_j>0,\quad (j\in E),\quad \sum_{j\in E}u_j=1. \tag{15.1.4}$$

定义 15.1.2 马氏过程 $X=\{X(t)\}$ 称为平稳的，如果

$$\lim_{t\to\infty}p_{ij}(t)=u_j,\quad (\text{不依赖于 } i) \tag{15.1.5}$$

存在，$U=(u_i)$ 为正分布，并且

$$P(X_t = j) = u_j, \quad (j \in E, t \geqslant 0). \qquad (15.1.6)$$

此时称 $U = (u_i)$ 为过程 $X(\omega)$ 的平稳分布.

下面,我们说明具有转移矩阵 $P(t) = (p_{ij}(t); i, j \in E, t \geqslant 0)$ 的平稳马氏过程与 $P(t)$ 的可配性之间的关系. 为此,先引进如下概念:

定义 15.1.3 转移矩阵 $P(t) = (p_{ij}(t))$ 称为可配称的,如果存在正分布(u_i),使

$$u_i p_{ij}(t) = u_j p_{ji}(t), \quad (i, j \in E, t \geqslant 0). \qquad (15.1.7)$$

此时称(u_i) 为$(p_{ij}(t))$ 的配称分布.

注 条件(15.1.7) 等价于

$$u_i p_{ij}(\lambda) = u_j p_{ji}(\lambda), \quad (i, j \in E, \lambda > 0). \qquad (15.1.8)$$

其中

$$p_{ij}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} p_{ij}(t) dt. \qquad (15.1.9)$$

现在,我们可以给出本节的主要结果之一.

定理 15.1.1 设平稳马氏过程 $X = \{X_t\}$ 的转移矩阵为$(p_{ij}(t))$,平稳分布为$U = (u_i)$,则 X 可逆的充要条件是$(p_{ij}(t))$ 可配称且以(u_i) 为配称分布.

证明 如果(X_t) 可逆,则

$$\begin{aligned} u_i p_{ij}(t) &= P(X_0 = i, X_t = j) \\ &= P(X_0 = j, X_t = i) \\ &= u_j p_{ji}(t). \end{aligned}$$

故$(p_{ij}(t))$ 可配称且以(u_i) 为配称分布. 反之,

$$\begin{aligned} & P(X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \cdots, X_{t_n} = i_n) \\ = & P(X_{t_1} = i_1) P(X_{t_2} = i_2 | X_{t_1} = i_1) \\ & \cdots P(X_{t_n} = i_n | X_{t_1} = i_1, \cdots, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}) \\ = & u_{i_1} \prod_{k=1}^{n-1} p_{i_k i_{k+1}}(t_{k+1} - t_k) \\ = & u_{i_1} \prod_{k=1}^{n-1} u_{i_k} p_{i_k i_{k+1}}(t_{k+1} - t_k) \frac{1}{u_{i_k}} \end{aligned}$$

$$=u_{i_1}\prod_{k=1}^{n-1}p_{i_{k+1}i_k}(t_{k+1}-t_k)\frac{u_{i_{k+1}}}{u_{i_k}}$$

$$=u_{i_n}\prod_{k=1}^{n-1}p_{i_{k+1}i_k}(t_{k+1}-t_k)$$

$$=u_{i_n}\prod_{k=1}^{n-1}p_{i_{n-k+1}i_{n-k}}(t_{k+1}-t_k)$$

$$=P(X_{t_1}=i_n,X_{t_2}=i_{n-1},\cdots,X_{t_n}=i_1).$$

故 X 可逆.

定义 15.1.4 关于马氏过程 $X=\{X_t\}$，称自 i 可到 j，如果存在 $t>0$，使 $p_{ij}(t)>0$（换句话说，$p_{ij}(t)\not\equiv 0,0<t<\infty$）；称 i 与 j 互通，如果自 i 可到 j 并且自 j 可到 i；如果对于一切 $i,j\in E$，i 与 j 互通，就称 $P(t)=(p_{ij}(t))$ 不可约.

我们称即平稳又可逆的马氏过程 X 为可逆 Q 过程. 有时也直接称其转移矩阵 $P(t)$ 为可逆 Q 过程. 即

定义 15.1.5 称 Q 过程 $P(t)=(p_{ij}(t))$ 可逆，如果存在正分布 $U=(u_i)$ 使得条件：

(i) $\lim\limits_{t\to\infty}p_{ij}(t)=u_j$， $(i\in E)$；

(ii) $P(t)$ 关于 U 可配称.

同时成立.

下面就是可逆 Q 过程的判别准则.

定理 15.1.2 Q 过程 $P(t)$ 可逆的充要条件是 $P(t)$ 不中断、不可约，可配称.

证明 必要性

由平稳性知 $P(t)$ 不可约，由定理 15.1.1 知 $P(t)$ 可配称，往证 $P(t)$ 不中断.

设 $P(t)$ 的配称分布为 $U=(u_i)$. 如果存在 $i\in E$ 和 $t>0$，使

$$\sum_{j\in E}p_{ij}(t)<1, \tag{15.1.10}$$

则由 $K-C$ 方程易见

$$1>\sum_{j\in E}p_{ij}(t)>\sum_{j\in E}p_{ij}(2^m t),m\geqslant 1. \tag{15.1.11}$$

由上面两式得

$$u_i > u_i \sum_{j \in B} p_{ij}(t) > u_i \sum_{j \in B} p_{ij}(2^m t) = \sum_{j \in B} u_j p_{ji}(2^m t). \tag{15.1.12}$$

命 $m \to \infty$,利用(15.1.5),(15.1.4) 及控制收敛定理,得

$$u_i > u_i \sum_{j \in E} p_{ij}(t) \geqslant \sum_{j \in E} u_j u_i = u_i. \tag{15.1.13}$$

导致矛盾,必要性得证.

充分性

因为 $P(t)$ 不可约,由 W. Feller[2] 对于每一对 $i, j \in E$,

$$\lim_{t \to \infty} p_{ij}(t) = v_j, \quad (\text{不依赖于 } i)$$

存在. 设 $P(t)$ 有配称分布 (u_i),对 (15.1.1) 的两端关于 j 求和,得到

$$u_i = \sum_{j \in E} u_j p_{ji}(t), \quad (i \in E). \tag{15.1.14}$$

于是由控制收敛定理知

$$u_i = \sum_{j \in E} u_j \lim_{t \to \infty} p_{ji}(t)$$

$$= \sum_{j \in E} u_j v_i = v_i, \quad (i \in E).$$

然后由定理 15.1.1 知 X 即平稳又可逆,从而 $P(t)$ 为可逆 Q 过程.

为了研究可逆 Q 过程,先讨论可配称 Q 过程,由下面的定理 15.1.3 知 Q 过程 $P(t) = (p_{ij}(t))$ 的可配称可导出 $Q-$ 矩阵的相应性质.

定义 15.1.6 称 $Q-$ 矩阵可配称. 如果存在正分布 $U = (u_i, i \in E)$ 使

$$u_i q_{ij} = u_j q_{ji}, \quad (i, j \in E). \tag{15.1.15}$$

此时称 U 为 Q 的配称分布.

定理 15.1.3 如果 Q 过程 $P(t)$ 关于 U 可配称,则 $Q-$ 矩阵 Q 亦然.

证明 由(15.1.7) 及(15.1.15) 知定理成立.

对于可逆 Q 过程,我们自然要问:对于给定的拟 $Q-$ 矩阵. 可

逆 Q 过程何时存在?如果存在,何时唯一?这些都是有重要意义的问题.本章将围绕第一个问题而展开,在 Q 全稳定时,给出了完整的答案.

§2 可配称 Q — 矩阵

由 §1 知,每个可配称 Q 过程对应一个配称分布.并且关于这个配称分布,其对应的 Q — 矩阵是可配称 Q — 矩阵.我们自然要问,对于给定的 Q — 矩阵,它何时可配称?如果是,如何寻找配称分布?本节将讨论这些问题.

设 $Q = (q_{ij})$ 为一个 Q — 矩阵.

定义 15.2.1 对 $i, j \in E$,若存在 E 的有限子集 $\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$,使

$$q_{ii_1} q_{i_1 i_2} \cdots q_{i_k j} \neq 0, \qquad (15.2.1)$$

则称 i 可达 j,记为 $i \rightarrow j$,且称 $[i, i_1, i_2, \cdots, i_k, j]$ 为从 i 到 j 的一条路;否则,称 i 不可达 j,并记作 $i \nrightarrow j$.若 $i \rightarrow j$ 且 $j \rightarrow i$,则称 i 与 j 互达.并记作 $i \leftrightarrow j$.若 $i \nrightarrow j$ 且 $j \nrightarrow i$,则称 i 与 j 互不达,并记作 $i \nleftrightarrow j$.

定义 15.2.2 若对于任一对 $i, j \in E, i \neq j$,要么 $i \leftrightarrow j$,要么 $i \nleftrightarrow j$,则称 Q 为可分块 Q — 矩阵.若对任一对 $i, j \in E$,总有 $i \leftrightarrow j$,则称 Q 为既约 Q — 矩阵.

设 Q — 矩阵 Q 是可分块的.如果对于一切 $j \in E, i \nrightarrow j$,我们把 i 单独作为一类;如果有 $j \in E$,使 $i \rightarrow j$,我们把 i 和 j 归入同一类.这样.我们就把 E 分成 $|D|$ 个(D 为有限或可列集,$|D|$ 为集 D 的基数)互不相交的非空子集 $E_l (l \in D)$ 之并,使得对于 $i \in E_{l_1}, j \in E_{l_2}$,$i \neq j$,总有 $i \leftrightarrow j$,倘若 $l_1 = l_2$;或 $i \nleftrightarrow j$,倘若 $l_1 \neq l_2$.我们把 $Q^{(l)} = (q_{ij};\ i, j \in E_l)$ 叫做 Q 的既约子块,Q 既约当且仅当 D 只包含一个元素.

定义 15.2.3 设 $Q^{(l)}$ 为 Q 的既约子块,若 $[i, i_1, \cdots, i_k, j]$ 为 E_l 中从 i 到 j 的一条路,则

$$r_{ii_1 i_2 \cdots i_k j} = \frac{q_{ji_k} q_{i_k i_{k-1}} \cdots q_{i_1 i}}{q_{ii_1} q_{i_1 i_2} \cdots q_{i_k j}} \qquad (15.2.2)$$

叫做从 i 到 j 的路$[i,i_1,i_2,\cdots,i_k,j]$的示性数. 若对于从 i 到 j 的一切路都有相同的示性数，则称从 i 到 j 是可示性的，并把这个共同值记为 $r_{ij}^{(l)}$，称之为从 i 到 j 的示性数. 若对于 E_l 中的任一序对(i,j)，从 i 到 j 都是可示性的，则称 $Q^{(l)}$ 为可示性的. $R^{(l)}=(r_{ij}^{(l)})$ 称为 $Q^{(l)}$ 的示性矩阵.

如果 $Q^{(l)}$ 的阶数为 1，即 E_l 仅含一个元素，若 $q_{ii}\neq 0$，则 $r_{ii}^{(l)}=1$；否则，$r_{ii}^{(l)}$ 无定义，但为方便，此时，我们约定 $r_{ii}^{(l)}=1$，并且还称 $Q^{(l)}$ 为可示性的.

定义 15.2.4 设 $Q^{(l)}$ 为 Q 的既约子块，若

$$\pi_j^{(l)}=(\sum_{i\in E_l}r_{ij}^{(l)})^{-1}>0,\quad (j\in E_l), \tag{15.2.3}$$

$$\sum_{j\in E_l}\pi_j^{(l)}=1, \tag{15.2.4}$$

$$\pi_i^{(l)}q_{ij}=\pi_j^{(l)}q_{ji},\quad (i,j\in E_l). \tag{15.2.5}$$

则称 $Q^{(l)}$ 为完全可示性的，称$(\pi_i^{(l)})$为它的示性分布族.

定义 15.2.5 设 Q 为可分块 $Q-$ 矩阵，若 Q 的每一个既约子块 $Q^{(l)}=(q_{ij};i,j\in E_l)$，$(l\in D)$ 都是完全可示性的，则称 Q 为完全可示性 $Q-$ 矩阵. $Q^{(l)}$ 的示性分布$(\pi_i^{(l)},i\in E_l)$ 的全体$\{(\pi_i^{(l)},i\in E_l),(l\in D)\}$ 叫做 Q 的示性分布族.

定理 15.2.1 Q 是可配称 $Q-$ 矩阵的充要条件是：它是完全可示性的.

证明 充分性

设 Q 是完全可示性的，任选 $v_l>0$，$(l\in D)$，$\sum_{l\in D}v_l=1$，并令

$$u_i=v_l\pi_i^{(l)},\quad (i\in E_l,l\in D).$$

显见(u_i) 为一个正分布，且

$$u_iq_{ij}=u_jq_{ji},\quad (i,j\in E). \tag{15.2.6}$$

于是 Q 是可配称的，且以(u_i) 为配称分布.

必要性

设 Q 是可配称的，即存在正分布(u_i) 使

$$u_iq_{ij}=u_jq_{ji},\quad (i,j\in E). \tag{15.2.7}$$

于是，对于任一对 $i,j\in E$，有

$$q_{ij}=0\Leftrightarrow q_{ji}=0. \tag{15.2.8}$$

由此易证 Q 是可分块的. 阶数为 1 的子块显然是完全可示性的. 对于阶数 $\geqslant 2$ 的子块 $Q^{(l)}=(q_{ij};i,j\in E_l)$，应有

$$u_iq_{ij}=u_jq_{ji},\quad (i,j\in E_l). \tag{15.2.9}$$

设 $[i,i_1,i_2,\cdots,i_k,j]$ 是一条从 i 到 j 的路（由于 $i\leftrightarrow j$，从 i 到 j 的路一定存在），于是

$$\begin{aligned} r_{ii_1i_2\cdots i_kj} &= \frac{q_{ji_k}q_{i_ki_{k-1}}\cdots q_{i_1i}}{q_{ii_1}q_{i_1i_2}\cdots q_{i_kj}} \\ &= \frac{q_{i_1i}}{q_{ii_1}}\frac{q_{i_2i_1}}{q_{i_1i_2}}\cdots\frac{q_{ji_k}}{q_{i_kj}} \\ &= \frac{u_i}{u_{i_1}}\frac{u_{i_1}}{u_{i_2}}\cdots\frac{u_{i_k}}{u_j} \\ &= \frac{u_i}{u_j}. \end{aligned} \tag{15.2.10}$$

故 $r_{ii_1i_2\cdots i_kj}$ 的值不依赖于从 i 到 j 的路的选择，所以 $Q^{(l)}$ 是可示性的，并且它的示性矩阵 $(r_{ij}^{(l)})$ 的元素

$$\gamma_{ij}^{(l)}=\frac{u_i}{u_j}>0,\quad (i,j\in E_l). \tag{15.2.11}$$

而且

$$\sum_{i\in E_l}\gamma_{ij}^{(l)}=\sum_{i\in E_l}\frac{u_i}{u_j}=\frac{\sum\limits_{i\in E_l}u_i}{u_j}<+\infty, \tag{15.2.12}$$

$$\pi_j^{(l)}=(\sum_{i\in E_l}\gamma_{ij}^{(l)})^{-1}=\frac{u_j}{\sum\limits_{i\in E_l}u_i}>0, \tag{15.2.13}$$

$$\sum_{j\in E_l}\pi_j^{(l)}=\frac{\sum\limits_{j\in E_l}u_j}{\sum\limits_{i\in E_l}u_i}=1. \tag{15.2.14}$$

由

$$\pi_j^{(l)} = \frac{u_j}{\sum_{i \in E_l} u_i} \tag{15.2.15}$$

及(15.2.7)知

$$\pi_i^{(l)} q_{ij} = \pi_j^{(l)} q_{ji}, \quad (i, j \in E). \tag{15.2.16}$$

所以 $Q^{(l)}$ 是完全可示性的.于是 Q 是完全可示性 $Q-$ 矩阵.定理证毕.

定理 15.2.2 设 Q 是可配称 $Q-$ 矩阵,则 Q 的配称分布唯一的充要条件是:它是既约的.在 Q 的配称分布唯一时,Q 的配称分布就是 Q 的示性分布.在 Q 的配称分布不唯一时,Q 就有无穷多个配称分布,它们可用如下方法全部构造出来,任选 $v_l(l \in D)$,$\sum_{l \in D} v_l = 1$,则

$$u_i = v_l \pi_i^{(l)}, \quad (i \in E_l, l \in D)$$

是 Q 的一个配称分布.

证明 注意定理 15.2.1 的证明的前半部分,立得我们的定理.

对于一个给定的 $Q-$ 矩阵,如何判定它是否可配称?在可配称时,如何求出它的配称分布?定理 15.2.1 和定理 15.2.2 告诉我们,只需考虑它的每一个既约子块便已足够.指标集 E_l 只含有一个元素的情形是不足道的,指标集 E_l 含有有限多个元素的情形也好办.因此,我们只考虑指标集含有可列无穷多个元素的情形.为叙述方便,无妨设 $E_l = E$,即只考虑既约 $Q-$ 矩阵.

定理 15.2.3 设 Q 是一个完全可示性的既约 $Q-$ 矩阵,它的示性矩阵为 (r_{ij}),配称分布为 (u_i),则我们有

$$0 < r_{ij} < \infty, \quad (i, j \in E), \tag{15.2.17}$$

$$r_{ij} = \frac{1}{r_{ji}} \quad (i, j \in E), \tag{15.2.18}$$

$$r_{ik} r_{kj} = r_{ij} \quad (i, j \in E), \tag{15.2.19}$$

$$\sum_i r_{ij} < \infty, \quad (j \in E), \tag{15.2.20}$$

$$u_j = (\sum_i r_{ij})^{-1}, \quad (j \in E). \tag{15.2.21}$$

证明 由定理 15.2.1 的证明显见本定理成立.

如果 $q_{ij} > 0 \quad (i, j \in E)$,则示性矩阵 R 可由 Q 围绕对角线翻除而得到:

$$r_{ij} = \frac{q_{ji}}{q_{ij}}, \quad (i, j \in E). \tag{15.2.22}$$

或用矩阵符号形式地写成

$$R = Q^T \div Q. \tag{15.2.23}$$

此处 Q^T 表 Q 之转置,而 $\div$ 号表示逐元相除.

定理 15.2.4 (翻除判别法) 设 Q 是一个非对角线元素全部大于零的 $Q-$ 矩阵,R 是由(15.2.22) 所得的翻除矩阵,则 Q 可配称的充要条件是 R 满足(15.2.17) ~ (15.2.20).

证明 由定理 15.2.1 和定理 15.2.2 知条件是必要的. 往证充分性. 取定 $i_0 \in E$,并令

$$u_i = r_{ii_0} / (\sum_{k \in E} r_{ki_0}). \tag{15.2.24}$$

则由(15.2.17)和(15.2.20)知(u_i)是一个正分布. 再由(15.2.19)和(15.2.22) 知

$$\frac{q_{ji}}{q_{ij}} = r_{ij} = \frac{r_{ii_0}}{r_{ji_0}} = \frac{u_i}{u_j}, \tag{15.2.25}$$

故

$$u_i q_{ij} = u_j q_{ji}.$$

即 Q 是可配称的.

注 (i) (15.2.24) 表明,(u_i) 可从 R 的任一列归一化得到.

(ii) 由(15.2.18) 知

$$\begin{aligned} u_i &= \frac{r_{ii_0}}{\sum_{k \in E} r_{ki_0}} \\ &= (\sum_{k \in E} r_{ki_0} r_{i_0 i})^{-1} = (\sum_{k \in E} r_{ki})^{-1}, \end{aligned}$$

从而(15.2.24) 与(15.2.21) 一致.

我们注意，如果非对角线上有零元素，则定理 15.2.4 失效. 此时该如何处理呢？为此先引入

定义 15.2.6 设 $A=(a_{ij})$ 是非对角线非负的矩阵，令

$$b_{ij}=\begin{cases}a_{ji}/a_{ij}, & a_{ij}>0;\\ +\infty, & a_{ij}=0, a_{ji}>0;(i\neq j),\\ * & a_{ij}=a_{ji}=0,\end{cases} \tag{15.2.26}$$

$$b_{ii}=1.$$

此处 $*$ 叫做不定元，形式地写成

$$B(A)=A^T\div A=(b_{ij}). \tag{15.2.27}$$

$B(A)$ 叫做 A 的翻除拟阵.

在实际中，我们可以形式地使用翻除拟阵求既约矩阵 Q 的配称分布. 对于给定的 Q，先不管它是否可配称，按(15.2.26)算出 $B(Q)$. 在不定元 $*$ 处按照(15.2.17)～(15.2.19)的条件填空. 若所有的 $*$ 处均已填满，所得的矩阵满足(15.2.17)～(15.2.20)，则可用(15.2.21)算出(u_i)，然后检验(u_i)是否满足(15.2.7).

例 15.2.1 设 $\theta>0$，

$$q_{ij}=\begin{cases}je^{-\theta}, & j=i+1;\\ -(j+(j+1)e^{-\theta}), & j=i;\\ j+1, & j=i-1;\\ 0, & 其它.\end{cases} \tag{15.2.28}$$

即

$$Q=\begin{pmatrix}-e^{-\theta} & e^{-\theta} & 0 & 0 & \cdots\\ 1 & -(1+2e^{-\theta}) & 2e^{-\theta} & 0 & \cdots\\ 0 & 2 & -(2+3e^{-\theta}) & 3e^{-\theta} & \cdots\\ 0 & 0 & 3 & -(3-4e^{-\theta}) & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{pmatrix}. \tag{15.2.29}$$

显然 Q 是既约的. 它的翻除拟阵是

$$B(Q) = \begin{pmatrix} 1 & e^{\theta} & * & * & \cdots \\ e^{-\theta} & 1 & e^{\theta} & * & \cdots \\ * & e^{-\theta} & 1 & e^{\theta} & \cdots \\ * & * & e^{-\theta} & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

依照(15.2.17)～(15.2.19)的要求，把 * 处填上(这里使用条件(15.2.19)，即 R 的各行(列)成比例)，得到

$$R = \begin{pmatrix} 1 & e^{\theta} & e^{2\theta} & \cdots \\ e^{-\theta} & 1 & e^{\theta} & \cdots \\ e^{-2\theta} & e^{-\theta} & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

这个 R 显然满足(15.2.17)～(15.2.20)，再由(15.2.21)得

$$u_j = (\sum_i r_{ij})^{-1} = (1 - e^{-\theta})e^{-j\theta}. \qquad (15.2.30)$$

容易验证

$$u_i q_{ij} = u_j q_{ji}.$$

故 Q 可配称并以 (u_i) 为配称分布.

§3 可配称 Q 过程的存在性

从本节开始，我们假定 Q 为全稳定的 Q－矩阵.

可配称 Q 过程的第一个最重要结果是

定理 15.3.1 最小 Q 过程关于 $U=(u_i)$ 可配称当且仅当 Q 关于 $U=(u_i)$ 可配称. 特别地，对于给定的可配称 Q－矩阵，可配称 Q 过程总存在.

证明 必要性见定理 15.1.3. 往证充分性，命

$$p_{ij}^{(0)}(\lambda) = \frac{\delta_{ij}}{\lambda + q_i}, \qquad (i, j \in E). \qquad (15.3.1)$$

$$p_{ij}^{(n+1)}(\lambda) = \sum_{k \neq i} \frac{q_{ik}}{\lambda + q_i} p_{kj}^{(n)}(\lambda), \quad (i, j \in E). \qquad (15.3.2)$$

由第四章知最小 Q 过程

$$\varphi_{ij}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)}(\lambda), \quad (i,j \in E). \tag{15.3.3}$$

而且还有

$$p_{ij}^{(n+1)}(\lambda) = \sum_{k \neq j} \frac{p_{ik}^{(n)}(\lambda) q_{kj}}{\lambda + q_j}. \tag{15.3.4}$$

令

$$\bar{p}_{ij}^{(n)}(\lambda) = p_{ji}^{(n)}(\lambda) \frac{u_j}{u_i}, \tag{15.3.5}$$

$$\tilde{\varphi}_{ij}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{p}_{ij}^{(n)}(\lambda), \tag{15.3.6}$$

从而

$$\tilde{\varphi}_{ij}(\lambda) = \varphi_{ji}(\lambda) \frac{u_j}{u_i}. \tag{15.3.7}$$

当 $n = 0$ 时

$$\begin{aligned} \bar{p}_{ij}^{(0)}(\lambda) &= p_{ji}^{(0)}(\lambda) \frac{u_j}{u_i} = \frac{\delta_{ij}}{\lambda + q_i} \frac{u_j}{u_i} \\ &= \frac{\delta_{ij}}{\lambda + q_i} = p_{ij}^{(0)}(\lambda). \end{aligned} \tag{15.3.8}$$

假若

$$\bar{p}_{ij}^{(n)}(\lambda) = p_{ij}^{(n)}(\lambda), \tag{15.3.9}$$

则

$$\begin{aligned} \bar{p}_{ij}^{(n+1)}(\lambda) &= p_{ji}^{(n+1)}(\lambda) \frac{u_j}{u_i} \\ &= \sum_{k \neq j} \frac{q_{jk} p_{ki}^{(n)}(\lambda)}{\lambda + q_j} \frac{u_j}{u_i} \\ &= \sum_{k \neq j} \frac{q_{jk} \bar{p}_{ki}^{(n)}(\lambda)}{\lambda + q_j} \frac{u_j}{u_i} \\ &= \sum_{k \neq j} \frac{q_{jk} p_{ik}^{(n)}(\lambda)}{\lambda + q_j} \frac{u_i}{u_k} \frac{u_j}{u_i} \\ &= \sum_{k \neq j} \frac{p_{ik}^{(n)}(\lambda) q_{kj}}{\lambda + q_j} \\ &= p_{ij}^{(n+1)}(\lambda). \end{aligned} \tag{15.3.10}$$

于是对于任一非负整数 n，有

$$\tilde{p}_{ij}^{(n)}(\lambda) = p_{ij}^{(n)}(\lambda). \tag{15.3.11}$$

从而

$$\tilde{\varphi}_{ij}(\lambda) = \varphi_{ij}(\lambda). \tag{15.3.12}$$

由(15.3.7)和(15.3.12)得

$$\varphi_{ij}(\lambda) = \varphi_{ji}(\lambda)\frac{u_j}{u_i}.$$

即

$$u_i\varphi_{ij}(\lambda) = u_j\varphi_{ji}(\lambda), \tag{15.3.13}$$

于是充分性得证.

§4 向前、向后方程的等价性

本节将证明，对于可配称 Q 过程来说，向前、向后方程是等价的，即要么同时成立，要么同时不成立. 这就是如下

定理 15.4.1 设$(p_{ij}(t))$为一 Q 过程，它是可配称过程，则对某一对 $i,j\in E$

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k\in E} q_{ik}p_{kj}(t) \tag{15.4.1}$$

成立的充要条件是

$$p'_{ji}(t) = \sum_{k\in E} p_{jk}(t)q_{ki}. \tag{15.4.2}$$

证明 以(u_i)表可配称 Q 过程$(p_{ij}(t))$的配称分布，则

$$\begin{aligned}
p'_{ji}(t) &= \left(\frac{u_i}{u_j}p_{ij}(t)\right)' \\
&= \frac{u_i}{u_j}p'_{ij}(t) = \frac{u_i}{u_j}\sum_{k\in E}q_{ik}p_{kj}(t) \\
&= \frac{u_i}{u_j}\sum_{k\in E}\frac{u_k}{u_i}q_{ki}\frac{u_j}{u_k}p_{jk}(t) \\
&= \sum_{k\in E}p_{jk}(t)q_{ki},
\end{aligned}$$

于是由(15.4.1)推出(15.4.2). 反之亦然.

由定理 15.4.1 知,可配称 Q 过程及可逆 Q 过程都是或者 $B\cap F$ 型的,或者 $\overline{B}\cap\overline{F}$ 型的.

§5　可配称 Q 过程的唯一性

本节研究可配称 Q 过程的唯一性. 我们将固定一个正分布 U. 这一节所讨论的可配称性、唯一性,都是关于这个 U 而言的. 本节的主要结果是:

定理 15.5.1　设 Q 为可配称 Q－矩阵,$U=(u_i)$ 为其配称分布,则可配称 Q 过程唯一的充要条件是

(i)　$\dim u=0$;

(ii)　$\sum\limits_{i\in E}u_id_i<+\infty$.

同时成立. 若(i) 或(ii) 不成立,则存在无穷多个可配称 Q 过程.

以下分几个命题来证明定理 15.5.1,其中命题 15.5.1 和命题 15.5.2 分别说明条件(i) 和(ii) 是必要的. 命题 15.5.3 说明条件(i) 和(ii) 是充分的.

命题 15.5.1　若 $\dim u\neq 0$,则存在无穷多个可配称 Q 过程.

证明　由 $\dim u\neq 0$,则 $\overline{X}(\lambda)\neq\mathbf{0}$,且 $\lambda\sum\limits_{i\in E}u_i\overline{X}_i(\lambda)$ 关于 λ 单调增. 于是,我们分两种情况来讨论.

(i)　$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda\sum\limits_{i\in E}u_i\overline{X}_i(\lambda)<+\infty$.

此时,我们有 $A\triangleq\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\sum\limits_{i\in E}u_i\overline{X}_i(\lambda)(1-\overline{X}_i)<+\infty$,其中 $\overline{X}_i=\lim\limits_{\lambda\to 0}\overline{X}_i(\lambda)$. 任取 $c\in[A,\infty)$,则

$$\psi^c_{ij}(\lambda)=\varphi_{ij}(\lambda)+\frac{\overline{X}_i(\lambda)u_j\overline{X}_j(\lambda)}{c+\lambda\sum\limits_{k\in E}u_k\overline{X}_k(\lambda)(1-\overline{X}_k)}\tag{15.5.1}$$

是一个可配称 Q 过程,对不同 c,$\Psi^c(\lambda)=(\psi^c_{ij}(\lambda);i,j\in E)$ 互不相同,于是我们有无穷多个可配称 Q 过程.

(ii)　$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda\sum\limits_{i\in E}u_i\overline{X}_i(\lambda)=+\infty$.

显然，我们有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda u_i Z_i(\lambda)=+\infty, \tag{15.5.2}$$

其中 $Z_i(\lambda)=(1-\lambda\Phi(\lambda)1)_i$, $(i\in E)$. 此时，我们有

$$\psi_{ij}^c(\lambda)=\varphi_{ij}(\lambda)+\frac{Z_i(\lambda)u_jZ_j(\lambda)}{c+\lambda\sum_{k\in E}u_kZ_k(\lambda)},\quad (c\geqslant 0) \tag{15.5.3}$$

是一个可配称 Q 过程，当 c 变动时，我们得到无穷多个可配称 Q 过程.

为证条件(ii)的必要性，先证

引理 15.5.1 设 Q 关于 $U=(u_i)$ 可配称，则有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\sum_{i\in E}u_iZ_i(\lambda)=\sum_{i\in E}u_id_i+\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\sum_{i\in E}u_i\overline{X}_i(\lambda). \tag{15.5.4}$$

其中

$$Z_i(\lambda)=(1-\lambda\Phi(\lambda)1)_i,$$

$$d_i=q_i-\sum_{j\neq i}q_{ij}=\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda(1-\lambda\Phi(\lambda)1)_i.$$

证明 由于 $Z(\lambda)=\Phi(\lambda)d+\overline{X}(\lambda)$，故

$$\sum_{k\in E}\lambda u_kZ_k(\lambda)=\lambda\sum_{k\in E}u_k(\Phi(\lambda)d)_k+\lambda\sum_{k\in E}u_k\overline{X}_k(\lambda). \tag{15.5.5}$$

而

$$\begin{aligned}\sum_{k\in E}\lambda u_k(\Phi(\lambda)d)_k&=\sum_{k\in E}\lambda u_k\sum_{a\in E}\varphi_{ka}(\lambda)d_a\\&=\sum_{k\in E}\lambda\sum_{a\in E}u_i\varphi_{ka}(\lambda)d_a=\sum_{a\in E}u_ad_a\sum_{k\in E}\lambda\varphi_{ak}(\lambda)\\&=\sum_{a\in E}u_ad_a(1-Z_a(\lambda)).\end{aligned} \tag{15.5.6}$$

将(15.5.6)代入(15.5.5)得

$$\sum_{k\in E}\lambda u_kZ_k(\lambda)=\sum_{a\in E}u_ad_a(1-Z_a(\lambda))+\sum_{k\in E}\lambda u_k\overline{X}_k(\lambda). \tag{15.5.7}$$

在(15.5.7)中，令 $\lambda\to\infty$(注意 $0\leqslant 1-Z_i(\lambda)\uparrow 1$) 得

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\sum_{k\in E}u_kZ_k(\lambda)=\sum_{a\in E}u_ad_a+\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\sum_{k\in E}u_k\bar{X}_k(\lambda).$$

命题 15.5.2 若 $\sum_{a\in E}u_ad_a=+\infty$，则存在无穷多个可配称 Q 过程.

证明 由 $\sum_{a\in E}u_ad_a=+\infty$ 及引理 15.5.1 得

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\sum_{i\in E}u_iZ_i(\lambda)=+\infty. \tag{15.5.8}$$

同命题 15.5.1 的情形(ii)一样. 我们得到无穷多个可配称 Q 过程.

由定理 4.3.1 知，每一个 Q 过程 $\Psi(\lambda)$ 具有如下形式

$$\psi_{ij}(\lambda)=\varphi_{ij}(\lambda)+\sum_{a\in E}\varphi_{ia}(\lambda)d_aF_j^a(\lambda)+B_{ij}(\lambda). \tag{15.5.9}$$

其中 $F(\lambda)$ 满足(4.3.3)，而 $B_{ij}(\lambda)\in\mu_i^+(\frac{1}{\lambda})$.

引理 15.5.2 形如(15.5.9)的 $\Psi(\lambda)$ 满足 Q 条件的必要条件是

$$d_a\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda F_j^a(\lambda)=0,\qquad (a,j\in E). \tag{15.5.10}$$

证明 显然，若形如(15.5.9)的 $\Psi(\lambda)$ 满足 Q 条件，则

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda^2\Big(\sum_{a\in E}\varphi_{ia}(\lambda)d_aF_j^a(\lambda)+B_{ij}(\lambda)\Big)=0,\quad (i,j\in E). \tag{15.5.11}$$

由 $B_{ij}(\lambda)\in\mu_i^+(\frac{1}{\lambda})$ 知

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda^2B_{ij}(\lambda)=0,\quad (i,j\in E). \tag{15.5.12}$$

所以

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda^2\sum_{a\in E}\varphi_{ia}(\lambda)d_aF_j^a(\lambda)=0,\quad (i,j\in E). \tag{15.5.13}$$

从而更有

$$\sum_{a\in E}\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda^2\varphi_{ia}(\lambda)d_aF_j^a(\lambda)=0,\quad (i,j\in E). \tag{15.5.14}$$

注意级数的各项非负，我们有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\varphi_{ia}(\lambda)d_a\lambda F_j^a(\lambda)=0,\quad (i,a,j\in E). \tag{15.5.15}$$

但 $\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\varphi_{ia}(\lambda)=\delta_{ia}$. 取 $i=a$，就得

$$d_a \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda F_j^a(\lambda) = 0, \quad (a, j \in E).$$

命题 15.5.3 若 Q 为可配称 Q－矩阵，$U=(u_i)$ 为一个配称分布．若下面两条同时成立：

(i) $\dim u = 0$;

(ii) $\sum_{i\in E} u_i d_i < +\infty$,

则可配称 Q 过程唯一．

证明 由定理 4.3.1 及条件 (i)，对任意 Q 过程具有下列形式

$$\psi_{ij}(\lambda) = \varphi_{ij}(\lambda) + \sum_{a\in E} \varphi_{ia}(\lambda) d_a F_j^a(\lambda). \tag{15.5.16}$$

设 $\Psi(\lambda)$ 为任一可配称 Q 过程．由 $\Phi(\lambda)$ 是可配称 Q 过程，我们有

$$u_i \sum_{a\in E} \varphi_{ia}(\lambda) d_a F_j^a(\lambda) = u_j \sum_{a\in E} \varphi_{ja}(\lambda) d_a F_i^a(\lambda). \tag{15.5.17}$$

在(15.5.17) 两端同乘 λ，对 j 求和，我们有

$$\sum_{a\in E} u_a d_a \varphi_{ai}(\lambda) \lambda [F^a(\lambda), 1] = \sum_{a\in E} u_a d_a F_i^a(\lambda) (\lambda\Phi(\lambda)1)_a. \tag{15.5.18}$$

由 $\lambda[F^a(\lambda), 1] \leqslant 1$, $(\lambda\Phi(\lambda)1)_a \leqslant 1$, $\sum_{a\in E} u_a d_a < +\infty$ 以及 $\lim_{\lambda\to+\infty} d_a \lambda F_i^a(\lambda) = 0$. 在(15.5.18) 式两端同乘 λ，再在 $\lambda \uparrow +\infty$ 之下取极限，利用控制收敛定理得

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \overline{\lim_{\lambda\to+\infty}} \sum_{a\in E} u_a d_a \lambda \varphi_{ai}(\lambda) \lambda [F^a(\lambda), 1] \\ &= \overline{\lim_{\lambda\to+\infty}} \sum_{a\in E} u_a d_a \lambda F_i^a(\lambda) (\lambda\Phi(\lambda)1)_a \\ &\leqslant \sum_{a\in E} u_a d_a \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda F_i^a(\lambda) = 0. \end{aligned}$$

所以，

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \sum_{a\in E} u_a d_a \lambda \varphi_{ai}(\lambda) \lambda [F^a(\lambda), 1] = 0. \tag{15.5.19}$$

在(15.5.16) 中两端对 j 求和再乘 λ 得

$$\lambda \sum_{j\in E} \psi_{ij}(\lambda) = \lambda \sum_{j\in E} \varphi_{ij}(\lambda) + \sum_{a\in E} \varphi_{ia}(\lambda) d_a \lambda [F^a(\lambda), 1]. \tag{15.5.20}$$

所以，我们有

$$u_i(1-\lambda\Psi(\lambda)1)_i = u_i(1-\lambda\Phi(\lambda)1)_i - \sum_{a\in E} u_a d_a \varphi_{ai}(\lambda)\lambda[F^a(\lambda),1]. \tag{15.5.21}$$

两端同乘 λ，对 $\lambda\uparrow+\infty$ 取极限，由(15.5.19)得

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda(1-\lambda\Psi(\lambda)1)_i = \lim_{\lambda\to+\infty}(1-\lambda\Phi(\lambda)1)_i = d_i. \tag{15.5.22}$$

由定理13.1.1知，$\Psi(\lambda)$ 为 B 型 Q 过程，但由(i)知 B 型 Q 过程唯一，所以，$\Psi(\lambda)=\Phi(\lambda)$，即可配称 Q 过程唯一.

§6 可逆 Q 过程存在准则

本节固定全稳定 Q－矩阵 Q 来研究可逆 Q 过程的存在性. 我们给出了这个问题的完整解答. 即可逆 Q 过程存在准则.

定理 15.6.1 对任给的全稳定 Q－矩阵 Q，存在可逆 Q 过程的充分必要条件为下列三条同时成立：

(i) Q 可配称；

(ii) 或者 Q 即约；或者 Q 可约，但每个零流出子块至少含有一个非保守状态；

(iii) 存在 Q 的某个配称分布 $U=(u_i)$ 使得

或者 $\sum_{i\in E} u_i d_i = +\infty$；或者 $\lim_{\lambda\to+\infty}\sum_{k\in E}\lambda u_k \overline{X}_k(\lambda) = +\infty$；

或者 $\sum_{i\in E} u_i d_i \leqslant \sum_{k\in E}\lambda u_k \overline{X}_k(\lambda) < +\infty$.

其中 $\overline{X}(\lambda)$ 是方程

$$\begin{cases}(\lambda I - Q)U = 0,\\ 0\leqslant U\leqslant 1.\end{cases}$$

的最大解. $d=(d_i, i\in E)$ 为 Q 的非保守量.

为证此定理，需要作若干准备.

自定理4.3.1知，任意 Q 过程必具有下面形式

$$\psi_{ij}(\lambda) = \varphi_{ij}(\lambda) + \sum_{a\in E}\varphi_{ia}(\lambda)d_a F^a_j(\lambda) + B_{ij}(\lambda). \tag{15.6.1}$$

其中，当 i 固定时，$0\leqslant B_{ij}(\lambda)\in L$，当 j 固定时，$B_{ij}(\lambda)\in \mu_\lambda^-(\frac{1}{\lambda})$. 而

$$F^a(\lambda)\geqslant 0,\lambda[F^a(\lambda),\mathbf{1}]\leqslant 1,a\in E. \qquad (15.6.2)$$

引理 15.6.1 形如(15.6.1)的 Q 过程不中断的充要条件是下列两条同时成立：

(i) $\lambda[F^a(\lambda),\mathbf{1}]=1, \qquad (a\in H=(i:d_i\neq 0))$; (15.6.3)

(ii) $\lambda\sum\limits_{j\in E}B_{ij}(\lambda)=\overline{X}_i(\lambda), \quad (i\in E)$. (15.6.4)

证明 必要性

由(15.6.1)式易得

$$(\lambda I-Q)(\lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1})_a=\lambda+d_a\lambda[F^a(\lambda),\mathbf{1}]. \qquad (15.6.5)$$

但由 $\Psi(\lambda)$ 的不中断性知

$$\lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1}=\mathbf{1}.$$

从而

$$(\lambda I-Q)(\lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1})-\lambda\mathbf{1}=d. \qquad (15.6.6)$$

由(15.6.5)及(15.6.6)立得

$$\lambda[F^a(\lambda),\mathbf{1}]=1, \qquad (a\in H). \qquad (15.6.7)$$

在(15.6.1)式两端同乘 λ 再对 j 求和并利用(15.6.7)式得

$$1=\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)+\sum_{a\in E}\varphi_{ia}(\lambda)d_a+\lambda\sum_{j\in E}B_{ij}(\lambda).$$

由定理 4.2.1 得

$$\lambda\sum_{j\in E}B_{ij}(\lambda)=\overline{X}_i(\lambda), \qquad (i\in E). \qquad (15.6.8)$$

由(15.6.7)及(15.6.8)式证明了本引理的必要性.

充分性显然.

记 $H_i(\lambda)=\sum\limits_{a\in E}\varphi_{ia}(\lambda)d_a, Z_i(\lambda)=1-\lambda\sum\limits_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)$.

$H(\lambda)$ 记以 $H_i(\lambda)$ 为分量的 E 上的列向量. 下面的讨论将与如次表达式有关

$$\Psi(\lambda)=\Phi(\lambda)+\overline{X}(\lambda)F^1(\lambda)+H(\lambda)F^2(\lambda). \quad (15.6.9)$$

引理 15.6.2 $\overline{X}(\lambda)$ 及 $H(\lambda)$ 均为列协调族，且若 $H(\lambda)\neq 0$,

则 $\overline{X}(\lambda)$ 与 $H(\lambda)$ 还是线性独立的列协调族.

证明 显然.

引理 15.6.3 设 $U=(u_i; i\in E)$ 为可配称 $Q-$ 矩阵的一个配称分布,且 $H(\lambda)\neq \mathbf{0}$,$\overline{X}(\lambda)\neq \mathbf{0}$. 令

$$\eta(\lambda)=\overline{X}^T(\lambda)U,\quad \theta(\lambda)=H^T(\lambda)U.$$

其中上标"T"表示转置. 则

(i) $\eta(\lambda)$,$\theta(\lambda)$ 是线性无关的行协调族. 其标准映象 η,θ 分别为

$$\eta=\overline{X}^T U, \theta=h^T U.$$

这里 $h_i=\sum_{a\in E}\Gamma_{ia}d_a$.

(ii) $\eta(\lambda)\in L^0_{\Phi(\lambda)}$,$\theta(\lambda)=\sum_{a\in E}u_i d_i\varphi_{\cdot i}(\lambda)\in L_{\Phi(\lambda)}$.

当 $\lambda\uparrow\infty$ 时,

$$\eta(\lambda)\downarrow \mathbf{0},\qquad \lambda\eta(\lambda)\to \mathbf{0};$$
$$\theta(\lambda)\downarrow \mathbf{0},\qquad \lambda\eta(\lambda)\to \alpha.$$

这里 $\alpha=(u_1d_1,u_2d_2,\cdots)$ 且

$$\lambda\eta\Phi(\lambda)=\eta-\eta(\lambda),$$
$$\lambda\theta\Phi(\lambda)=\theta-\theta(\lambda).$$

证明 由引理 15.6.2 和协调族的性质易证本引理.

引理 15.6.4 $\eta(\lambda)$,$\theta(\lambda)$ 如引理 15.6.3 所定义

又令

$$\sigma^1=\lambda[\eta(\lambda),X^0],\qquad \sigma^2=\lambda[\theta(\lambda),X^0].$$
$$W_\lambda^{11}=\lambda[\eta(\lambda),\overline{X}],\qquad W_\lambda^{12}=\lambda[\eta(\lambda),h].$$
$$W_\lambda^{21}=\lambda[\theta(\lambda),\overline{X}],\qquad W_\lambda^{22}=\lambda[\theta(\lambda),h].$$

则 (i) $\sigma^1<\infty$,$\sigma^2<\infty$ 且与 λ 无关.

(ii) $W_\lambda^{ab}\uparrow W^{ab}\quad(\lambda\uparrow\infty)$,$\quad(a=1,2;b=1,2)$. 且成立

$$(\lambda-\mu)[\eta(\mu),\overline{X}(\lambda)]=W_\lambda^{11}-W_\mu^{11},$$
$$(\lambda-\mu)[\eta(\mu),H(\lambda)]=W_\lambda^{12}-W_\mu^{12},$$
$$(\lambda-\mu)[\theta(\mu),\overline{X}(\lambda)]=W_\lambda^{21}-W_\mu^{21},$$
$$(\lambda-\mu)[\theta(\mu),H(\lambda)]=W_\lambda^{22}-W_\mu^{22}.$$

(iii) $W_\lambda^{12} = W_\lambda^{21}$. 从而 $W^{12} = W^{21}$.

证明 (i),(ii) 由引理 15.6.3 立得. (iii) 则由于

$$\begin{aligned}\lambda[\eta(\lambda),h] &= \lambda[\eta - \lambda\eta\Phi(\lambda),h] \\ &= \lambda[\eta,h] - \lambda[\lambda\eta\Phi(\lambda),h] \\ &= \lambda[\theta,\bar{X}] - \lambda[\lambda\theta\Phi(\lambda),\bar{X}] \\ &= \lambda[\theta(\lambda),\bar{X}].\end{aligned}$$

故 $W_\lambda^{12} = W_\lambda^{21}$ 由此立得 $W^{12} = W^{21}$.

引理 15.6.5 设 Q 可配称,且 $\bar{X}(\lambda) \neq 0, \theta(\lambda) \neq 0$,则形如 (15.6.9) 的 $\Psi(\lambda)$ 是可配称 Q 过程的充要条件是

$$\Psi(\lambda) = \Phi(\lambda) + (\bar{X}(\lambda),H(\lambda))\begin{pmatrix} R_\lambda^{11} & R_\lambda^{12} \\ R_\lambda^{21} & R_\lambda^{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta(\lambda) \\ \theta(\lambda)\end{pmatrix}. \tag{15.6.10}$$

且二阶方阵 R_λ 满足条件:

(i) $R_\lambda^{11} \geqslant 0, R_\lambda^{12} = R_\lambda^{21} \geqslant 0, R_\lambda^{22} \geqslant 0$;

(ii) $$\begin{pmatrix} R_\lambda^{11} & R_\lambda^{12} \\ R_\lambda^{21} & R_\lambda^{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma^1 \\ \sigma^2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_\lambda^{11} & R_\lambda^{12} \\ R_\lambda^{21} & R_\lambda^{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_\lambda^{11} & W_\lambda^{12} \\ W_\lambda^{21} & W_\lambda^{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ 1\end{pmatrix} \leqslant \begin{pmatrix}1 \\ 1\end{pmatrix};$$

(iii) R_λ 满足矩阵方程

$$\begin{pmatrix} R_\lambda^{11} & R_\lambda^{12} \\ R_\lambda^{21} & R_\lambda^{22}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_\mu^{11} & R_\mu^{12} \\ R_\mu^{21} & R_\mu^{22}\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} R_\lambda^{11} & R_\lambda^{12} \\ R_\lambda^{21} & R_\lambda^{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_\mu^{11} - W_\lambda^{11} & W_\mu^{12} - W_\lambda^{12} \\ W_\mu^{21} - W_\lambda^{21} & W_\mu^{22} - W_\lambda^{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_\mu^{11} & R_\mu^{12} \\ R_\mu^{21} & R_\mu^{22}\end{pmatrix}.$$

从而当 $\lambda \uparrow \infty$ 时,R_λ 极限存在,设为 R

(iv) 极限矩阵 R 具有形式 $R = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_2 & 0\end{pmatrix}$.

证明 本引理的必要性较麻烦参见陈安岳[1],由于后面仅用到本引理的充分性,故将必要性略.

由条件(i) 及(15.6.10) 式立知 $\Psi(\lambda) \geqslant 0$.

对比(15.6.9) 与(15.6.10) 知

$$\begin{pmatrix} F^1(\lambda) \\ F^2(\lambda)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_\lambda^{11} & R_\lambda^{12} \\ R_\lambda^{21} & R_\lambda^{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta(\lambda) \\ \theta(\lambda)\end{pmatrix}. \tag{15.6.11}$$

故对 $i = 1,2$ 有

$$\lambda[F^i(\lambda),\mathbf{1}] = \lambda[R_\lambda^{i1}\eta(\lambda) + R_\lambda^{i2}\theta(\lambda),\mathbf{1}]$$
$$= \lambda[R_\lambda^{i1}\eta(\lambda),\mathbf{1}] + \lambda[R_\lambda^{i2}\theta(\lambda),\mathbf{1}]. \qquad (15.6.12)$$

由引理 4.2.5 知

$$\sum_{\alpha\in E}\Gamma_{i\alpha}d_\alpha + \bar{X}_i + X_i^0 = 1, \qquad (i\in E).$$

代入(15.6.12)得

$$\lambda[F^i(\lambda),\mathbf{1}] = \lambda R_\lambda^{i1}[\eta(\lambda), X^0 + \bar{X} + \sum_{\alpha\in E}\Gamma_{\cdot\alpha}d_\alpha]$$
$$+ \lambda R_\lambda^{i2}[\theta(\lambda), X^0 + \bar{X} + \sum_{\alpha\in E}\Gamma_{\cdot\alpha}d_\alpha]$$
$$= R_\lambda^{i1}\sigma^1 + R_\lambda^{i2}\sigma^2 + R_\lambda^{i1}W_\lambda^{11}$$
$$- R_\lambda^{i1}W_\lambda^{12} + R_\lambda^{i2}W_\lambda^{21} + R_\lambda^{i2}W_\lambda^{22}.$$

由条件(ii)可知

$$\lambda[F^i(\lambda),\mathbf{1}] \leqslant 1, \quad (i = 1,2). \qquad (15.6.13)$$

从而 $\lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1} \leqslant \mathbf{1}$. (15.6.14)

且当(ii)等号成立时，有

$$\lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1} = \mathbf{1}. \qquad (15.6.15)$$

注意 R_λ 满足条件(iii)，再由引理 15.6.4 的(ii)，我们有

$$\begin{pmatrix} R_\lambda^{11} & R_\lambda^{12} \\ R_\lambda^{21} & R_\lambda^{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_\mu^{11} & R_\mu^{12} \\ R_\mu^{21} & R_\mu^{22} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} R_\lambda^{11} & R_\lambda^{12} \\ R_\lambda^{21} & R_\lambda^{22} \end{pmatrix}(\mu - \lambda)\begin{pmatrix} [\eta(\lambda),\bar{X}(\mu)] & [\eta(\lambda),H(\mu)] \\ [\theta(\lambda),\bar{X}(\mu)] & [\theta(\lambda),H(\mu)] \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_\mu^{11} & R_\mu^{12} \\ R_\mu^{21} & R_\mu^{22} \end{pmatrix}.$$

两端同乘$\begin{pmatrix} \eta(\lambda) \\ \theta(\lambda) \end{pmatrix}$并注意(15.6.11)式

$$\begin{pmatrix} R_\lambda^{11} & R_\lambda^{12} \\ R_\lambda^{21} & R_\lambda^{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta(\lambda) \\ \theta(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F^1(\lambda) \\ F^2(\lambda) \end{pmatrix}$$
$$+ (\mu - \lambda)\begin{pmatrix} R_\lambda^{11} & R_\lambda^{12} \\ R_\lambda^{21} & R_\lambda^{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} [\eta(\lambda),\bar{X}(\mu)] & [\eta(\lambda),H(\mu)] \\ [\theta(\lambda),\bar{X}(\mu)] & [\theta(\lambda),H(\mu)] \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F^1(\lambda) \\ F^2(\lambda) \end{pmatrix}.$$

注意 $\eta(\lambda),\theta(\lambda)$ 是行协调族，上式成为

$$\begin{pmatrix} R_\lambda^{11} & R_\lambda^{12} \\ R_\lambda^{21} & R_\lambda^{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta(\lambda)A(\lambda,\mu) \\ \theta(\lambda)A(\lambda,\mu) \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right.$$

$$+(\mu-\lambda)\begin{pmatrix}R_\lambda^{11} & R_\lambda^{12}\\ R_\lambda^{21} & R_\lambda^{22}\end{pmatrix}\left(\begin{matrix}[\eta(\lambda),\overline{X}(\mu)] & [\eta(\lambda),H(\mu)]\\ [\theta(\lambda),\overline{X}(\mu)] & [\theta(\lambda),H(\mu)]\end{matrix}\right)\Bigg)\begin{pmatrix}F^1(\lambda)\\ F^2(\lambda)\end{pmatrix}.$$

再注意到(15.6.11)就得到

$$\begin{pmatrix}F^1(\lambda)A(\lambda,\mu)\\ F^2(\lambda)A(\lambda,\mu)\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right.$$

$$\left.+(\mu-\lambda)\begin{pmatrix}[F^1(\lambda),\overline{X}(\mu)] & [F^1(\lambda),H(\mu)]\\ [F^2(\lambda),\overline{X}(\mu)] & [F^2(\lambda),H(\mu)]\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}F^1(\lambda)\\ F^2(\lambda)\end{pmatrix}. \tag{15.6.16}$$

这就是说，形如(15.6.9)的 $\Psi(\lambda)$ 满足预解方程.

最后，注意到条件(iv)及

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\overline{X}(\lambda)=\mathbf{0},\qquad \lim_{\lambda\to+\infty}\lambda H(\lambda)=d.$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\eta(\lambda)=\mathbf{0},\qquad \lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\theta(\lambda)=a.$$

从(15.6.11)知

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda(\lambda\Psi(\lambda)-I)$$

$$=\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda(\lambda\Phi(\lambda)-I)+(0,d)\begin{pmatrix}r_1 & r_2\\ r_2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ a\end{pmatrix}.$$

上式右边第二项为 0. 故得

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda(\lambda\Psi(\lambda)-I)=\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda(\lambda\Phi(\lambda)-I)=Q. \tag{15.6.17}$$

故形如(15.6.9)的 $\Psi(\lambda)$ 满足 Q 条件. 由(15.6.14)～(15.6.17)说明本引理充分性成立.

引理 15.6.6 设 Q 可配称，$\overline{X}(\lambda)\neq\mathbf{0}$，$H(\lambda)\neq\mathbf{0}$ 且满足条件：

$$\sum_{a\in E}u_a d_a\leqslant\lim_{\lambda\to+\infty}\sum_{i\in E}\lambda u_i\overline{X}_i(\lambda)<+\infty. \tag{15.6.18}$$

则存在形如(15.6.9)的不中断可配称 Q 过程.

证明 由 $H(\lambda)\neq\mathbf{0}$ 知 $\sum_{i\in E}u_i d_i>0$，于是

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\sum_{i\in E}\lambda u_i\overline{X}_i(\lambda)>0.$$

我们令

$$f_1=\lim_{\lambda\to+\infty}\sum_{i\in E}\lambda u_i\overline{X}_i(\lambda),$$

$$f_2=\sum_{a\in E}u_a d_a.$$

然后令

$$r_1=\frac{f_1-f_2}{f_1},\quad r_2=\frac{1}{f_1}.$$

由条件(15.6.18)知

$$r_1\geqslant 0,\quad r_2>0.$$

现再令

$$R_\lambda^{11}=\frac{1}{\Delta}(r_1+r_2^2(W^{22}-W_\lambda^{22})),$$

$$R_\lambda^{12}=R_\lambda^{21}=\frac{r_2}{\Delta}(1-r_2(W^{12}-W_\lambda^{12})),$$

$$R_\lambda^{22}=\frac{r_2^2}{\Delta}(W^{11}-W_\lambda^{11}),$$

其中

$$\Delta=(1-r_2(W_\lambda^{12}-W_\lambda^{12}))^2+$$
$$+r_2^2(W^{11}-W_\lambda^{11})(W^{22}-W_\lambda^{22})-r_1(W^{11}-W_\lambda^{11}).$$

而 W^{ab} 和 W_λ^{ab} $(a,b=1,2)$ 如引理 15.6.4 中所定义. 注意到条件(15.6.18)知 $W^{ab}(a,b=1,2)$ 是有限的. 从而 W_λ^{ab} 亦然. R_λ 的计算来自于(iii),令 $\mu\uparrow\infty$ 便得

$$R_\lambda=(I-(W-W_\lambda))^{-1}R.$$

利用此式容易验证二阶方程 $\begin{pmatrix}R_\lambda^{11} & R_\lambda^{12}\\ R_\lambda^{21} & R_\lambda^{22}\end{pmatrix}$ 满足引理 15.6.5 的(i),(ii),(iii),(iv) 四个条件,且条件(ii) 中等号成立. 引理证毕.

定理 15.6.1 的证明

必要性

对给定的 Q - 矩阵 Q,若存在可逆 Q 过程,当然 Q 可配称,故(i) 成立.

要证(iii),只需证明,若 $\sum_{a\in H}u_a d_a<+\infty$,则必有

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda \sum_{k \in E} u_k \overline{X}_k(\lambda) \geqslant \sum_{a \in H} u_a d_a.$$

实际上,若存在可逆 Q 过程 $\Psi(\lambda)$,则由(15.6.1)

$$u_i \sum_{a \in H} \varphi_{ia}(\lambda) d_a F_j^a(\lambda) + u_i B_{ij}(\lambda)$$

$$= u_j \sum_{a \in H} \varphi_{ja}(\lambda) d_a F_i^a(\lambda) + u_j B_{ji}(\lambda), \quad (i, j \in E). \tag{15.6.19}$$

在(15.6.19)两端同乘 λ,再对 j 求和得

$$\sum_{a \in H} u_a \varphi_{ai}(\lambda) d_a \lambda [F^a(\lambda), 1] + u_i \lambda \sum_{j \in E} B_{ij}(\lambda)$$

$$= \sum_{a \in H} u_a d_a (\lambda \Phi(\lambda) 1)_a F_i^a(\lambda) + \lambda \sum_{j \in E} u_j B_{ji}(\lambda). \tag{15.6.20}$$

由于 $\Psi(\lambda)$ 不中断,由引理 15.6.1,上式成为

$$\sum_{a \in H} u_a d_a \varphi_{ai}(\lambda) + u_i \overline{X}_i(\lambda)$$

$$= \sum_{a \in H} u_a d_a (1 - Z_a(\lambda)) F_i^a(\lambda) + \lambda \sum_{j \in E} u_j B_{ji}(\lambda). \tag{15.6.21}$$

由于

$$\sum_{a \in H} u_a d_a \lambda \varphi_{ai}(\lambda) \leqslant \sum_{a \in H} u_a d_a < +\infty,$$

$$\sum_{a \in H} u_a d_a (1 - Z_a(\lambda)) \lambda F_i^a(\lambda) \leqslant \sum_{a \in H} u_a d_a < +\infty.$$

在(15.6.21)两端同乘 λ,再令 $\lambda \to +\infty$,由引理 15.5.2 及 $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda \overline{X}(\lambda) = 0$ 就有

$$\sum_{a \in H} u_a d_a \delta_{ia} = \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^2 \sum_{j \in E} u_j B_{ji}(\lambda). \tag{15.6.22}$$

将(15.6.22)对 $i \in E$ 求和得

$$\sum_{a \in H} u_a d_a = \sum_{i \in E} \left(\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^2 \sum_{j \in E} u_j B_{ji}(\lambda) \right)$$

$$\leqslant \lim_{\lambda \to +\infty} \sum_{i \in E} \lambda^2 \sum_{j \in E} u_j B_{ji}(\lambda). \tag{15.6.23}$$

但由引理 15.6.1 知

$$\sum_{i \in E} \lambda^2 \sum_{j \in E} u_j B_{ji}(\lambda) = \lambda \sum_{j \in E} u_j \lambda \sum_{i \in E} B_{ji}(\lambda) = \lambda \sum_{j \in E} u_j \overline{X}_j(\lambda),$$

故(15.6.23)就是

$$\sum_{a\in H} u_a d_a \leqslant \lim_{\lambda\to+\infty} \sum_{k\in E} \lambda u_k \overline{X}_k(\lambda).$$

得证(iii).

再用反证法证(ii),若(ii)不成立,则 Q 可约,且存在一个零流出子块 E_0 不含有非保守状态.

由于 Q 可约,故 $E - E_0 = E_1 \neq \varnothing$. 注意

$$\lambda \sum_{j\in E} \varphi_{ij}(\lambda) = 1 - \overline{X}_i(\lambda) - \sum_{a\in H} \varphi_{ia}(\lambda) d_a. \tag{15.6.24}$$

取 $i_0 \in E_0$,由 E_0 零流出知

$$\overline{X}_{i_0}(\lambda) = 0. \tag{15.6.25}$$

注意 $H \cap E_0 = \varnothing$,对 $a \in H \cap E_1$ 由于 i_0 与 a 不在同一子块,故 $\varphi_{i_0 a}(\lambda) = 0$. 从而

$$\sum_{a\in H} \varphi_{i_0 a}(\lambda) d_a = \sum_{a\in H\cap E_0} \varphi_{i_0 a}(\lambda) d_a + \sum_{a\in H\cap E_1} \varphi_{i_0 a}(\lambda) d_a = 0. \tag{15.6.26}$$

由(15.6.24),(15.6.25)及(15.6.26)知

$$\lambda \sum_{j\in E} \varphi_{i_0 j}(\lambda) = 1,$$

即

$$\lambda \sum_{j\in E_0} \varphi_{i_0 j}(\lambda) + \lambda \sum_{j\in E_1} \varphi_{i_0 j}(\lambda) = 1.$$

对任意的 $j \in E_1$,因 i_0 与 j 不在同一子块,故 $\varphi_{i_0 j}(\lambda) = 0$. 这就得到

$$\lambda \sum_{j\in E_0} \varphi_{i_0 j}(\lambda) = 1.$$

那么,对任意 Q 过程 $\Psi(\lambda)$ 都有

$$\lambda \sum_{j\in E_0} \psi_{i_0 j}(\lambda) = 1. \tag{15.6.27}$$

注意 $E_1 \neq \varnothing$,取 $j_0 \in E_1$,由(15.6.27)知,$\psi_{i_0 j_0}(\lambda) = 0$. 与不可约矛盾,故(ii)成立.

必要性证毕.

往证充分性. 分两步证明:

（一） 先证明，若（i），（iii）成立，则必存在不中断可配称 Q 过程

分两种情况讨论：

（1） 若 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\sum\limits_{k\in E}\lambda u_k\overline{X}_k(\lambda)=+\infty$ 或者 $\sum\limits_{a\in H}u_a d_a=+\infty$，则由引理 15.5.1 有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\sum_{k\in E}\lambda u_k Z_k(\lambda)=+\infty. \qquad (15.6.28)$$

令

$$\psi_{ij}(\lambda)=\varphi_{ij}(\lambda)+\frac{Z_i(\lambda)u_j Z_j(\lambda)}{\lambda\sum\limits_{k\in E}u_k Z_k(\lambda)},(i,j\in E). \quad (15.6.29)$$

不难直接验证，(15.6.29) 确实定义了一个不中断可配称 Q 过程.

（2） 若不是(1) 的情形，那么由条件(iii) 只能是

$$\sum_{a\in H}u_a d_a\leqslant\lim_{\lambda\to-\infty}\sum_{i\in E}\lambda u_i\overline{X}_i(\lambda)<+\infty. \qquad (15.6.30)$$

现若 $\sum\limits_{a\in H}u_a d_a=0$，则 Q 保守，不难证明此时由(15.6.29) 所定义的 Q 过程是一个不中断可配称 Q 过程. 现设 $\sum\limits_{a\in H}u_a d_a>0$，则由引理 15.6.6 知，必存在不中断可配称 Q 过程.

（二） 再证明，条件(ii) 保证了不可约性

首先指出一个事实，若 Q 可约，但每个零流出子块至少含有一个非保守状态，则有

$$Z_i(\lambda)=1-\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)>0, \quad (i\in E). \quad (15.6.31)$$

实际上，对任给的 $i\in E$，由于 Q 可约，i 必属于某个子块，设为 E_0.

若 E_0 非零流出，则易知 $\overline{X}_i(\lambda)>0$，从而 $Z_i(\lambda)\geqslant\overline{X}_i(\lambda)>0$.

若 E_0 零流出，则依条件，E_0 中含有非保守状态，记为 j_0. 由于 i 与 j_0 属于同一既约子块（i 与 j_0 可以相同）故 $\varphi_{ij_0}(\lambda)>0$，而 $j_0\in H$，故 $d_{j_0}>0$. 那么

$$Z_i(\lambda)=\overline{X}_i(\lambda)+\sum_{a\in H}\varphi_{ia}(\lambda)d_a\geqslant\varphi_{ij_0}(\lambda)d_{j_0}>0.$$

这得证(15.6.31).

再来证明(ii) 保证了不可约性

(1) 若 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\sum\limits_{k\in E}\lambda u_k\overline{X}_k(\lambda)=+\infty$ 或 $\sum\limits_{a\in H}u_a d_a=+\infty$.

则不中断的可配称 Q 过程如(15.6.29) 所定义.

若 Q 既约，易见 $\psi_{ij}(\lambda)\geqslant\varphi_{ij}(\lambda)>0$, $(i,j\in E,\lambda>0)$. 否则，Q 可约. 但每一个零流出子块至少含有一个非保守状态，则由(15.6.31) 知

$$Z_i(\lambda)>0,\quad (i\in E).$$

那么从(15.6.29) 式得 $\psi_{ij}(\lambda)>0$, $(i,j\in E,\lambda>0)$.

(2) 若 $\sum\limits_{a\in H}u_a d_a\leqslant\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\sum\limits_{k\in E}\lambda u_k\overline{X}_k(\lambda)<+\infty$.

如果 Q 保守，由(ii) 知，每个子块均非流出，从而 $Z_i(\lambda)=\overline{X}_i(\lambda)>0$，则由(15.6.29) 所定义的 $\psi_{ij}(\lambda)>0$, $(i,j\in E,\lambda>0)$；如果 $\sum\limits_{a\in H}u_a d_a>0$，则由引理 15.6.6 知有不中断可配称 Q 过程. 这个 Q 过程的表达式为

$$\Psi(\lambda)=\Phi(\lambda)+(\overline{X}(\lambda),H(\lambda))\begin{pmatrix}R_\lambda^{11} & R_\lambda^{12}\\ R_\lambda^{21} & R_\lambda^{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta(\lambda)\\ \theta(\lambda)\end{pmatrix},$$

即

$$\begin{aligned}\psi_{ij}(\lambda)=\varphi_{ij}(\lambda)&+R_\lambda^{11}\overline{X}_i(\lambda)u_j\overline{X}_j(\lambda)+R_\lambda^{12}\overline{X}_i(\lambda)u_jH_j(\lambda)+\\ &+R_\lambda^{21}\overline{X}_i(\lambda)u_jH_j(\lambda)+R_\lambda^{22}H_i(\lambda)u_jH_j(\lambda).\qquad(15.6.32)\end{aligned}$$

其中 $R_\lambda^{11},R_\lambda^{12},R_\lambda^{21},R_\lambda^{22}$ 如引理 15.6.6 中所定义.

现若 Q 既约，当然有

$$\psi_{ij}(\lambda)\geqslant\varphi_{ij}(\lambda)>0,\quad (i,j\in E,\lambda>0).$$

而若 Q 可约，但每个零流出子块至少含有一个非保守状态. 则由(15.6.31) 对任意一对 $i,j\in E$ 必有

$$H_i(\lambda)+\overline{X}_i(\lambda)>0,\qquad \overline{X}_j(\lambda)+H_j(\lambda)>0.$$

故

$$\begin{aligned}&\overline{X}_i(\lambda)\wedge\overline{X}_j(\lambda))\vee(\overline{X}_i(\lambda)\wedge H_j(\lambda))\\ &\vee(H_i(\lambda)\wedge\overline{X}_j(\lambda))\vee(H_i(\lambda)\wedge H_j(\lambda))>0.\qquad(15.6.33)\end{aligned}$$

注意引理 15.6.6 中 $R_\lambda^{ab}(a,b=1,2)$ 的构造知恒有

$$R^{ab}_{\lambda} > 0, \qquad (a,b = 1,2). \qquad (15.6.34)$$

结合(15.6.32),(15.6.33)以及(15.6.34)得

$$\psi_{ij}(\lambda) > 0, \qquad (i,j \in E, \lambda > 0).$$

这得证 $\Psi(\lambda)$ 的不可约性.

这就证明了,在本定理的条件下,必存在不中断、可配称、不可约的 Q 过程,也就是可逆 Q 过程.

§7 单瞬时可逆 Q 过程

为了方便,我们仅考虑 Q—矩阵是单瞬时态,准保守的. 另外,由于在可配称的情况下,我们感兴趣的是过程不中断的情况. 特别是可逆 Q 过程. 鉴于此,我们仅考虑过程不中断的情况. 在以上两个方面上,都可以将本节的结果予以推广,但此处我们将不再进行这些技术性的工作.

以 E 表状态空间,设 Q 是 $E \times E$ 上的一个可配称,单瞬时,准保守 Q—矩阵.其配称分布记为 U,现仍用 b 表瞬时态. $E_1 = E - \{b\}$. $Q_{E_1} = \{q_{ij}; i,j \in E_1\}$ 为 Q 在 E_1 上的限制. U 在 Q_{E_1} 上可导出配称分布$\{\frac{u_i}{1-u_b}, i \in E_1\}$. 为了方便,记 $U_b = (\frac{u_1}{u_b}, \frac{u_2}{u_b}, \cdots)$.

为简便,再引入如下记号. 若 A, B 是两个同维数的向量,其分量分别为 A_i 及 B_i. 以 $A \geqslant B$ 表示:对任意 i, $A_i \geqslant B_i$. 若 $A \geqslant B$ 但 $A \neq B$. 将记之为 $A > B$. 如果更进一步,对任意 i, $A_i > B_i$. 我们将记之为 $A \gg B$. 对矩阵,亦如此记.

对于可配称 Q 过程,分解定理有进一步的性质,这就是下面的定理,后面将反复用到这个定理.

定理 15.7.1 设 Q 是单瞬时准保守可配称 Q—矩阵,则任何不中断可配称 Q 过程 $R(\lambda)$ 必有表现:

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Psi(\lambda) \end{pmatrix} + r_{bb}(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ \xi(\lambda) \end{pmatrix} (1, \eta(\lambda)). \quad (15.7.1)$$

其中

$$\Psi(\lambda) \text{ 是 } E_1 \text{ 上 } B \cap F \text{ 型可配称 } Q_{E_1} \text{ 过程.} \tag{15.7.2}$$

$$\xi(\lambda) = \mathbf{1} - \lambda\Psi(\lambda)\mathbf{1}; \tag{15.7.3}$$

$$\eta(\lambda) = \xi^T(\lambda)U_b; \tag{15.7.4}$$

$$r_{bb}(\lambda) = (\lambda + \lambda\eta(\lambda)\mathbf{1})^{-1}. \tag{15.7.5}$$

这里上标"T"表示转置,$U_b = \dfrac{U}{u_b}$.

反之,任意给定 B 型可配称 Q_{E_1} 过程 $\Psi(\lambda)$(从而也就是 $B \cap F$ 型的),按(15.7.3),(15.7.4),(15.7.5) 及(15.7.1) 依次定义 $\xi(\lambda)$,$\eta(\lambda)$,$r_{bb}(\lambda)$ 及 $R(\lambda)$,则只要满足条件

$$\eta(\lambda) \in L, \tag{15.7.6}$$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda\eta(\lambda)\mathbf{1} = +\infty. \tag{15.7.7}$$

$R(\lambda)$ 就是一个不中断的可配称 Q 过程.条件(15.7.7) 就是

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda \sum_{k \in E_1} u_k \Big(1 - \lambda \sum_{j \in E_1} \psi_{kj}(\lambda)\Big) = +\infty, \tag{15.7.8}$$

若进一步有

$$\xi(\lambda) \gg \mathbf{0}, \tag{15.7.9}$$

则 $R(\lambda)$ 还是一个可逆 Q 过程.最后,设 $R_1(\lambda)$ 及 $R_2(\lambda)$ 是两个不中断可配称 Q 过程,则 $R_1(\lambda) = R_2(\lambda)$ 当且仅当 $\Psi_1(\lambda) = \Psi_2(\lambda)$.

证明　设 $R(\lambda)$ 是不中断可配称 Q 过程,配称分布为 $U = (u_b, u_1, u_2, \cdots)$,由分解定理知 $R(\lambda)$ 可表为(15.7.1),注意到不中断性可得(15.7.3) 及(15.7.5).由于 $R(\lambda)$ 可配称,从而

$$u_b r_{bj}(\lambda) = u_j r_{jb}(\lambda), \qquad (j \in E_1),$$

$$u_i r_{ij}(\lambda) = u_j r_{ji}(\lambda), \qquad (i, j \in E_1),$$

即

$$u_b r_{bb}(\lambda)\eta_{bj}(\lambda) = u_j r_{bb}(\lambda)\xi_{jb}(\lambda), \quad (j \in E_1), \tag{15.7.10}$$

$$u_i(\psi_{ij}(\lambda) + \xi_{ib}(\lambda)r_{bb}(\lambda)\eta_{bj}(\lambda))$$
$$= u_j(\psi_{ji}(\lambda) + \xi_{jb}(\lambda)r_{bb}(\lambda)\eta_{bi}(\lambda)), (i, j \in E_1). \tag{15.7.11}$$

由(15.7.10) 及(15.7.3) 知

$$\eta_{bj}(\lambda) = \frac{u_j}{u_b}\xi_{jb}(\lambda) = \frac{u_j}{u_b}\Big(1 - \lambda \sum_{k \in E} \psi_{jk}(\lambda)\Big). \tag{15.7.12}$$

这得到(15.7.4).而将(15.7.12) 代入(15.7.11) 可得

$$u_i\psi_{ij}(\lambda) = u_j\psi_{ji}(\lambda), \qquad (i, j \in E_1).$$

从而 $\Psi(\lambda)$ 是可配称 Q_{E_1} 过程.

由 Q 准保守知 $\Psi(\lambda)$ 是 B 型 Q_{E_1} 过程，但 $\Psi(\lambda)$ 可配称，从而 $\Psi(\lambda)$ 是 $B \cap F$ 型 Q_{E_1} 过程，必要性得证.

反之，若给定 B 型可配称 Q_{E_1} 过程 $\Psi(\lambda)$，那么按(15.7.1) ~ (15.7.5) 定义 $R(\lambda)$ 后，由 Q 的准保守性及 $\Psi(\lambda)$ 是 B 型 Q_{E_1} 过程可知

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda(1 - \lambda\sum_{k\in E_1}\psi_{jk}(\lambda)) = q_{jb}.$$

再由 Q 的可配称性及(15.7.4) 知

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\eta_{bj}(\lambda) = \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda\frac{u_j}{u_b}(1 - \lambda\sum_{k\in E_1}\psi_{jk}(\lambda)),$$

$$\frac{u_j}{u_b}q_{jb} = q_{bj}.$$

再注意到条件(15.7.8) 知 $R(\lambda)$ 是不中断 Q 过程，且它是可配称的.

而当 $\xi(\lambda) \gg 0$ 时，易看出 $R(\lambda) \gg 0$. 从而 $R(\lambda)$ 不中断，可配称，不可约，即 $R(\lambda)$ 是可逆 Q 过程.

最后，若 $R_1(\lambda)$ 及 $R_2(\lambda)$ 是两个不中断可配称 Q 过程，如果 $R_1(\lambda) = R_2(\lambda)$ 由分解定理的唯一性知 $\Psi_1(\lambda) = \Psi_2(\lambda)$. 反之，如果 $\Psi_1(\lambda) = \Psi_2(\lambda)$，由(15.7.3)、(15.7.4) 及(15.7.5) 知必然有 $R_1(\lambda) = R_2(\lambda)$. 充分性得证.

注 由 U 为配称分布，条件 $\eta(\lambda) \in L_B$ 总是满足的.

由定理 15.7.1 容易得到不中断可配称Q过程及可逆Q过程的存在准则：

定理 15.7.2 对任给的单瞬时准保守拟 Q — 矩阵，存在不中断可配称 Q 过程的充要条件是如下两条同时满足

(i) Q 可配称；

(ii) $\lim_{\lambda\to+\infty}\sum_{k\in E_1}\lambda u_k Z_k(\lambda) = +\infty.$

这里 $Z_k(\lambda) = 1 - \lambda \sum_{j \in E_1} \varphi_{kj}(\lambda)$，而 $\Phi(\lambda) = \{\varphi_{ij}(\lambda); i, j \in E_1\}$ 是最小 Q_{E_1} 过程.

证明 若存在不中断可配称 Q 过程，(i) 自然成立. 另外，由定理 15.7.1 可知任意一个不中断可配称 Q 过程有分解式(15.7.1)且满足(15.7.3) ~ (15.7.5).

注意到 b 为瞬时态，必有 $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda \eta(\lambda) \mathbf{1} = +\infty$.

也就是说存在 B 型 Q_{E_1} 过程 $\Psi(\lambda)$ 使得

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \sum_{k \in E_1} u_k (1 - \lambda \sum_{j \in E_1} \psi_{kj}(\lambda)) = +\infty. \qquad (15.7.13)$$

由于 $\Phi(\lambda)$ 是最小 Q_{E_1} 过程，当然有

$$1 - \lambda \sum_{j \in E_1} \varphi_{kj}(\lambda) \geqslant 1 - \lambda \sum_{j \in E_1} \psi_{kj}(\lambda).$$

那么由(15.7.13)就更有

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda \sum_{k \in E_1} u_k (1 - \lambda \sum_{j \in E_1} \varphi_{kj}(\lambda)) = +\infty.$$

得证(ii). 必要性得证.

反之，若(i)，(ii)同时成立，按定理 15.7.1 以最小过程 $\Phi(\lambda)$ 为基础构造 $R(\lambda)$. 条件(ii) 保证了(15.7.7) 成立，从而 $R(\lambda)$ 是不中断可配称 Q 过程，充分性得证.

定理 15.7.3 对任给的单瞬时准保守拟 Q－矩阵，存在可逆 Q 过程的充要条件是如下三条同时成立：

(i) Q 可配称；

(ii) Q_{E_1} 的每个子块或者非零流出，或者含有非保守状态；

(iii) $e\mathbf{1} + \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda \sum_{k \in E_1} u_k \overline{X}_k(\lambda) = +\infty$.

证明 必要性 由

$$\sum_{a \in H} u_a d_a = \sum_{j \in E_1} u_j q_{jb} = u_b \sum_{j \in E_1} q_{bj} = u_b e\mathbf{1}.$$

利用引理 15.5.1 及定理 15.7.2 知(i) 和(iii) 是必要的.

若(ii) 不成立，则存在 $i_0 \in E_1$ 使对某个 $\lambda_0 > 0$，从而对所有的 $\lambda > 0$ 有

$$Z_{i_0}(\lambda) = 1 - \lambda \sum_{j \in E_1} \varphi_{i_0 j}(\lambda) = 0.$$

进而对任意 Q_{E_1} 过程 $\Psi(\lambda)$ 有

$$1 - \lambda \sum_{j \in E_1} \psi_{i_0 j}(\lambda) = 0,$$

那么由定理 15.7.1 看出，任何不中断 Q 过程不可能不可约，与存在可逆 Q 过程矛盾.

充分性

再由定理15.6.1的证明知，条件(ii) 等价于 $Z(\lambda) \gg 0$. 从而由定理 15.7.2 得到充分性.

注 1 当 Q_{E_1} 既约时，Q_{E_1} 只有唯一的一个子块，那么定理 15.7.3 的条件(ii)成为：或者 Q_{E_1} 非零流出，或者 Q_{E_1} 非保守(即 Q 的第一列非零）此时条件将格外简单.

注 2 一个矩阵或其子块是否零流出有时不易判断. 但是否非保守是极易判明的. 因而定理 15.7.3的条件 (ii) 成立有一个极方便的充分条件：Q_{E_1} 的每个状态均非保守，即 Q 的第一列恒大于 0.

为了将条件给得更简洁些，我们将对 Q 可和与不可和分开讨论. 另外由注 2 的启发，我们再给一个定义.

定义 15.7.1 称单瞬时准保守拟 Q — 矩阵为正常的，如果 $d \gg 0$ 即第一列严格正. 注意对可配称 Q — 矩阵. Q 正常等价于 $e \gg 0$，即瞬时态行严格正.

推论 15.7.1 设 Q 是不可和单瞬时准保守拟 Q — 矩阵，则存在不中断可配称 Q 过程的充要条件是 Q 可配称.

推论 15.7.2 设 Q 是不可和单瞬时准保守拟 Q — 矩阵，则存在可逆 Q 过程的充要条件是 Q 可配称，且 Q_{E_1} 每个子块或者非零流出，或者含有非保守状态.

这两个推论的证明只要注意到 Q 不可和，从而 $e1 = +\infty$，于是由定理 15.7.2 的(iii) 及定理 15.7.3 的(iii) 必成立即可.

推论 15.7.3 设 Q 是不可和正常矩阵，则存在可逆 Q 过程的充要条件是 Q 可配称.

推论15.7.3及推论15.7.1都十分简洁而实用.它将可逆Q过程或不中断可配称Q过程的判别完全归结于判断Q是否可配称的问题,而后者的判别可用翻除判别法参见 §2.

对可和情况,则有下述推论:

推论15.7.4 设Q是可和单瞬时准保守拟$Q-$矩阵,则存在不中断可配称Q过程的充要条件是如下两条同时成立:

(i) Q可配称;

(ii) $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda\sum\limits_{k\in E_1}u_k\overline{X}_k(\lambda)=+\infty$.

这里$\overline{X}(\lambda)$是方程

$$\begin{cases}(\lambda I-Q_{E_1})U=0,\\ 0\leqslant U\leqslant 1\end{cases}$$

的最大解.

证明 由定理15.7.2和引理15.5.1并注意在Q可和的条件下,必有

$$\sum_{a\in H}u_a d_a=u_b e1 < +\infty.$$

即得证本推论.

推论15.7.5 设Q为可和单瞬时准保守拟$Q-$矩阵,则存在可逆Q过程的充要条件是下列三条同时成立:

(i) Q可配称;

(ii) Q_{E_1}的每个子块或者非零流出,或者含有非保守状态;

(iii) $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda\sum\limits_{k\in E}u_k\overline{X}_k(\lambda)=+\infty$.

证明 同推论15.7.5.

下面来考虑两个例子,即柯氏矩阵与推广的柯氏矩阵.在第九章中,我们曾讨论过其一般Q过程的存在性,现在我们来讨论其可逆Q过程的存在问题.

例15.7.1 柯氏矩阵

$$Q=\begin{bmatrix} -\infty & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ q_1 & -q_1 & 0 & 0 & \cdots \\ q_2 & 0 & -q_2 & 0 & \cdots \\ q_3 & 0 & 0 & -q_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}. \qquad (15.7.14)$$

其中 $0<q_i<+\infty$, $(i=1,2,\cdots)$.

引理 15.7.1 柯氏矩阵可配称的充要条件是

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{q_i}<+\infty. \qquad (15.7.15)$$

且当(15.7.15)满足时,其唯一的配称分布为

$$u_b=\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{\infty}c_k}, \quad u_j=\frac{c_j}{1+\sum_{k=1}^{\infty}c_k}.$$

这里 $c_j=\dfrac{1}{q_j}$,$(j=1,2,\cdots)$.

证明 柯氏矩阵(15.7.14)可配称,则存在 $U=(u_b,u_1,u_2,\cdots)$ 使

$$u_iq_{ij}=u_jq_{ji}, \quad (i\neq j,i,j\in E).$$

特别有 $u_b\times 1=u_jq_j$. 即

$$u_j=\frac{u_b}{q_j}. \qquad (15.7.16)$$

但由可配称性知

$$\sum_{j=1}^{\infty}u_j<+\infty.$$

故得(15.7.16).

若 $U=(u_b,u_1,u_2,\cdots)$ 是配称分布,那么

$$\sum_{j=1}^{\infty}u_j=1-u_b.$$

由(15.7.16)可得

$$1-u_b=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{u_b}{q_j},$$

从而

$$u_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q_j}}.$$

那么由(15.7.16)得所要的结论.

反方向的结论是明显的.

定理 15.7.4 对形如(15.7.14)的柯氏矩阵,下列诸条件等价:

(i) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{q_j} < +\infty$;

(ii) 存在 Q 过程;

(iii) 存在不中断 Q 过程;

(iv) 存在可逆 Q 过程.

证明 易得.

例 15.7.2 推广的柯氏矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} -\infty & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\ q_1 & -q_1 & 0 & 0 & \cdots \\ q_2 & 0 & -q_2 & 0 & \cdots \\ q_3 & 0 & 0 & -q_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

这里 $0 < q_j < +\infty$, $(j = 1, 2, \cdots)$.

引理 15.7.2 设 Q 是形如(15.7.17)的矩阵,则它可配称的充要条件是

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{q_j} < +\infty.$$

此时它唯一可能的配称分布是

$$u_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k},$$

$$u_j = \frac{c_j}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k}, \qquad (j = 1, 2, \cdots).$$

这里$c_j = \frac{b_j}{q_j}$,($j = 1,2,\cdots$).

证明 仿引理 15.7.1 可得.

定理 15.7.5 设 Q 是形如(15.7.17)的矩阵,则存在可逆 Q 过程的充要条件是如下两条同时成立:

(i) $\sum_{j=1}^{\infty} b_j = +\infty$;

(ii) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{q_j} < +\infty$.

证明 若(i)不成立,则由第九章知不存在 Q 过程,当然更不存在可逆 Q 过程. 若(ii)不成立,则由引理 15.7.2 知,Q 不可配称,故亦不存在可逆 Q 过程.

反之,若(i),(ii)同时成立,则由引理 15.7.2 知 Q 必可配称,同时,又由(i)知,Q 是不可和单瞬时 Q — 矩阵. 再注意到(15.7.18)知,推广的柯氏矩阵是不可和正常矩阵,故由推论 15.7.3 立得结论.

§8 补充与注记

可配称 Q 过程最早是 Kolmogorov[2]1936 年开始研究的,他考虑的是离散时间参数有限状态的马链. 之后,Kendall[1] 做过一些工作,在这方面目前国际上所流行的文献是 Fukushima[1] 和 Silverstein[1],但他们都没有涉及到 Q 过程. 国内钱敏平[1] 最先考虑可逆马链;随后,侯振挺等做了深入的研究,直到 1979 年的结果,基本上已收入钱敏、侯振挺等[1] 的专著中.

如果在定义 15.1.3 及定义 15.1.6 中,不假定$(u_i)_{i\in E}$为分布,即可以有$\sum_{i\in E} u_i = +\infty$. 则分别称 $P(t)$ 为有势 Q 过程和 Q 弱可配称的. 完全按照 §7.3 的证明可知当 Q 为全稳定的弱可配称 Q — 矩阵,则最小 Q 过程是有势 Q 过程. 在侯振挺等(见钱、侯等[1])研究了有势生灭过程,单流出过程的基础上,陈木法[1] 研究了保守有限流出有势 Q 过程,陈安岳[1] 研究了有限流出、有限非保守的有

势 Q 过程. 但有势 Q 过程的唯一性准则,不中断有势 Q 过程的存在准则和唯一性准则都还没有完成.

在本章中,我们虽然给出了全稳定情形可逆 Q 过程的基本理论,但是,可逆 Q 过程的唯一性问题还没有解决,这个问题有重要的实际意义,因而值得认真地研究.

当 Q 含有瞬时态时,所知结果甚少,L. C. G. Rogers and D. Williams[1] 在保守时,解决有势 Q 过程的存在性.

§7.1 ~ 7.4　取材于侯振挺、郭青峰、陈木法(钱敏、侯振挺等[1]). §7.5 取材于陈木法[2].

保守情形可逆 Q 过程的存在性最先由侯振挺、郭青峰、陈木法(钱敏、侯振挺等[1]) 得到. 非保守情形由陈安岳、张汉君[1] 得到. §7.6 取材于陈安岳、张汉君[1]. §7.7 由陈安岳、张汉君[2] 得到.

第5篇

Q—矩阵问题的相关论题

16 0^+ —系统的唯一决定性

§1 Kendall 猜想

设$P(t)=(p_{ij}(t);i,j\in E)$为一个Markov过程. 根据$K-C$方程,$P(t)$可由所有$p_{ij}(t)$在$[0,\varepsilon]$上的值唯一决定,其中$\varepsilon>0$可以任意小,但与$i,j$无关. 由此可知:对于转移矩阵$P(t)$,$P(t)$在$t=0$的右方任意局部的值可以决定其整体. 但当$t$变化时,$P(t)$的值在$t=0$的右方附近变化的情况可以用其$Q$—矩阵来刻划,因此人们自然希望进一步将上面的条件减弱而提出如下的问题:一个Markov过程的转移函数$P(t)$可否由其在$t=0$处的值$P(0)=I$及其Q—矩阵唯一决定? Q—矩阵问题的研究表明这个问题的答案是否定的:原来的条件减得过弱了. 于是想到要找出一个比上述的前一个条件弱而比后一个条件强的中间条件,使之能唯一地决定过程$P(t)$. 对此,英国学者 D. G. Kendall 提出了如下的猜想:

假定我们只知道一个Markov过程$P(t)=(p_{ij}(t))$满足下述条件:对于每个i和j,

$$p_{ij}(t)=f_{ij}(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T_{ij},T_{ij}>0. \tag{16.1.1}$$

其中$T=(T_{ij})$和$f=(f_{ij}(t);0\leqslant t\leqslant T_{ij})$为已知.

猜想:$(p_{ij}(t))$对一切$t\geqslant 0$被唯一决定.

为了叙述上的方便,我们引入下列

定义 16.1.1 对于一个由正元素所构成的矩阵$T=(T_{ij})$和在每个区间$[0,T_{ij}]$上定义的函数$f_{ij}(t)$所构成的函数矩阵$f=(f_{ij}(t))$,如果有一个Markov过程$(p_{ij}(t))$存在,使得

$$p_{ij}(t)=f_{ij}(t),\quad t\in[0,T_{ij}],i,j\in E. \tag{16.1.2}$$

则称(T,f)为一个0^+—系统,并进而称$(p_{ij}(t))$为(T,f)—过程,

(T,f) 为 $(p_{ij}(t))$ 的一个 0^+— 系统.

利用上述定义,我们可以把 Kendall 猜想改述为:对于任给的一个 0^+— 系统 (T,f),(T,f) — 过程唯一. 这就是说,如果 $P(t)$ 和 $\bar{P}(t)$ 均为 (T,f) — 过程,即满足

$$p_{ij}(t) = \bar{p}_{ij}(t) = f_{ij}(t), \qquad t \in [0,T_{ij}], i,j \in E, \tag{16.1.3}$$

则必有

$$p_{ij}(t) = \bar{p}_{ij}(t), \qquad t \in [0,+\infty), i,j \in E. \tag{16.1.4}$$

若 (T,f) 是 Q — 过程 $P(t)$ 的任一个 0^+ — 系统,则显然

$$f'_{ij}(0+) = p'_{ij}(0+) = q_{ij}. \tag{16.1.5}$$

今后我们亦称 Q 为 0^+— 系统 (T,f) 的密度矩阵.

以下几节我们将介绍关于 Kendall 猜想的研究中的几项有代表性的工作. 在论证中常常需要用到 Markov 过程构造论中的一些结果,由于本书不讨论过程的构造,故关于这方面的结果将直接引用文献.

§2 全稳定生灭过程由 0^+— 系统的唯一决定性

设已给全稳定的单边生灭矩阵

$$\begin{pmatrix} -(a_0+b_0) & b_0 & 0 & \cdots & \cdots \\ a_1 & -(a_1+b_1) & b_1 & 0 & \cdots \\ 0 & a_2 & -(a_2+b_2) & b_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \tag{16.2.1}$$

(其中 $a_0 \geqslant 0, a_i > 0(i \geqslant 1); b_i > 0(i \geqslant 0)$)

及全稳定的双边生灭矩阵

$$
\begin{pmatrix}
\ddots & \ddots & \ddots & & & \\
a_{-1} & -(a_{-1}+b_{-1}) & b_{-1} & & & \\
& a_0 & -(a_0+b_0) & b_0 & & \\
& & a_1 & -(a_1+b_1) & b_1 & \\
& & & \ddots & \ddots & \ddots \\
& & & & &
\end{pmatrix}
\tag{16.2.2}
$$

(其中 $a_i > 0, b_i > 0, i$ 为整数). 我们将其统称为生灭矩阵且均记为 $Q = (q_{ij}; i, j \in E)$, 在单边情形, $E = \{0, 1, 2, \cdots\}$, 而

$$
\begin{cases}
q_0 = -q_{00} = (a_0 + b_0), q_{01} = b_0; \\
q_i = -q_{ii} = (a_i + b_i), q_{ii-1} = a_i, q_{ii+1} = b_i, \quad (i \geqslant 1); \\
q_{ij} = 0, \quad i \geqslant 1, |i-j| > 1.
\end{cases}
\tag{16.2.3}
$$

在双边情形, $E = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$, 而

$$
\begin{cases}
q_i = -q_{ii} = (a_i + b_i), \\
q_{ii-1} = a_i, q_{ii+1} = b_i, \quad (i, j \in E); \\
q_{ij} = 0 \quad |i-j| > 1.
\end{cases}
\tag{16.2.4}
$$

生灭 Q — 矩阵所对应的 0^+ — 系统及 Q — 过程分别称为生灭 0^+ — 系统及生灭 Q 过程.

设已给以生灭矩阵 Q 为密度矩阵的生灭 0^+ — 系统 (T, f), 而 $P(t)$ 及 $\widetilde{P}(t)$ 均为 (T, f) — 过程, 它们都是生灭 Q 过程. 令

$$
g(t) = P(t) - \widetilde{P}(t). \tag{16.2.5}
$$

$$
\begin{aligned}
l_{ij} &= \inf(t; g(t) \neq 0) \\
&= \inf(t; p_{ij}(t) \neq \widetilde{p}_{ij}(t)).
\end{aligned}
\tag{16.2.6}
$$

则

$$
l_{ij} \geqslant T_{ij} \tag{16.2.7}
$$

又令

$$
\begin{cases}
M_{ij}(t) = p'_{ij}(t) - p_{ij-1}(t) q_{j-1j} - p_{ij}(t) q_{jj} - p_{ij+1}(t) q_{j+1j}, \\
\widetilde{M}_{ij}(t) = \widetilde{p}'_{ij}(t) - \widetilde{p}_{ij-1}(t) q_{j-1j} - \widetilde{p}_{ij}(t) q_{jj} - \widetilde{p}_{ij+1}(t) q_{j+1j}.
\end{cases}
\tag{16.2.8}
$$

易知 $M_{ij}(t)$ 及 $\widetilde{M}_{ij}(t)$ 均为有界连续函数. 记

$$m_{ij} = \inf\{t: M_{ij}(t) \neq \widetilde{M}_{ij}(t)\}. \qquad (16.2.9)$$

则显然

$$m_{ij} \geqslant l_{ij-1} \wedge l_{ij} \wedge l_{ij+1} > 0. \qquad (16.2.10)$$

其中 $a \wedge b = \min(a,b)$. 由 K. L. Chung[1] § 17 定理 1, $M_{ij}(t)$ 或者恒等于 0, 或者恒为正数, 故由(16.2.10), $M_{ij}(t)$ 及 $\widetilde{M}_{ij}(t)$ 或者同时恒等于 0, 或者同时恒大于 0. 又若记

$$\begin{cases} S = \{i: \forall\ j, M_{ij}(t) \equiv 0, t \in [0,\infty)\}, \\ \widetilde{S} = \{i: \forall\ j, \widetilde{M}_{ij}(t) \equiv 0, t \in [0,\infty)\}. \end{cases} \qquad (16.2.11)$$

则

$$S = \widetilde{S}. \qquad (16.2.12)$$

本节我们将要证明 Kendall 猜想对于单边及双边生灭过程的正确性. 我们将对单边生灭过程叙述我们的证明, 而对于双边情形, 只需将证明的若干细节稍微改变, 对此, 我们将在证明的过程中随时指出.

首先我们证明下面的基本引理, 它在主要定理的证明中起着十分重要的作用.

基本引理 设 $m_i = \inf(m_{ij}: j \in E)$, 则对所有的 $i \in E$, $m_i > 0$.

证明 当 $i \in S$ 时, 引理显然成立, 故只需考察 $i \notin S$ 的情形, 这时, 存在 $j_0 \in E$, 使 $M_{ij_0}(t) > 0 (t \geqslant 0)$.

由杨向群[1] 知, 每个生灭 Q — 过程(单边或双边) 都有如下的表现:

$$\begin{aligned} \psi_{ij}(\lambda) = {} & \varphi_{ij}(\lambda) + G_i^{(1)}(\lambda)\Big(\sum_k a_k^{(1)}\varphi_{kj}(\lambda)\Big) \\ & + G_i^{(2)}(\lambda)\Big(\sum_k a_k^{(2)}\varphi_{kj}(\lambda)\Big) + H_i^{(1)}(\lambda)x_j^{(1)}(\lambda)\mu_j \\ & + H_i^{(2)}(\lambda)x_j^{(2)}(\lambda)\mu_j, \quad (i,j \in E, \lambda > 0), \end{aligned} \qquad (16.2.13)$$

其中 $\Phi(\lambda)$ 为最小 Q — 过程. 记

$$X^{(a)}(\lambda)\mu = (x_j^{(a)}\mu_j)_{j\in E}, \qquad (a = 1,2). \qquad (16.2.14)$$

$X^{(a)}(\lambda)\mu$ 为行向量; 记

$$\begin{cases} G^{(a)}(\lambda) = (G_i^{(a)}(\lambda))_{i\in E}, \\ H^{(a)}(\lambda) = (H_i^{(a)}(\lambda))_{i\in E}, \end{cases} \quad (a = 1,2). \quad (16.2.15)$$

$G^{(a)}(\lambda)$ 及 $H^{(a)}(\lambda)$ 均为列向量，将(16.2.13) 改写为

$$\Psi(\lambda) = \Phi(\lambda) + G^{(1)}(\lambda)(\alpha^{(1)}\Phi(\lambda)) + G^{(2)}(\lambda)(\alpha^{(2)}\Phi(\lambda)) + H^{(1)}(\lambda)(X^{(1)}(\lambda)\mu) + H^{(2)}(\lambda)(X^{(2)}(\lambda)\mu). \quad (16.2.16)$$

由杨向群[1]可知 $\Phi(\lambda)(\lambda I - Q) = I$ 及 $X^{(a)}(\lambda)\mu(\lambda I - Q) = 0$, $(a = 1,2)$，故于(16.2.16) 两边右乘以 $(\lambda I - Q)$，可得

$$\Psi(\lambda)(\lambda I - Q) = I + G^{(1)}(\lambda)\alpha^{(1)} + G^{(2)}(\lambda)\alpha^{(2)}. \quad (16.2.17)$$

但

$$\lambda\Psi(\lambda) - I = \int_0^\infty e^{-\lambda t}P'(t)dt,$$

故整理(16.2.17) 得

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}M_{ij}(t)dt = \alpha_j^{(1)}G_i^{(1)}(\lambda) + \alpha_j^{(2)}G_i^{(2)}(\lambda). \quad (16.2.18)$$

同样地，对于 $\tilde{p}(t)$ 及其预解式 $\tilde{\Psi}(\lambda)$，有

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\tilde{M}_{ij}(t)dt = \tilde{\alpha}_j^{(1)}\tilde{G}_i^{(1)}(\lambda) + \tilde{\alpha}_j^{(2)}\tilde{G}_i^{(2)}(\lambda). \quad (16.2.19)$$

记

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} \alpha_i^{(1)} & \alpha_i^{(2)} \\ \alpha_j^{(1)} & \alpha_j^{(2)} \end{vmatrix}. \quad (16.2.20)$$

$$\tilde{\Delta}_{ij} = \begin{vmatrix} \tilde{\alpha}_i^{(1)} & \tilde{\alpha}_i^{(2)} \\ \tilde{\alpha}_j^{(1)} & \tilde{\alpha}_j^{(2)} \end{vmatrix}. \quad (16.2.21)$$

若对于 $j \in E$，有

$$\Delta_{j_0 j} = \begin{vmatrix} \alpha_{j_0}^{(1)} & \alpha_{j_0}^{(2)} \\ \alpha_j^{(1)} & \alpha_j^{(2)} \end{vmatrix} = 0. \quad (16.2.22)$$

由(16.2.18) 及 $M_{ij_0}(t) > 0 (t \geqslant 0)$，可知 $\alpha_{j_0}^{(1)}, \alpha_{j_0}^{(2)}$ 不全为 0，故有常数 k_j，使

$$\alpha_j^{(1)} = k_j\alpha_{j_0}^{(1)}, \quad \alpha_j^{(2)} = k_j\alpha_{j_0}^{(2)}. \quad (16.2.23)$$

则由(16.2.18) 可得

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty e^{-\lambda t}M_{ij}(t)dt\\&=\alpha_j^{(1)}G_i^{(1)}(\lambda)+\alpha_j^{(2)}G_i^{(2)}(\lambda)\\&=k_j(\alpha_{j_0}^{(1)}G_i^{(1)}(\lambda)+\alpha_{j_0}^{(2)}G_i^{(2)}(\lambda))\\&=k_j\int_0^\infty e^{-\lambda t}M_{ij_0}(t)dt.\end{aligned}$$

由 Laplace 变换的唯一性定理，可知

$$M_{ij}(t)=k_jM_{ij_0}(t)\quad(t\geqslant 0),j\in E. \tag{16.2.24}$$

若对于 $j_1\in E$，有

$$\Delta_{j_0j_1}=\begin{vmatrix}\alpha_{j_0}^{(1)} & \alpha_{j_0}^{(2)}\\ \alpha_{j_1}^{(1)} & \alpha_{j_1}^{(2)}\end{vmatrix}\neq 0. \tag{16.2.25}$$

则由(16.2.18)

$$\begin{cases}\int_0^\infty e^{-\lambda t}M_{ij_0}(t)\mathrm{d}t=\alpha_{j_0}^{(1)}G_i^{(1)}(\lambda)+\alpha_{j_0}^{(2)}G_i^{(2)}(\lambda),\\ \int_0^\infty e^{-\lambda t}M_{ij_1}(t)\mathrm{d}t=\alpha_{j_1}^{(1)}G_i^{(1)}(\lambda)+\alpha_{j_1}^{(2)}G_i^{(2)}(\lambda).\end{cases} \tag{16.2.26}$$

由(16.2.26)作为含 $G_i^{(1)}(\lambda)$、$G_i^{(2)}(\lambda)$ 的线性方程组可解出 $G_i^{(1)}(\lambda)$、$G_i^{(2)}(\lambda)$，以之代入(16.2.18)并利用 Laplace 变换的唯一性定理，可知对任意的 j，

$$M_{ij}(t)=\frac{\Delta_{jj_1}}{\Delta_{j_0j_1}}M_{ij_0}(t)-\frac{\Delta_{jj_0}}{\Delta_{j_0j_1}}M_{ij_1}(t). \tag{16.2.27}$$

综合(16.2.24)，(16.2.27)，可知存在 $M_{ij_0}(t)>0$ 及 $M_{ij_1}(t)$，使对于任意的 $j\in E$，均有

$$M_{ij}(t)=k_jM_{ij_0}(t)+h_jM_{ij_1}(t). \tag{16.2.28}$$

其中 k_j、h_j 为与 t 无关的常数.

令

$$N=\max\{s:\frac{M_{ij_1}(t)}{M_{ij_0}(t)}=c,c\text{ 为常数},0<t\leqslant s\}. \tag{16.2.29}$$

若 $N>0$，则当 $t<N$ 时，(16.2.27) 可写为

$$M_{ij}(t)=k_jM_{ij_0}(t),\qquad (j\in E).\tag{16.2.30}$$

若 $N=0$，则存在任意小的 t_1、$t_2>0$，使

$$\frac{M_{ij_1}(t_1)}{M_{ij_0}(t_1)}\neq\frac{M_{ij_1}(t_2)}{M_{ij_0}(t_2)}.\tag{16.2.31}$$

由于 $0<t<m_{ij_0}$ 时，$M_{ij_0}(t)=\widetilde{M}_{ij_0}(t)$，故 $\widetilde{M}_{ij_0}(t)>0$，因而对于 $\widetilde{M}_{ij}(t)$，亦有如(16.2.30) 及(16.2.31) 所示的两种情形发生，即或者存在 $\widetilde{N}>0$，使 $0<t<\widetilde{N}$ 时

$$\widetilde{M}_{ij}(t)=\tilde{k}_j\widetilde{M}_{ij_0}(t),\qquad (j\in E).\tag{16.2.32}$$

或者存在 $\tilde{j}_1$，使可以找到任意小的 $\tilde{t}_1>0$ 及 $\tilde{t}_2>0$，

$$\frac{\widetilde{M}_{i\tilde{j}_1}(\tilde{t}_1)}{\widetilde{M}_{ij_0}(\tilde{t}_1)}\neq\frac{\widetilde{M}_{i\tilde{j}_1}(\tilde{t}_2)}{\widetilde{M}_{ij_0}(\tilde{t}_2)}.\tag{16.2.33}$$

当(16.2.30) 成立时，必有

$$M_{i\tilde{j}_1}(t)=k_{\tilde{j}_1}M_{ij_0}(t),\qquad 0<t<N,\tag{16.2.34}$$

故有

$$\widetilde{M}_{i\tilde{j}_1}(t)=k_{\tilde{j}_1}\widetilde{M}_{ij_0}(t),\qquad 0<t<(N\wedge m_{ij_0}\wedge m_{i\tilde{j}_1}).\tag{16.2.35}$$

这与(16.2.33) 矛盾，故此时应有(16.2.32) 成立，即我们同时有

$$\begin{cases}M_{ij}(t)=k_jM_{ij_0}(t),\\ \widetilde{M}_{ij}(t)=\tilde{k}_j\widetilde{M}_{ij_0}(t),\end{cases}\qquad j\in E,0<t<(N\wedge\widetilde{N}).\tag{16.2.36}$$

取 $0<t<(m_{ij}\wedge m_{ij_0}\wedge N\wedge\widetilde{N})$，则由 $M_{ij_0}(t)>0$ 可得

$$k_j=\tilde{k}_j,\qquad (j\in E).\tag{16.2.37}$$

故当 $0<t<(m_{ij_0}\wedge N\wedge\widetilde{N})$ 时，有

$$M_{ij}(t)=\widetilde{M}_{ij}(t),\qquad (j\in E).\tag{16.2.38}$$

因而

$$m_{ij}\geqslant m_{ij_0}\wedge N\wedge\widetilde{N},\qquad (j\in E).\tag{16.2.39}$$

对 $j\in E$ 取下确界，得

$$m_i\geqslant m_{ij_0}\wedge N\wedge\widetilde{N}>0.\tag{16.2.40}$$

当(16.2.31)成立时，必有

$$\tilde{\Delta}_{j_0j_1} \neq 0. \tag{16.2.41}$$

事实上，若 $\tilde{\Delta}_{j_0j_1} = 0$，则仿(16.2.24)可知

$$\widetilde{M}_{ij_1}(t) = \tilde{k}_j \widetilde{M}_{ij_0}(t), \tag{16.2.42}$$

因而当 $0 < t < (m_{ij_0} \wedge m_{ij_1})$ 时，应有

$$M_{ij_1}(t) = \tilde{k}_j M_{ij_0}(t). \tag{16.2.43}$$

此与(16.2.31)矛盾. 由(16.2.41)，可知对于 $\widetilde{M}_{ij}(t)$，(16.2.28)亦成立，即对任意的 $j \in E$，有

$$\widetilde{M}_{ij}(t) = \tilde{k}_j \widetilde{M}_{ij_0}(t) + \tilde{h}_j \widetilde{M}_{ij_1}(t). \tag{16.2.44}$$

对任意的 $j \in E$，取 t_1, t_2，使

$$0 < t_i < (m_{ij_0} \wedge m_{ij_1} \wedge m_{ij}), \quad i = 1,2, \tag{16.2.45}$$

则由(16.2.28)及(16.2.44)，有

$$\begin{cases} M_{ij}(t_1) = k_j M_{ij_0}(t_1) + h_j M_{ij_1}(t_1), \\ \widetilde{M}_{ij}(t_1) = \tilde{k}_j \widetilde{M}_{ij_0}(t_1) + \tilde{h}_j \widetilde{M}_{ij_1}(t_1). \end{cases} \tag{16.2.46}$$

相减得

$$(k_j - \tilde{k}_j) M_{ij_0}(t_1) + (h_j - \tilde{h}_j) \widetilde{M}_{ij_1}(t_1) = 0. \tag{16.2.47}$$

同样有

$$(k_j - \tilde{k}_j) M_{ij_0}(t_2) + (h_j - \tilde{h}_j) \widetilde{M}_{ij_1}(t_2) = 0. \tag{16.2.48}$$

视(16.2.47)、(16.2.48)为关于 $(k_j - \tilde{k}_j)$、$(h_j - \tilde{h}_j)$ 的线性齐次方程组，则由(16.2.31)成立，可知

$$k_j - \tilde{k}_j = 0, \qquad h_j - \tilde{h}_j = 0,$$

即

$$k_j = \tilde{k}_j, \qquad h_j = \tilde{h}_j. \tag{16.2.49}$$

从而对任意 j，有

$$\begin{cases} M_{ij}(t) = k_j M_{ij_0}(t) + h_j M_{ij_1}(t), \\ \widetilde{M}_{ij}(t) = k_j \widetilde{M}_{ij_0}(t) + h_j \widetilde{M}_{ij_1}(t). \end{cases} \tag{16.2.50}$$

故当 $0 \leqslant t < (m_{ij_0} \wedge m_{ij_1})$ 时

$$M_{ij}(t) = \widetilde{M}_{ij}(t), \tag{16.2.51}$$

从而

$$m_{ij} \geqslant (m_{ij_0} \wedge m_{ij_1}). \qquad (16.2.52)$$

对 j 取下确界，即得

$$m_i \geqslant (m_{ij_0} \wedge m_{ij_1}) > 0. \qquad (16.2.53)$$

综上所述，引理得证.

下面我们证明主要定理，即

定理 16.2.1 单边（双边）生灭过程可由其 0^+ — 系统唯一决定.

证明 如前面所设，

$$l_{ij} = \inf\{t; p_{ij}(t) \neq \tilde{p}_{ij}(t)\} \geqslant T_{ij} > 0. \qquad (16.2.54)$$

若我们能证明

$$\delta = \inf_{i,j}(l_{ij}) > 0, \qquad (16.2.55)$$

则由 $K - C$ 方程可知

$$p_{ij}(t) = \tilde{p}_{ij}(t), \qquad t \geqslant 0,$$

从而 (T, f) — 过程唯一.

下面我们即将证明(16.2.55)确然成立.

首先，设 $i \neq 0$，则由(16.2.1)知 i 为保守状态，故向后方程成立，即

$$\begin{cases} p'_{ij}(t) = q_{ii-1}p_{i-1j}(t) + q_{ii}p_{ij}(t) + q_{ii+1}p_{i+1j}(t), \\ \tilde{p}'_{ij}(t) = q_{ii-1}\tilde{p}_{i-1j}(t) + q_{ii}\tilde{p}_{ij}(t) + q_{ii+1}\tilde{p}_{i+1j}(t). \end{cases} \qquad (16.2.56)$$

相减得

$$g'_{ij}(t) = q_{ii-1}g_{i-1j}(t) + q_{ii}g_{ij}(t) + q_{ii+1}g_{i+1j}(t). \qquad (16.2.57)$$

当 $0 \leqslant t \leqslant l_{ij}$ 时，$g'_{ij}(t) = g_{ij}(t) = 0$，故

$$q_{ii-1}g_{i-1j}(t) + q_{ii+1}g_{i+1j}(t) = 0. \qquad (16.2.58)$$

由于 q_{ii-1}, q_{ii+1} 均大于 0，故 $g_{i-1j}(t)$ 及 $g_{i+1j}(t)$ 同时为 0 或同不为 0，因而

$$l_{ij} \wedge l_{i-1j} = l_{ij} \wedge l_{i+1j}. \qquad (16.2.59)$$

若 $i>0$，则反复利用(16.2.59)，可得

$$l_{ij}\geqslant l_{ij}\wedge l_{i-1j}=l_{i-1j}\wedge l_{i-2j}=\cdots=l_{1j}\wedge l_{0j}. \tag{16.2.60}$$

[对于双边情形，若 $i<0$，则反复利用(16.2.59)得

$$l_{ij}\geqslant l_{ij}\wedge l_{i+1j}=l_{i+1j}\wedge l_{i+2j}=\cdots=l_{-1j}\wedge l_{0j}. \tag{16.2.61}$$

综合(16.2.60)、(16.2.61)，得

$$l_{ij}\geqslant l_{-1j}\wedge l_{0j}\wedge l_{1j}. \tag{16.2.62}$$]

现取

$$m=m_1\wedge m_0, \tag{16.2.63}$$

[对于双边情形，取

$$m=m_{-1}\wedge m_0\wedge m_1. \tag{16.2.64}$$]

则当 $t<m$ 时，对任意 $j\in E$

$$M_{ij}(t)=\widetilde{M}_{ij}(t),\qquad (i=0,1). \tag{16.2.65}$$

[对于双边情形，有

$$M_{ij}(t)=\widetilde{M}_{ij}(t),\qquad (i=-1,0,1). \tag{16.2.66}$$]

由(16.2.8)可知，这时将有

$$g'_{ij}(t)=g_{ij-1}(t)q_{j-1j}+g_{ij}(t)q_{jj}+g_{ij+1}(t)q_{j+1j}. \tag{16.2.67}$$

当 $t\leqslant l_{ij}\wedge m$ 时，$g_{ij}(t)=g'_{ij}(t)$，故得

$$g_{ij-1}(t)q_{j-1j}+g_{ij+1}(t)q_{j+1j}=0. \tag{16.2.68}$$

但 q_{j-1j} 及 q_{j-1j} 均大于 0，故知

$$m\wedge l_{ij}\wedge l_{ij-1}=m\wedge l_{ij}\wedge l_{ij-1}. \tag{16.2.69}$$

当 $j>0$ 时，反复利用(16.2.69)，可得

$$l_{ij}\geqslant m\wedge l_{ij}\wedge l_{ij-1}=m\wedge l_{ij-1}\wedge l_{ij-2}$$
$$=\cdots=m\wedge l_{i0}\wedge l_{i1}. \tag{16.2.70}$$

[对双边情形，当 $j<0$ 时，同样可得

$$l_{ij}\geqslant m\wedge l_{ij}\wedge l_{ij+1}=m\wedge l_{ij+1}\wedge l_{ij+2}$$
$$=\cdots=m\wedge l_{i0}\wedge l_{i1}. \tag{16.2.71}$$]

故恒有

$$l_{ij} = l_{i0} \wedge l_{i1} > 0. \tag{16.2.72}$$

由(16.2.60.)及(16.2.72),令

$$\delta = \min(l_{ij}; i,j = 0,1) > 0. \tag{16.2.73}$$

[对双边情形,由(16.2.62.)及(16.2.72),令

$$\delta = \min(l_{ij}; i = -1,0,1; j = 0,1) > 0, \quad (16.2.74)]$$

则对任意的 $i,j \in E$,恒有

$$l_{ij} \geqslant \delta > 0. \tag{16.2.75}$$

定理因而得证.

§3 单瞬时生灭过程由 0^+— 系统的唯一决定性

设 $E = \{0,1,2,\cdots\}, b \notin E, E_b = E \cup \{b\}$,考虑定义在 E_b 上的矩阵 $Q = (q_{ij};\quad i,j \in E_b)$.

$$Q = \begin{pmatrix} -\infty & e_0 & e_1 & e_2 & \cdots \\ a_0 & -(a_0+b_0) & b_0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_1 & -(a_1+b_1) & b_1 & \cdots \\ 0 & 0 & a_2 & -(a_2+b_2) & b_2 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{16.3.1}$$

其中 $0 \leqslant e_i < \infty, i \in E, 0 < a_i < \infty, 0 < b_i < \infty, i \in E$. 显然,$Q$ 在 E 上的限制 $Q_E = (q_{ij}; i,j \in E)$ 是一个生灭 Q— 矩阵. 记 z 为 Q_E 的边界点(杨向群[1]). 由唐令琪[1]知,形如(16.3.1)的矩阵 Q 为某个标准马氏过程的密度矩阵的充要条件是下列两条件之一成立:

(a) $\sum_{i \in E} e_i < \infty$,且 z 正则;

(b) $\sum_{i \in E} e_i = \infty$ 且 $\sum_{i \in E} e_i(z - z_i) < \infty$,$z$ 正则或流出. 这里(z_i)为 Q_E 的自然尺度(杨向群[1]).

以后,我们称满足条件(a)或(b)的矩阵(16.3.1)为单瞬时生

灭矩阵. 称马氏过程$(p_{ij}(t))$为单瞬时生灭过程,如果它的Q—矩阵为单瞬时生灭矩阵. 我们恒以b作为瞬时态,即$q_b=\infty$.

本节将证明,对于任意的单瞬时生灭0^+—系统,Kendall猜想成立.

设$(p_{ij}(t);t\geqslant 0,i,j\in E_b)$ $(\bar{p}_{ij}(t);t\geqslant 0,i,j\in E_b)$为两个$(T,f)$—过程,$(T,f)$是给定的单瞬时生灭$0^+$—系统. 记

$$l_{ij}=\inf\{t:p_{ij}(t)-\bar{p}_{ij}(t)\neq 0\},\quad i,j\in E_b. \tag{16.3.2}$$

则

$$l_{ij}\geqslant T_{ij}>0,\qquad i,j\in E_b. \tag{16.3.3}$$

记$(p_{ij}(t))$与$(\bar{p}_{ij}(t))$的拉氏变换分别为$(\psi_{ij}(\lambda))$和$(\bar{\psi}_{ij}(\lambda))$,则由唐令琪[1]知

$$\begin{cases}\psi_{ij}(\lambda)=\varphi_{ij}(\lambda)+\xi_i(\lambda)\psi_{bb}(\lambda)\eta_j(\lambda), & i,j\in E;\\ \bar{\psi}_{ij}(\lambda)=\varphi_{ij}(\lambda)+\xi_i(\lambda)\bar{\psi}_{bb}(\lambda)\bar{\eta}_j(\lambda), & i,j\in E;\\ \psi_{ib}(\lambda)=\psi_{bb}(\lambda)\xi_i(\lambda), & i\in E;\\ \bar{\psi}_{ib}(\lambda)=\bar{\psi}_{bb}(\lambda)\xi_i(\lambda), & i\in E;\\ \psi_{bj}(\lambda)=\psi_{bb}(\lambda)\eta_j(\lambda), & j\in E;\\ \bar{\psi}_{bj}(\lambda)=\bar{\psi}_{bb}(\lambda)\bar{\eta}_j(\lambda), & j\in E.\end{cases} \tag{16.3.4}$$

其中$(\varphi_{ij}(\lambda))$为最小Q_E过程$(p_{ij}^{\min}(t);i,j\in E)$的拉氏变换,而

$$\xi_i(\lambda)=1-\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda),\qquad i\in E. \tag{16.3.5}$$

$$\eta_j(\lambda)=\sum_{i\in E}e_i\varphi_{ij}(\lambda)+dX_j(\lambda)\mu_j,\qquad j\in E. \tag{16.3.6}$$

$$\bar{\eta}_j(\lambda)=\sum_{i\in E}e_i\varphi_{ij}(\lambda)+\bar{d}X_j(\lambda)\mu_j,\qquad j\in E. \tag{16.3.7}$$

此处$d\geqslant 0$, $\bar{d}\geqslant 0$为常数, $\mu=(\mu_j)$为Q_E的标准测度, $X(\lambda)=(X_j(\lambda))$为方程

$$\begin{cases}(\lambda I-Q_E)U=\mathbf{0}, & \lambda>0,\\ \mathbf{0}\leqslant U\leqslant 1,\end{cases} \tag{16.3.8}$$

的最大解. 由于Q_E为正则或流出生灭矩阵,故$X(\lambda)\neq\mathbf{0}$,从而最小Q_E过程$(p_{ij}^{\min}(t))$中断.

引理 16.3.1 对每个 $i \in E$,令

$$h_i(t) = 1 - \sum_{j\in E} p_{ij}^{\min}(t) - a_0\int_0^t p_{i0}^{\min}(s)\mathrm{d}s, \qquad (16.3.9)$$

则 $h_i(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上或恒大于 0 或恒等于 0.

证明 令

$$\begin{cases} \hat{p}_{ij}(t) = p_{ij}^{\min}(t), & i,j \in E; \\ \hat{p}_{ib}(t) = 1 - \sum_{j\in E} p_{ij}^{\min}(t), & i \in E; \\ \hat{p}_{bb}(t) \equiv 1, & \\ \hat{p}_{bj}(t) \equiv 0, & j \in E. \end{cases} \qquad (16.3.10)$$

则 $(\hat{p}_{ij}(t); i,j \in E_b, t \geqslant 0)$ 为 E_b 上的一个标准马氏过程,其密度矩阵 $\hat{Q} = (\hat{q}_{ij}; i,j \in E_b)$ 满足

$$\hat{q}_{bj} = 0, \qquad j \in E_b,$$

$$\hat{q}_{ii-1} = a_i, \quad \hat{q}_{ii} = -(a_i + b_i), \quad \hat{q}_{ii+1} = b_i, \quad i \in E.$$

由杨向群[1]

$$\begin{aligned} \hat{q}_{ib} &= \lim_{t\downarrow 0} \frac{\hat{p}_{ib}(t)}{t} = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1 - \sum_{j\in E} p_{ij}^{\min}(t)}{t} \\ &= \lim_{\lambda\to\infty} \lambda(1 - \lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)) \qquad (16.3.11) \\ &= \begin{cases} a_0, & \text{如 } i = 0; \\ 0, & \text{如 } i < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

由此知,对 $i \in E$

$$\begin{aligned} h_i(t) &= 1 - \sum_{j\in E} p_{ij}^{\min}(t) - a_0\int_0^t p_{i0}^{\min}(s)\mathrm{d}s \\ &= \hat{p}_{ib}(t) - \int_0^t \hat{p}_{i0}(s)\hat{q}_{0b}\mathrm{d}s \\ &= \hat{p}_{ib}(t) - \int_0^t \sum_{k\neq b} \hat{p}_{bk}(s) q_{kb} e^{\hat{q}_b(t-s)}\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

由 K. L. Chung[1] Ⅱ. 定理 17.1 知 $h_i(t)$ 或恒大于 0 或恒等于 0.

引理 16.3.2 $l_{ib} \geqslant l_{bb}$, $\quad (i \in E)$. $\qquad (16.3.12)$

证明 由(16.3.4)得

$$\frac{1}{\lambda}\psi_{ib}(\lambda) = \psi_{bb}(\lambda)\frac{\xi_i(\lambda)}{\lambda} = \psi_{bb}(\lambda)(\frac{1}{\lambda} - \sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)),$$

即

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^t p_{ib}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^t p_{bb}(t-s)(1-\sum_{j\in E}p_{ij}^{\min}(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

$$\int_0^t p_{ib}(s)\mathrm{d}s = \int_0^t p_{bb}(t-s)(1-\sum_{j\in E}p_{ij}^{\min}(s))\mathrm{d}s. \tag{16.3.13}$$

同理

$$\int_0^t \bar{p}_{ib}(s)\mathrm{d}s = \int_0^t \bar{p}_{bb}(t-s)(1-\sum_{j\in E}p_{ij}^{\min}(s))\mathrm{d}s. \tag{16.3.14}$$

如 $t \leqslant l_{bb}$，则由(16.3.13)、(16.3.14)知

$$\int_0^t p_{ib}(s)\mathrm{d}s = \int_0^t \bar{p}_{ib}(s)\mathrm{d}s.$$

上式对任意 $t\in[0,l_{bb}]$ 成立，故

$$p_{ib}(t) = \bar{p}_{ib}(t), \qquad t\in[0,l_{bb}].$$

由 l_{ib} 定义得

$$l_{ib} \geqslant l_{bb}.$$

引理证毕.

引理 16.3.3 $l_{bj} \geqslant l_{bb}, \quad j\in E.$ (16.3.15)

证明 由(16.3.4)、(16.3.6)得

$$\frac{1}{\lambda}\psi_{bj}(\lambda) = \psi_{bb}(\lambda)\sum_{i\in E}e_i\frac{\varphi_{ij}(\lambda)}{\lambda} + d\psi_{bb}(\lambda)\frac{X_j(\lambda)}{\lambda}\mu_j. \tag{16.3.16}$$

由杨向群[1]定理 1.10.5 知

$$\frac{1}{\lambda}X(\lambda) = \frac{1}{\lambda} - \sum_{k\in E}\varphi_{jk}(\lambda) - \frac{1}{\lambda}\varphi_{j0}(\lambda)a_0.$$

由于 $X(\lambda)\neq 0$，可选 $j_0\in E$，使 $X_{j_0}(\lambda)\neq 0$，于是

$$\frac{1}{\lambda} - \sum_{k\in E}\varphi_{j_0k}(\lambda) - \frac{1}{\lambda}\varphi_{j_00}(\lambda)a_0 > 0.$$

但上式左边是 $1-\sum_{k\in E}p_{j_0k}^{\min}(t)-a_0\int_0^t p_{j_00}^{\min}(s)\mathrm{d}s$ 的拉氏变换，故存在 t_0，使

$$h_{j_0}(t_0)=1-\sum_{k\in E}p_{j_0k}^{\min}(t_0)-a_0\int_0^{t_0}p_{j_00}^{\min}(s)\mathrm{d}s>0.$$

由引理 16.3.1，

$$h_{j_0}(t)>0,\qquad \forall\ t>0.$$

又由(16.3.16)知

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^t p_{bj}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^t p_{bb}(t-s)g_j(s)\mathrm{d}s+$$
$$+d\mu_j\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^t p_{bb}(t-s)h_j(s)\mathrm{d}s.$$

其中

$$g_j(t)=\int_0^t\sum_{i\in E}e_ip_{ji}^{\min}(s)\mathrm{d}s,$$
$$h_j(t)=1-\sum_{j\in E}p_{ji}^{\min}(t)-a_0\int_0^t p_{j0}^{\min}(s)\mathrm{d}s.$$

故

$$\int_0^t p_{bj}(s)\mathrm{d}s=\int_0^t p_{bb}(t-s)g_j(s)\mathrm{d}s+d\mu_j\int_0^t p_{bb}(t-s)h_j(s)\mathrm{d}s.\tag{16.3.17}$$

同理

$$\int_0^t \bar{p}_{bj}(s)\mathrm{d}s=\int_0^t \bar{p}_{bb}(t-s)g_j(s)\mathrm{d}s+\bar{d}\mu_j\int_0^t \bar{p}_{bb}(t-s)h_j(s)\mathrm{d}s.\tag{16.3.18}$$

任取 $t\leqslant\min\{t_{bb},t_{bj}\}$，则由(16.3.17)、(16.3.18)得

$$d\mu_j\int_0^t p_{bb}(t-s)h_j(s)\mathrm{d}s=\bar{d}\mu_j\int_0^t p_{bb}(t-s)h_j(s)\mathrm{d}s.$$

特别

$$d\mu_{j_0}\int_0^t p_{bb}(t-s)h_{j_0}(s)\mathrm{d}s=\bar{d}\mu_{j_0}\int_0^t p_{bb}(t-s)h_{j_0}(s)\mathrm{d}s.$$

由于 $\mu_{j_0}>0$，$p_{bb}(s)>0$，$h_{j_0}(s)>0,\forall\ s>0$，故有

$$d=\bar{d}.$$

从而(16.3.18)变为

$$\int_0^t \bar{p}_{bj}(s)\mathrm{d}s = \int_0^t \bar{p}_{bb}(t-s)g_j(s)\mathrm{d}s + d\mu_j\int_0^t \bar{p}_{bb}(t-s)h_j(s)\mathrm{d}s. \tag{16.3.19}$$

设 $t \leqslant l_{bb}$,则 $p_{bb}(s) = \bar{p}_{bb}(s) \quad \forall\ s \leqslant t$,比较(16.3.17)和(16.3.19)得

$$\int_0^t p_{bj}(s)\mathrm{d}s = \int_0^t \bar{p}_{bj}(s)\mathrm{d}s.$$

上式对于一切 $t \leqslant l_{bb}$ 成立,故

$$p_{bj}(t) = \bar{p}_{bj}(t), \qquad \forall\ t \leqslant l_{bb}.$$

由 l_{bj} 定义得

$$l_{bj} \geqslant l_{bb}, \quad j \in E.$$

引理得证.

引理 16.3.4 $l_{ij} \geqslant l_{bb}, \qquad i,j \in E.$ (16.3.20)

证明 由(16.3.4)得

$$\begin{aligned}\psi_{ij}(\lambda) &= \varphi_{ij}(\lambda) + \xi_i(\lambda)\psi_{bj}(\lambda)\\ &= \varphi_{ij}(\lambda) + (1 - \lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda))\psi_{bj}(\lambda),\end{aligned}$$

故

$$\frac{1}{\lambda}\psi_{ij}(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\varphi_{ij}(\lambda) + (\frac{1}{\lambda} - \sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda))\psi_{bj}(\lambda).$$

由逆拉氏变换得

$$\int_0^t p_{ij}(s)\mathrm{d}s = \int_0^t p_{ij}^{\min}(s)\mathrm{d}s + \int_0^t (1 - \sum_{j\in E} p_{ij}^{\min}(t-s))p_{bj}(s)\mathrm{d}s. \tag{16.3.21}$$

同理

$$\int_0^t \bar{p}_{ij}(s)\mathrm{d}s = \int_0^t p_{ij}^{\min}(s)\mathrm{d}s + \int_0^t (1 - \sum_{j\in E} p_{ij}^{\min}(t-s))\bar{p}_{bj}(s)\mathrm{d}s. \tag{16.3.22}$$

如 $t \leqslant l_{bj}$,则 $p_{bj}(s) = \bar{p}_{bj}(s), \quad \forall\ s \leqslant t$. 从而由(16.3.21)、(16.3.22)得

$$\int_0^t p_{ij}(s)\mathrm{d}s = \int_0^t \bar{p}_{ij}(s)\mathrm{d}s.$$

上式对 $\forall\, t \leqslant l_{bj}$ 成立，故

$$p_{ij}(t) = \bar{p}_{ij}(t), \qquad t \leqslant l_{ij}$$

由定义及引理 16.3.3 得

$$l_{ij} \geqslant l_{bj} \geqslant l_{bb}, \qquad i,j \in E.$$

引理证毕.

由引理 16.3.2、16.3.3、16.3.4，我们得到

$$p_{ij}(t) = \bar{p}_{ij}(t), \qquad i,j \in E_b, t \in [0, l_{bb}].$$

故由 $K-C$ 方程知

$$p_{ij}(t) = \bar{p}_{ij}(t), \quad t \geqslant 0 \quad i,j \in E_b.$$

由此得到

定理 16.3.1 任给一个单瞬生灭 0^+- 系统(T,f)，(T,f) 过程唯一.

§4 补充与注记

侯振挺[2]1984 年首先证明了 Kendall 猜想对于全稳定的单边生灭过程成立；接着，张汉君[1] 用不同方法证明了这一猜想对单边、双边生灭过程均成立，推广了侯振挺[2] 的结果. 肖果能对张汉君[1] 的方法作了一些简化，即本章 §2. 肖果能[2] 还对一类特殊的单瞬时生灭过程证明了 Kendall 猜想成立；沿用这一方法，邹捷中[1] 证明了对一般的单瞬时生灭过程猜想成立；邹捷中[1] 包含肖果能[2] 的结果作为其特例，即本章 §3. 此外，耿显民曾经给出了 Kendall 猜想对 Doob 过程成立的结论；刘再明[2] 讨论了 Kendall 猜想成立的一些情况. 英国学者 G. E. H. Reuter[1] 在知悉侯振挺等人的上述工作以后，对 Doob 过程和一类所谓单流出过程证明了 Kendall 猜想成立.

17 嵌入问题

§1 嵌入问题

嵌入问题是关于 Markov 链的一个理论问题，这个问题是 1937 年由 Elfving 提出并首先加以研究的.

设 E 为有限集或是可列集，称矩阵

$$P = (p_{ij}; i, j \in E)$$

为次随机矩阵，若 P 满足条件

(i) $p_{ij} \geqslant 0,$

$i, j \in E;$

(ii) $\sum_{j \in E} p_{ij} \leqslant 1,$

$i \in E.$

当(ii) 中成立等号时，称 P 为随机矩阵.

任给 Markov 转移函数 $P(t)$，则 $P = P(1)$ 随之决定，P 是一个次随机矩阵；反之，对于任给的次随机矩阵 P，试问：何时存在转移函数 $P(t)$，使 $P(1) = P$？这就是嵌入问题. 所以，简言之，嵌入问题就是由 $P = P(1)$ 决定 $P(t)$ 的问题：如果这样的 $P(t)$ 存在，则称 P 为一个离散骨架，而称 $P(t)$ 是 P 的一个连续扩充.

研究表明，对于任给的 P，满足 $P(1) = P$ 的 $P(t)$ 未必存在；如果存在，也未必唯一，因此，嵌入问题亦如 $Q-$ 矩阵问题一样，完整地说应该包括以下三个基本问题：

1) 存在性问题：在什么条件下，P 的连续扩充存在？

2) 唯一性问题：若 P 的连续扩充存在，则何时唯一？

3) 构造问题：当 P 的连续扩充存在时，如何构造 P 的全部连续扩充？

易知，若 P 是离散骨架，则当且仅当 P 为随机矩阵时，连续扩充 $P(t)$ 不中断，故称 P 为随机矩阵时的嵌入问题为不中断情形的嵌入问题；若容许 P 为次随机矩阵，则相应地称为可中断情形，显然，不中断情形只是可中断情形的特例. 嵌入问题提出至今，历时半个多世纪，已经取得了不少的研究成果. 但截止于目前所见的文献，只有两状态不中断情形的嵌入问题才真正得到彻底的解决. 然而，从 Markov 链的理论来看，不中断性并非本质性的要求，自然应当考虑可中断情形下的两状态齐次 Markov 链的嵌入问题. 在本章的 §2 中我们将给出这个问题的完整的解答，并且作为特例，可以立即导出文献中关于不中断情形下两状态嵌入问题的已知结果.

对于两状态情形，连续扩充如果存在，则必定唯一，并且不难直接构造. 所以说两状态情形的嵌入问题本质上是简单的. 真正在实质上有兴趣的至少是三状态情形的嵌入问题. 此时，较之两状态情形，问题已经大大地复杂化了，因此目前的文献中对于三状态情形嵌入问题的讨论并不完备.

本章的主要篇幅用于不中断情形下三状态嵌入问题的讨论. 我们根据三阶 Q－矩阵的特征首次对三阶 Q－矩阵及其所对应的 Q 过程和离散骨架进行分类，然后逐类进行讨论. §3 中我们给出了各类三阶转移函数的表现定理，从而导出了各类三阶离散骨架的结构，这是我们讨论三状态嵌入问题的基础. 在此基础上，§4 彻底解决了一类特殊的 Q 过程即三阶有势 Q 过程的嵌入问题；§5 及 §6，§7 又分所谓退化情形及非退化情形对一般三状态情形的嵌入问题进行了详尽的讨论，给出全部问题(即存在性问题，唯一性问题和构造问题)的完满的解答，从而使不中断情形下的三状态嵌入问题最终获得彻底解决.

嵌入问题无论在理论上或在应用上都是一个值得研究的课题，但由于问题本身的难度，目前已经取得的研究成果离问题的彻底解决相去甚远.

§2　两状态可中断齐次 Markov 链的嵌入问题

本节就可中断情形的两状态齐次 Markov 链的嵌入问题作彻底的讨论并给出完满的解答.

设 $E=\{1,2\}$, E 上的 $Q-$ 矩阵为

$$Q=\begin{pmatrix}-p & r\\ s & -q\end{pmatrix}. \tag{17.2.1}$$

Q 满足条件

(i)　$p、q、r、s\geqslant 0$;

(ii)　$r\leqslant p、s\leqslant q$. 　　(17.2.2)

这时,必有唯一的 Q 过程 $P(t)$,

$$P(t)=\begin{pmatrix}p_{11}(t) & p_{12}(t)\\ p_{21}(t) & p_{22}(t)\end{pmatrix}. \tag{17.2.3}$$

当且仅当 Q 保守,即 $r=p, s=q$ 时, $P(t)$ 不中断. 取 $t=1$,得

$$P=P(1)=\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix}. \tag{17.2.4}$$

$$p_{ij}=p_{ij}(1),(i,j\in E).$$

称 P 为一个二维离散骨架. 显然 P 是一个次随机矩阵,并且 P 为随机矩阵的充要条件是 Q 保守. 由以上所述,一个二阶次随机矩阵 P 是一个二维离散骨架,当且仅当存在一个次转移矩阵 $P(t)$,使 $P=P(1)$. 由于 P 由 $P(t)$ 决定,而在我们所考虑的有限链的情况下, $P(t)$ 与 Q 相互唯一决定,故 P 由 Q 决定,即 P 的元素 $p_{ij}(i,j\in E)$ 可通过 Q 的元素 p,q,r,s 来表示,现在我们来求出这些表达式.

任给一个 $Q-$ 矩阵(17.2.1),由条件(17.2.2),当 $p=q=0$ 时, $r=s=0$,这时,所有的状态为吸收状态,因而 $P(t)=I$(单位矩阵);反之, I 显然可嵌入,所以我们取 p,q 不同时为 0,并且不妨设 $q\neq 0$.

对于(17.2.1)中的 $Q-$ 矩阵 Q,为了求出 $P(t)$ 然后得到离散骨架 $P(1)$,我们先求出 $P(t)$ 的预解式 $R(\lambda)$,记

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} r_{11}(\lambda) & r_{12}(\lambda) \\ r_{21}(\lambda) & r_{22}(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{17.2.5}$$

由分解定理，我们有

$$\begin{aligned} R(\lambda) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Phi(\lambda) \end{pmatrix} + r_{11}(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta(\lambda) \end{pmatrix} (1 \quad \eta(\lambda)) \\ &= \begin{pmatrix} r_{11}(\lambda) & r_{11}(\lambda)\eta(\lambda) \\ r_{11}(\lambda)\zeta(\lambda) & \Phi(\lambda) + r_{11}(\lambda)\zeta(\lambda)\eta(\lambda) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中，

(1) $\Phi(\lambda)$ 为 Q_1 过程，Q_1 为一阶 $Q-$ 矩阵

$$Q_1 = [-q]. \tag{17.2.6}$$

故

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{\lambda + q}. \tag{17.2.7}$$

(2) $\zeta(\lambda)$ 为关于 $\Phi(\lambda)$ 的列协调族，由列协调族表现定理

$$\zeta(\lambda) = \Phi(\lambda)\beta + \bar{\xi}(\lambda).$$

$\bar{\xi}(\lambda)$ 为 Q_1 的流出解，由 Q_1 有限，故零流出，从而 $\bar{\xi}(\lambda) = \mathbf{0}$，故得

$$\zeta(\lambda) = \frac{\beta}{\lambda + q},$$

而

$$r_{21}(\lambda) = \frac{\beta r_{11}(\lambda)}{\lambda + q}.$$

由连续性条件

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda^2 r_{21}(\lambda) = \lim_{\lambda \to \infty} \beta\lambda r_{11}(\lambda) \frac{\lambda}{\lambda + q} = \beta.$$

又由 $Q-$ 条件

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^2 r_{21}(\lambda) = s.$$

故得 $\beta = s$，而

$$\zeta(\lambda) = \frac{s}{\lambda + q}, \tag{17.2.8}$$

$$r_{21}(\lambda) = \frac{s}{\lambda + q} r_{11}(\lambda). \tag{17.2.9}$$

(3) $\eta(\lambda)$ 为关于 $\Phi(\lambda)$ 的行协调族，经过类似于(2)中的推理，可得

$$\eta(\lambda) = \frac{r}{\lambda + q}, \tag{17.2.10}$$

$$r_{12}(\lambda) = \frac{r}{\lambda + q} r_{11}(\lambda). \tag{17.2.11}$$

从而

$$r_{22}(\lambda) = \frac{1}{\lambda + q} + \frac{rs}{(\lambda + q)^2} \cdot r_{11}(\lambda). \tag{17.2.12}$$

(4) $r_{11}(\lambda)$ 有如下的表达式

$$r_{11}(\lambda) = c + \lambda + \lambda\langle\eta(\lambda), \zeta\rangle.$$

其中 ζ 是 $\zeta(\lambda)$ 的标准映象

$$\zeta = \lim_{\lambda \to 0} \zeta(\lambda) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{s}{\lambda + q} = \frac{s}{q}.$$

而 $\langle\eta(\lambda), \zeta\rangle$ 为内积

$$\langle\eta(\lambda), \zeta\rangle = \frac{rs}{q(\lambda + q)},$$

故得

$$r_{11}(\lambda) = \left[c + \lambda + \lambda \frac{rs}{q(\lambda + q)}\right]^{-1}. \tag{17.2.13}$$

再利用 Q － 条件即可定出常数 c，由 Q － 条件

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda(1 - \lambda r_{11}(\lambda)) = p,$$

即

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda\left(1 - \frac{\lambda}{c + \lambda + \lambda \dfrac{rs}{q(\lambda + q)}}\right)$$

$$= \lim_{\lambda \to \infty} \frac{c + \lambda + \lambda \dfrac{rs}{q(\lambda + q)} - \lambda}{\dfrac{c}{\lambda} + 1 + \dfrac{rs}{q(\lambda + q)}}$$

$$= c + \frac{rs}{q} = p.$$

故 $c=\frac{1}{q}(pq-rs)$，代入(16)并化简，得

$$r_{11}(\lambda)=\frac{r+q}{\lambda^2+(p+q)\lambda+(pq-rs)}. \tag{17.2.14}$$

故我们已求得 $R(\lambda)$ 为

$$\begin{bmatrix} r_{11}(\lambda) & r_{11}(\lambda)\frac{r}{r+q} \\ r_{11}(\lambda)\frac{s}{\lambda+q} & \frac{1}{\lambda+q}+r_{11}(\lambda)\frac{rs}{(\lambda+q)^2} \end{bmatrix}. \tag{17.2.15}$$

为求 $P(t)$，只要对 $R(\lambda)$ 进行反演：由(17.2.14)可得

$$r_{11}(\lambda)=\frac{\lambda+q}{(\lambda+\frac{p+q}{2})^2+[pq-rs-\frac{(p+q)^2}{4}]},$$

但

$$pq-rs-\frac{(p+q)^2}{4}=-rs-\frac{(p-q)^2}{4}\leqslant 0.$$

故可令

$$2u=p+q;\quad k^2=u^2-(pq-rs),\quad (k\geqslant 0). \tag{17.2.16}$$

当 $k>0$ 时，

$$r_{11}(\lambda)=\frac{\lambda-\frac{p+q}{2}-\frac{p-q}{2}}{(\lambda+\frac{p+q}{2})^2-k^2}$$

$$=\frac{\lambda+u}{(\lambda+u)^2-k^2}-\frac{p-q}{2k}\cdot\frac{k}{(\lambda+u)^2-k^2}.$$

求逆变换，得

$$p_{11}(t)=e^{-ut}[\operatorname{ch}kt-\frac{p-q}{2k}\operatorname{sh}kt]$$

$$=e^{-ut}[\operatorname{ch}kt-\frac{p-u}{k}\operatorname{sh}kt]. \tag{17.2.17}$$

由(17.2.11)得

$$r_{12}=r_{11}(\lambda)\frac{r}{\lambda+q}$$

$$= \frac{\lambda + q}{(\lambda + u)^2 - k^2} \frac{r}{\lambda + q}$$

$$= \frac{r}{(\lambda + u)^2 - k^2}.$$

求逆变换，得

$$p_{12}(t) = \frac{r}{k} e^{-ut} \operatorname{sh} kt. \tag{17.2.18}$$

同样可得

$$p_{21}(t) = \frac{s}{k} e^{-ut} \operatorname{sh} kt. \tag{17.2.19}$$

在(17.2.17)中交换 p 与 q，即得

$$\begin{aligned} p_{22}(t) &= e^{-ut}\left[\operatorname{ch} kt - \frac{q - p}{2k} \operatorname{sh} kt\right] \\ &= e^{-ut}\left[\operatorname{ch} kt - \frac{q - u}{k} \operatorname{sh} kt\right]. \end{aligned} \tag{17.2.20}$$

故可得

$$P(t) = \begin{pmatrix} e^{-ut}\left(\operatorname{ch} kt - \dfrac{p - u}{k} \operatorname{sh} kt\right) & \dfrac{r}{k} e^{-ut} \operatorname{sh} kt \\ \dfrac{s}{k} e^{-ut} \operatorname{sh} kt & e^{-ut}\left(\operatorname{ch} kt - \dfrac{q - u}{k} \operatorname{sh} kt\right) \end{pmatrix}. \tag{17.2.21}$$

在(17.2.21)中令 $t = 1$，即得离散骨架

$$P = \begin{pmatrix} e^{-u}\left(\operatorname{ch} k - \dfrac{p - u}{k} \operatorname{sh} k\right) & \dfrac{r}{k} e^{-u} sh k \\ \dfrac{s}{k} e^{-u} sh k & e^{-u}\left(ch k - \dfrac{q - u}{k} sh k\right) \end{pmatrix}. \tag{17.2.22}$$

当 $k = 0$ 时，易知有

$$\left(\frac{p - q}{2}\right)^2 + rs = 0,$$

故此时应有

$$p = q, \quad \min(r, s) = 0,$$

因而 $\quad u = p = q.$

由(17.2.14)及(17.2.15),可知此时的 $R(\lambda)$ 为

$$R(\lambda)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\lambda+u} & \dfrac{r}{(\lambda+u)^2}\\ \dfrac{s}{(\lambda+u)^2} & \dfrac{1}{\lambda+u}\end{pmatrix}. \tag{17.2.23}$$

反演得

$$P(t)=\begin{pmatrix}e^{-ut} & rte^{-ut}\\ ste^{-ut} & e^{-ut}\end{pmatrix}. \tag{17.2.24}$$

令 $t=1$,得离散骨架

$$P=\begin{pmatrix}e^{-u} & re^{-u}\\ se^{-u} & e^{-u}\end{pmatrix}. \tag{17.2.25}$$

在 (17.2.22) 中,如果当 $k=0$ 时,我们将 $\frac{shk}{k}$ 理解为1:$\frac{\text{sh}k}{k}=0/0=1$,则易见(17.2.22)已包括了(17.2.25);而当 $p=q=r=s=0$ 时,(17.2.22)成为单位矩阵 I. 所以,当 p、q、r、s 在(17.2.2)的约束之下变化时,(17.2.1)给出全部二阶 $Q-$ 矩阵,因而(17.2.22)给出全部二维离散骨架.这样,我们就得到下面的定理

定理 17.2.1(表现定理)　二阶次随机矩阵 P 是二维离散骨架的充要条件是:存在常数 p,q,r,s 满足条件(17.2.2),而使 P 写成(17.2.22)的形状,其中

$$u=\frac{p+q}{2},k^2=u^2-(pq-rs),k\geqslant 0. \tag{17.2.26}$$

(当 $k=0$ 时,理解$\frac{\text{sh}k}{k}=0/0$ 为 1).

直接计算可得,离散骨架(17.2.22)的迹 T 和列式 $\varDelta$ 各为

$$T=2e^{-u}chk,\varDelta=e^{-2u}. \tag{17.2.27}$$

反过来,u 和 k 亦可由 T 和 $\varDelta$ 表示

$$u=-\frac{1}{2}\ln\varDelta,\quad \text{ch}k=\frac{T}{2\sqrt{\varDelta}},$$

$$k=\ln\frac{T+\sqrt{T^2-4\varDelta}}{2\sqrt{\varDelta}}. \tag{17.2.28}$$

由于 $e^{-2u}>0$ 而$\text{ch}k\geqslant 1$,故可得离骨架的必要条件如下

推论 17.2.1 若 P 是二维离散骨架，则 P 的迹 T 和行列式 Δ 满足条件

$$\Delta > 0, \qquad T^2 \geqslant 4\Delta. \tag{17.2.29}$$

此处的 $T^2 \geqslant 4\Delta$ 其实对任意的次随机矩阵均成立.

现在我们来刻划二状态 Markov 链的离散骨架的特征.

定理 17.2.2 设已给二阶次随机矩阵 $P=(p_{ij})$, $i,j\in E$, 其迹及行列式分别记为 T 及 Δ，则当 $T^2>4\Delta$ 时，P 为二维离散骨架的充要条件为：

(i) $\Delta > 0$; (17.2.30)

(ii)

$$\frac{\sqrt{T^2-4\Delta}}{1-\dfrac{\ln\dfrac{T+\sqrt{T^2-4\Delta}}{2}}{\ln\sqrt{\Delta}}} \geqslant \max\{p_{11}+2p_{12}-p_{22},\ p_{22}+2p_{21}-p_{11}\}. \tag{17.2.31}$$

证明 必要性 设 P 为二维离散骨架. 由表现定理，P 可写成(17.2.22)的形式，其中 p,q,r,s 及 u,k 满足(17.2.2)及(17.2.26)，并且(17.2.27)，(17.2.28)，(17.2.29)成立. 由(17.2.29)立得条件(i). 由(17.2.27)，(17.2.28)可知

$$e^{-u}=\sqrt{\Delta}, \quad \mathrm{ch}k=\frac{T}{2\sqrt{\Delta}}, \quad \mathrm{sh}k=\frac{\sqrt{T^2-4\Delta}}{2\sqrt{\Delta}}. \tag{17.2.32}$$

由所设 $T^2>4\Delta$，故 $\mathrm{ch}k=\dfrac{T}{2\sqrt{\Delta}}>1$，因而 $k>0$，将(17.2.32)代入到

$$p_{11}=e^{-u}\left(\mathrm{ch}k-\frac{p-u}{k}\mathrm{sh}k\right),$$

$$p_{12}=\frac{r}{k}e^{-u}\,\mathrm{sh}k.$$

可解出

$$p = u - \frac{k(p_{11} - p_{22})}{\sqrt{T^2 - 4\Delta}},$$

$$r = \frac{2kp_{12}}{\sqrt{T^2 - 4\Delta}}. \qquad (17.2.33)$$

但 $p \geqslant r$,故由(17.2.33)及(17.2.28)可得

$$\frac{\sqrt{T^2 - 4\Delta}}{1 - \dfrac{\ln \dfrac{T + \sqrt{T^2 - 4\Delta}}{2}}{\ln \sqrt{\Delta}}} \geqslant p_{11} + 2p_{12} - p_{22}. \qquad (17.2.34)$$

同样的方法可得

$$q = u - \frac{k(p_{22} - p_{11})}{\sqrt{T^2 - 4\Delta}}, s = \frac{2kp_{21}}{\sqrt{T^2 - 4\Delta}}. \qquad (17.2.35)$$

因而由 $q \geqslant s$ 及(17.2.35)、(17.2.28),亦有

$$\frac{\sqrt{T^2 - 4\Delta}}{1 - \dfrac{\ln \dfrac{T + \sqrt{T^2 - 4\Delta}}{2}}{\ln \sqrt{\Delta}}} \geqslant p_{22} + 2p_{21} - p_{11}. \qquad (17.2.36)$$

综合(17.2.34),(17.2.36),即得(ii)成立.

充分性　设已给次随机矩阵 P 满足(i)、(ii),根据(17.2.28),我们必先取定

$$u = -\frac{1}{2}\ln\Delta, \quad k = \ln\frac{T + \sqrt{T^2 - 4\Delta}}{2\sqrt{\Delta}}.$$

由条件 $T^2 > 4\Delta$,故 $k > 0$,此时有

$$e^{-u} = \sqrt{\Delta}, \quad \mathrm{ch}k = \frac{T}{2\sqrt{\Delta}}, \quad \mathrm{sh}k = \frac{\sqrt{T^2 - 4\Delta}}{2\sqrt{\Delta}}.$$

再按(17.2.33),(17.2.35)取定 p,q,r,s,则可将 P 写成(17.2.22)之形式,显然 r、$s > 0$,又由条件(ii)可得 $p \geqslant r$ 及 $q \geqslant s$,因而 p,q 亦为正,故 p,q,r,s 合于(17.2.2),直接计算可知

$$p + q = 2u,$$

$$u^2 - (pq - rs)$$

$$=u^2-\left[\left(u^2-\frac{k^2(p_{11}-p_{22})^2}{T^2-4\Delta}\right)-\frac{4k^2p_{12}p_{21}}{T^2-4\Delta}\right]$$

$$=\frac{k^2}{T^2-4\Delta}[(p_{11}-p_{22})^2+4p_{12}p_{21}]$$

$$=\frac{k^2}{T^2-4\Delta}[(p_{11}+p_{22})^2-4(p_{11}p_{22}-p_{12}p_{21})]$$

$$=\frac{k^2}{T^2-4\Delta}\cdot(T^2-4\Delta)=k^2.$$

故(17.2.26)亦成立，由表现定理可知，P 确为二维离散骨架.

定理 17.2.3 设已给二阶次随机矩阵 $P=(p_{ij}),i,j\in E$，其迹和行列式分别记为 T 及 Δ，则当 $T^2=4\Delta$ 时，P 为二维离散骨架的充分必要条件是：

(i) $\Delta>0$;

(ii) $p_{11}=p_{22}>0$; (17.2.37)

(iii) $\min(p_{12},p_{21})=0,\max(p_{12},p_{21})\leqslant -p_{11}\ln p_{11}$.

证明 必要性 设 P 为离散骨架，则由表现定理，P 可以写成(17.2.22)的形式，由(17.2.29)立得(i)成立. 由(17.2.28)及条件 $T^2=4\Delta$，得

$$\operatorname{ch}k=\frac{T}{2\sqrt{\Delta}}=1.$$

故 $k=0$ 而(17.2.22)成为(17.2.25)的形式，由 $k=0$，故

$$u^2-(pq-rs)=\left(\frac{p-q}{2}\right)^2+rs=0. \qquad (17.2.38)$$

但 r,s 非负，故(17.2.38)等价于

$$p=q,\quad \min(r,s)=0. \qquad (17.2.39)$$

考察(17.2.25)之对角元，可得

$$p_{11}=p_{22}=e^{-u}>0. \qquad (17.2.40)$$

故得(ii)，且由(17.2.39)，(17.2.40)知

$$p=q=u=-\ln p_{11}=-\ln p_{22}. \qquad (17.2.41)$$

考察(17.2.25)之非对角元，可得

$$p_{12}=re^{-u},\quad p_{21}=se^{-u}. \qquad (17.2.42)$$

故

$$r = \frac{p_{12}}{p_{11}}, \qquad s = \frac{p_{21}}{p_{11}}. \tag{17.2.43}$$

由(17.2.39)得

$$\min(p_{12}, p_{21}) = 0.$$

由 $r \leqslant p, s \leqslant q$ 得

$$\max(p_{12}, p_{21}) \leqslant - p_{11} \ln p_{11}.$$

故(iii)亦成立.

充分性　按(17.2.41),(17.2.42)取定 p,q,r,s,它们显然非负,且由条件(iii)知 $r \leqslant p, s \leqslant q$,故由它们可构成一个 $Q-$ 矩阵.由条件(iii)又得 $\min(r,s) = 0$,故知(17.2.39)成立,因而由(17.2.38)知 $k = 0$,故对于此 $Q-$ 矩阵,离散骨架呈(17.2.25)的形式,易知此时的离散骨架就是所给定的 P.

由(17.2.29)可知,对于任意的二维离散骨架,必有 $T^2 \geqslant 4\Delta$.所以定理 17.2.2 及定理 17.2.3 已给二维离散骨架的特征以完整的刻划,并且由这两条定理的证明还可以得到

定理 17.2.4　设已给二阶次随机矩阵 $P = (p_{ij}), i,j \in E$,其迹和行列式分别为 T 及 Δ,则当 P 是二维离散骨架时,P 的连续扩充必唯一;并且当 $T^2 > 4\Delta$ 时,连续扩充的 $Q-$ 矩阵由

$$\begin{aligned} p &= u - \frac{k(p_{11} - p_{22})}{\sqrt{T^2 - 4\Delta}}, \\ q &= u - \frac{k(p_{22} - p_{11})}{\sqrt{T^2 - 4\Delta}}, \\ r &= \frac{2kp_{12}}{\sqrt{T^2 - 4\Delta}}, \\ s &= \frac{2kp_{21}}{\sqrt{T^2 - 4\Delta}} \end{aligned} \tag{17.2.44}$$

确定;当 $T^2 = 4\Delta$,由

$$\begin{aligned} p &= q = - \ln p_{11}, \\ r &= \frac{p_{12}}{p_{11}}, \end{aligned} \tag{17.2.45}$$

$$s=\frac{p_{21}}{p_{11}}$$

确定.

最后我们指出,对不中断的情形,Q 保守,即 $p=r,q=s$,这时(17.2.22)容易化为

$$P=\begin{pmatrix}1-\frac{p}{p+q}[1-e^{-(p+q)}] & \frac{p}{p+q}[1-e^{-(p+q)}]\\ \frac{q}{p+q}[1-e^{-(p+q)}] & 1-\frac{q}{p+q}[1-e^{-(p+q)}]\end{pmatrix}.$$

(17.2.46)

对于任给的随机矩阵 P,仍以 T 和 $\varDelta$ 记 P 的迹和行列式,则 P 的特征方程为

$$\lambda^2-T\lambda+\varDelta=0. \tag{17.2.47}$$

此时,$\lambda=1$ 为 P 的一个特征值,故由(17.2.47)得

$$T=1+\varDelta. \tag{17.2.48}$$

而

$$T^2-4\varDelta=(1+\varDelta)^2-4\varDelta=(1-\varDelta)^2\geqslant 0.$$

(17.2.49)

当 $T^2-4\varDelta>0$ 时,由于显然有 $\varDelta<1$,故(17.2.31)之左边为

$$\frac{1-\varDelta}{1-\dfrac{\ln\dfrac{(1+\varDelta)+(1-\varDelta)}{2}}{\ln\sqrt{\varDelta}}}=1-\varDelta=2-T.$$

(17.2.50)

而

$$\begin{aligned}p_{11}+2p_{12}-p_{22}&=p_{11}+2(1-p_{11})-p_{22}\\&=2-(p_{11}+p_{22})=2-T,\\p_{22}+2p_{21}-p_{11}&=p_{22}+2(1-p_{22})-p_{11}\\&=2-(p_{11}+p_{22})=2-T,\end{aligned}$$

故(17.2.31)成立等号,即定理17.2.2之条件(ii)自动满足;而当 $T^2-4\varDelta=0$ 时,由(17.2.49),必有 $\varDelta=1$,从而 $T=2$.故这时 P

实为单位矩阵 I，因而可嵌入．综上述可得

推论 17.2.2 任给的二阶随机矩阵 P 为二维离散骨架的充要条件是其行列式 $\Delta > 0$.

§3 三状态不中断离散骨架的表现定理

本节我们将建立三状态不中断离散骨架的表现定理，它是解决三状态不中断齐次 Markov 链的嵌入问题的基础．

设 $E = \{1,2,3\}$，E 上所给的三阶 Q － 矩阵为

$$\begin{pmatrix} -(a+b) & a & b \\ c & -(c+d) & d \\ g & h & -(g+h) \end{pmatrix}, (a,b,c,d,g,h \geqslant 0). \tag{17.3.1}$$

直接计算可知，Q 的同行各元素在行列式 $|Q|$ 中的代数余子式相同，以 A_i 记 $|Q|$ 中第 i 行元素的代数余子式，则

$$\begin{aligned} A_1 &= cg + ch + dg, \\ A_2 &= ag + ah + bh, \\ A_3 &= ad + bc + bd. \end{aligned} \tag{17.3.2}$$

令

$$\begin{aligned} 2u &= a + b + c + d + g + h, \\ V &= A_1 + A_2 + A_3. \end{aligned} \tag{17.3.3}$$

记(17.3.1)所对应的 Q 过程为 $R_\lambda = (r_{ij}(\lambda); i,j \in E)$. 由第三章中的分解定理可得

$$R_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Phi(\lambda) \end{pmatrix} + r_{11}(\lambda)\begin{pmatrix} 1 \\ \xi(\lambda) \end{pmatrix}(1 \quad \eta(\lambda)). \tag{17.3.4}$$

其中 $\Phi(\lambda) = (\Phi_{ij}(\lambda); i,j \in \{1,2\})$ 是由

$$Q_1 = \begin{pmatrix} -(c+d) & d \\ h & -(g+h) \end{pmatrix}$$

所决定的 Q_1 过程，$\eta(\lambda)$ 和 $\xi(\lambda)$ 是关于 $\Phi(\lambda)$ 的行协调族和列协调族，且

$$\alpha = \lim_{\lambda\to\infty}\lambda\eta(\lambda) = (a,b),$$
$$\beta = \lim_{\lambda\to\infty}\lambda\xi(\lambda) = (c,g)^T. \tag{17.3.5}$$

而

$$r_{11}(\lambda) = [\lambda + \lambda\eta(\lambda)\mathbf{1}]^{-1}, \tag{17.3.6}$$

在 §2 中我们已求出二阶 Q 过程的表达式，根据那里的结果，我们有

$$\varphi_{11}(\lambda) = \frac{\lambda + (g+h)}{D},$$
$$\varphi_{12}(\lambda) = \frac{d}{D},$$
$$\varphi_{21}(\lambda) = \frac{h}{D}, \tag{17.3.7}$$
$$\varphi_{22}(\lambda) = \frac{\lambda + (c+d)}{D}.$$

其中

$$D = [\lambda + \frac{1}{2}(c+d+g+h)]^2$$
$$- [\frac{1}{4}(c+d+g+h)^2 - A_1]. \tag{17.3.8}$$

由 Q 有限及协调族表现定理，

$$\eta(\lambda) = \alpha\Phi(\lambda) = (a,b)\Phi(\lambda), \tag{17.3.9}$$

因而由(17.3.6)可求得

$$r_{11}(\lambda) = \frac{\lambda^2 + (c+d+g+h)\lambda + A_1}{\lambda(\lambda^2 + 2u\lambda + V)}. \tag{17.3.10}$$

由此又可求得

$$r_{12}(\lambda) = r_{11}(\lambda)\eta_1(\lambda) = \frac{a\lambda + A_2}{\lambda(\lambda^2 + 2u\lambda + V)}, \tag{17.3.11}$$

$$r_{13}(\lambda) = r_{11}(\lambda)\eta_2(\lambda) = \frac{b\lambda + A_3}{\lambda(\lambda^2 + 2u\lambda + V)}. \tag{17.3.12}$$

(17.3.10)，(17.3.11)，(17.3.12) 组成 R_λ 的第一行，然后由轮换性可得

$$r_{21}(\lambda) = \frac{c\lambda + A_1}{\lambda(\lambda^2 + 2u\lambda + V)},$$

$$r_{22}(\lambda) = \frac{\lambda^2 + (a + b + g + h)\lambda + A_2}{\lambda(\lambda^2 + 2u\lambda + V)},$$

$$r_{23}(\lambda) = \frac{d\lambda + A_3}{\lambda(\lambda^2 + 2u\lambda + V)}, \qquad (17.3.13)$$

$$r_{31}(\lambda) = \frac{g\lambda + A_1}{\lambda(\lambda^2 + 2u\lambda + V)},$$

$$r_{32}(\lambda) = \frac{h\lambda + A_2}{\lambda(\lambda^2 + 2u\lambda + V)},$$

$$r_{33}(\lambda) = \frac{\lambda^2 + (a + b + c + d)\lambda + A_3}{\lambda(\lambda^2 + 2u\lambda + V)}.$$

故我们已求出 Q－予解式 R_λ.

对于任给的 Q－矩阵 Q 及其由(17.3.3)定义的 u,V,若有 $u^2=V$ 或 $u^2<V$ 或 $u^2>V$,则分别称 Q 为抛物型或椭圆型或双曲型的,亦称 Q 所对应的转移函数 $P(t)$ 及离散骨架 $P(1)$ 与 Q 有相同的类型,在各种情形下对 R_λ 进行反演可得转移函数 $P(t)$,然后取 $t=1$,即得下面的三阶离散骨架的表现定理.

定理 17.3.1　设三阶 Q－矩阵 Q 如(17.3.1)给定,A_1,A_2,A_3,u,V 由(17.3.2),(17.3.3)定义,并记 $k^2=|u^2-V|$,则其对应的 Q 过程的离散骨架 P 具有以下形式:

$$P = \begin{pmatrix} 1-(a+b)\sigma-(A_2+A_3)\tau & a\sigma-A_2\tau & b\sigma-A_3\tau \\ c\sigma+A_1\tau & 1-(c+d)\sigma-(A_1+A_3)\tau & d\sigma+A_3\tau \\ g\sigma+A_1\tau & h\sigma+A_2\tau & 1-(g+h)\sigma-(A_1+A_2)\tau \end{pmatrix}. \qquad (17.3.14)$$

其中的 σ、τ 依下列方式确定:

当 Q 为抛物型时,

$$\sigma = e^{-u}, \qquad \tau = \frac{1}{V}[1 - e^{-u}(1 + u)]. \qquad (17.3.15)$$

当 Q 为椭圆型时,

$$\sigma = \frac{\sin k}{k}e^{-u}, \quad \tau = \frac{1}{V}\left[1 - e^{-u}\left(\cos k + \frac{u}{k}\sin k\right)\right].$$

(17.3.16)

当 Q 为双曲型时，

若 $V \neq 0$，则

$$\sigma = \frac{\operatorname{sh} k}{k}e^{-u}, \quad \tau = \frac{1}{V}\left[1 - e^{-u}\left(\operatorname{ch} k + \frac{u}{k}\operatorname{sh} k\right)\right].$$

(17.3.17)

若 $V = 0$，则

$$\sigma = \frac{1}{2u}(1 - e^{-2u}), \qquad \tau = 0. \tag{17.3.18}$$

设 P 的迹为 T，行列式为 $\varDelta$，直接计算可得以下

推论 17.3.1

(i) 在各种情形下，均有 $\varDelta = e^{-2u}$，从而有 $\varDelta > 0$，

(ii) 当 P 为抛物型或椭圆型或双曲型离散骨架时，分别有

$$T = 1 + 2e^{-u} = 1 + 2\sqrt{\varDelta},$$

$$T = 1 + 2e^{-u}\cos k = 1 + 2\sqrt{\varDelta}\cos k, \tag{17.3.19}$$

$$T = 1 + 2e^{-u}\operatorname{ch} k = 1 + 2\sqrt{\varDelta}\operatorname{ch} k.$$

故若令 $\omega = \dfrac{(T-1)}{2\sqrt{\varDelta}}$，则对于三种类型的离散骨架，分别有

$$\omega = 1; \quad |\omega| \leqslant 1; \quad |\omega| > 1. \tag{17.3.20}$$

若三阶随机矩阵具有

$$P = \begin{pmatrix} 1-(y+z) & y & z \\ x & 1-(x+z) & z \\ x & y & 1-(x+y) \end{pmatrix} \tag{17.3.21}$$

的形式，则称 P 为退化的. 如果一个三阶离散骨架所对应 $\sigma = 0$，则它必是一个退化的三阶随机矩阵，故在非退化情况下恒有 $\sigma \neq 0$. 这时，(17.3.16) 中的 $\sin k \neq 0$ 而 $|\cos k| \neq 1$. 相应地有 $|\omega| < 1$，即 (17.3.20) 中的三个关系式互相排斥，因而在这种情形下，一个三

阶随机矩阵不能同时成为不同类型的离散骨架.

对于双曲型离散骨架的讨论,我们还需要下面的

引理 17.3.1 对任意三阶随机矩阵 P,恒有 $2+\Delta-T\geqslant 0$;而对任意三阶离散骨架 P,上式中等号成立的充要条件是:或者 $P=I$(单位矩阵);或者 P 为双曲型骨架且其对应的 Q — 矩阵满足 $u=k>0$ 因而 $V=0$.

证明 引理的前一部分乃众所周知,故只证后一论断.设 P 为三阶离散骨架,$2+\Delta-T=0$ 等价于 $T-1=1+\Delta$.但 $T-1=1+\Delta\geqslant 2\sqrt{\Delta}$,等号成立的充要条件为 $\Delta=1$,故 $T=3$,因而 $P=I$;否则 $\Delta<1$,故 $T-1>2\sqrt{\Delta}$,即 P 为双曲型的,再由

$$1+\Delta=T-1=2e^{-u}\operatorname{ch}k\leqslant 2e^{-u}\operatorname{ch}u=1+e^{-2u}=1+\Delta,$$

故上式全部成立等号,因而必有 $k=u>0$.

称双曲型三阶离散骨架为正则的,如果 $V\neq 0$,或等价地,$2+\Delta-T>0$;否则称为非正则的.

§4 三状态有势 Q 过程的离散骨架

本节我们在 Q 保守.P 非退化的情形下讨论三状态有势 Q 过程的离散骨架,给出这类嵌入问题的完整的解答.

称数列 (π_i) 为一个正分布,若满足

$$\pi_i>0,\qquad \sum_i\pi_i=1,\tag{17.4.1}$$

称矩阵 $A=(a_{ij})$ 可配称,若存在正分布 (π_i),使对于任意 i,j,均有

$$\pi_i a_{ij}=\pi_j a_{ji}.\tag{17.4.2}$$

这时,称 (π_i) 为 A 的配称列.称 Q 过程 $P(t)$ 为有势 Q 过程,若存在正分布 (π_i),使对于任意 i,j,及 $t\geqslant 0$,均有

$$\pi_i p_{ij}(t)=\pi_j p_{ji}(t).\tag{17.4.3}$$

这时,称 (π_i) 为 $P(t)$ 的配称列.

熟知，$P(t)$ 为有势 Q 过程，当且仅当 Q 可配称，此时 $P(t)$ 的离散骨架 $P(1)$ 亦可配称，并且 Q、$P(t)$、$P(1)$ 有相同的配称列. 反之，任给一个三阶可配称随机矩阵 P，试问：P 为有势 Q 过程的离散骨架的充要条件是什么？又当 P 成为有势 Q 过程的离散骨架时，如何由 P 决定 Q？这些正是本节我们将要作出回答的问题.

设三阶随机矩阵 P 可配称，其配称列为 $(\pi_i; i \in E)$，则 P 可写为

$$P = \begin{pmatrix} 1 - a - \frac{\pi_3}{\pi_1}b & a & \frac{\pi_2}{\pi_1}b \\ \frac{\pi_1}{\pi_2}a & 1 - \frac{\pi_1}{\pi_2}a - c & c \\ b & \frac{\pi_2}{\pi_3}c & 1 - b - \frac{\pi_2}{\pi_3}c \end{pmatrix}. \tag{17.4.4}$$

若 P 为有势 Q 过程的离散骨架，则存在 Q — 矩阵 Q 使 P 写成(17.3.14) 的形式，此时 Q 亦可配称且其配称列与 P 相同，因而

$$Q = \begin{pmatrix} -\left(x + \frac{\pi_3}{\pi_1}y\right) & x & \frac{\pi_3}{\pi_1}y \\ \frac{\pi_1}{\pi_2}x & -\left(\frac{\pi_1}{\pi_2}x + z\right) & z \\ y & \frac{\pi_2}{\pi_3}z & -\left(y + \frac{\pi_2}{\pi_3}z\right) \end{pmatrix}. \tag{17.4.5}$$

由(17.3.14)，P 可写成

$$P = \begin{pmatrix} 1 - \left(x + \frac{\pi_3}{\pi_1}y\right)\sigma - (A_2 - A_3)\tau & x\sigma + A_2\tau & \frac{\pi_3}{\pi_1}y\sigma + A_3\tau \\ \frac{\pi_1}{\pi_2}x\sigma + A_1\tau & 1 - \left(\frac{\pi_1}{\pi_2}x + z\right)\sigma - (A_1 + A_3)\tau & z\sigma + A_3\tau \\ y\sigma + A_1\tau & \frac{\pi_2}{\pi_3}z\sigma - A_2\tau & 1 - \left(y + \frac{\pi_2}{\pi_3}z\right)\sigma - (A_1 + A_2)\tau \end{pmatrix}. \tag{17.4.6}$$

由(17.4.6) 及 P 可配称，可知

$$\pi_2 A_1 = \pi_1 A_2, \qquad \pi_3 A_1 = \pi_1 A_3, \qquad \pi_3 A_2 = \pi_2 A_3. \tag{17.4.7}$$

比较(17.4.4)与(17.4.6),易知

$$\begin{cases}\dfrac{\pi_3}{\pi_1}y - z = \dfrac{1}{\sigma}(\dfrac{\pi_3}{\pi_1}b - c) \\ x - \dfrac{\pi_2}{\pi_3}z = \dfrac{1}{\sigma}(a - \dfrac{\pi_2}{\pi_3}c) \\ x + y + z = \dfrac{1}{\sigma}(a + b + c - V\tau). \end{cases} \tag{17.4.8}$$

视(17.4.8)为关于 x, y, z 的线性方程组,则可解出

$$x = \frac{(a - \pi_2 V\tau)}{\sigma}, \quad y = \frac{(b - \pi_1 V\tau)}{\sigma}, \quad x = \frac{(c - \pi_3 V\tau)}{\sigma}. \tag{17.4.9}$$

$V\tau$ 的值依 Q 的不同类型而由(17.3.15)~(17.3.18)给出,注意到 x, y, z 的非负性,应有

$$\frac{a}{\sigma} \geqslant \frac{\pi_2 V\tau}{\sigma}, \quad \frac{b}{\sigma} \geqslant \frac{\pi_1 V\tau}{\sigma}, \quad \frac{c}{\sigma} \geqslant \frac{\pi_3 V\tau}{\sigma}. \tag{17.4.10}$$

下面我们给出各种类型的三阶有势 Q 过程的离散骨架的判定准则,在所述的各定理中,P 均表示由(17.4.4)所给的三阶可配称随机矩阵,其配称列为 (π_i),仍以 T 及 $\varDelta$ 表 P 的迹及行列式.

定理 17.4.1 P 为抛物型三阶有势 Q 过程的离散骨架的充要条件是:

(i) $\varDelta > 0$;

(ii) $T - 1 = 2\sqrt{\varDelta}$;

(iii) $a \geqslant \pi_2[1 - \sqrt{\varDelta}(1 - \ln\sqrt{\varDelta})]$,

$b \geqslant \pi_1[1 - \sqrt{\varDelta}(1 - \ln\sqrt{\varDelta})]$,

$c \geqslant \pi_3[1 - \sqrt{\varDelta}(1 - \ln\sqrt{\varDelta})]$.

证明 必要性 (i),(ii)由§3中推论可得,往证(iii).

当 Q 为抛物型时,由 $\varDelta = e^{-2u}$,故 $u = -\ln\sqrt{\varDelta}$.

由(17.3.15)

$$\begin{aligned}\sigma &= e^{-u} = \sqrt{\varDelta}, \\ \tau V &= 1 - e^{-u}(1 + u) \\ &= 1 - \sqrt{\varDelta}(1 - \ln\sqrt{\varDelta}).\end{aligned} \tag{17.4.11}$$

故由(17.4.10)可得(iii).

充分性　由(i)知 $\varDelta>0$,故可按(17.4.11)取定 σ 及 $V\tau$,然后按(17.4.9)取定 x,y,z,由(iii)知 x,y,z,均非负,故可按(17.4.5)构成可配称 Q — 矩阵,对此 Q — 矩阵,我们有

$$
\begin{aligned}
& x+y+z+\frac{\pi_1}{\pi_2}x+\frac{\pi_2}{\pi_3}z+\frac{\pi_3}{\pi_1}y \\
&=\frac{1}{\sigma}(a+b+c-V\tau+\frac{\pi_1}{\pi_2}a+\frac{\pi_2}{\pi_3}c+\frac{\pi_3}{\pi_1}b-V\tau) \\
&=\frac{1}{\sqrt{\varDelta}}[3-T-2(1-\sqrt{\varDelta}(1-\ln\sqrt{\varDelta}))] \\
&=\frac{1}{\sqrt{\varDelta}}[3-1-2\sqrt{\varDelta}-2(1-\sqrt{\varDelta}(1-\ln\sqrt{\varDelta}))] \\
&=-2\ln\sqrt{\varDelta}=2u.
\end{aligned}
$$

故由(17.3.3)确定的 u 与我们所取的 u 一致,又对于我们构造的 Q — 矩阵,容易算出

$$
\begin{aligned}
& A_1+A_2+A_3 \\
&=A_1+\frac{\pi_2}{\pi_1}A_1+\frac{\pi_3}{\pi_1}A_1=\frac{1}{\pi_1}A_1 \\
&=\frac{1}{\pi_1}(\frac{\pi_1}{\pi_2}xy+\frac{\pi_1}{\pi_3}xz+yz) \\
&=\frac{1}{\sigma^2}\Big[\frac{1}{\pi_2}(a-\pi_2V\tau)(b-\pi_1V\tau) \\
&\quad+\frac{1}{\pi_3}(a-\pi_2V\tau)(c-\pi_3V\tau)+\frac{1}{\pi_1}(b-\pi_1V\tau)(c-\pi_3V\tau)\Big] \\
&=\frac{1}{\sigma^2}\Big[\Big(\frac{1}{\pi_2}ab+\frac{1}{\pi_3}ac+\frac{1}{\pi_1}bc\Big)+V^2\tau^2-\Big(\Big(1+\frac{\pi_1}{\pi_2}\Big)a \\
&\quad+(1+\frac{\pi_3}{\pi_1})b+(1+\frac{\pi_2}{\pi_3})c)V\tau\Big].
\end{aligned}
$$

但可直接求出

$$
\varDelta=1-[(1+\frac{\pi_1}{\pi_2})a+(1+\frac{\pi_3}{\pi_1})b+(1+\frac{\pi_2}{\pi_3})c]
$$

$$+(\frac{1}{\pi_2}ab+\frac{1}{\pi_3}ac+\frac{1}{\pi_1}bc)$$

$$=1-(3-T)+(\frac{1}{\pi_2}ab+\frac{1}{\pi_3}ac+\frac{1}{\pi_1}bc).$$

故知

$$\frac{1}{\pi_2}ab+\frac{1}{\pi_3}ac+\frac{1}{\pi_1}bc=2+\varDelta-T.$$

代入得

$$\begin{aligned}
&A_1+A_2+A_3\\
&=\frac{1}{\sigma^2}[2+\varDelta-T+V\tau(V\tau-3+T)]\\
&=\frac{1}{\varDelta}[\varDelta-2\sqrt{\varDelta}+1+(1-\sqrt{\varDelta}+\sqrt{\varDelta}\ln\sqrt{\varDelta})\\
&\quad\times(1-\sqrt{\varDelta}+\sqrt{\varDelta}\ln\sqrt{\varDelta}+2\sqrt{\varDelta}-2)]\\
&=\frac{1}{\varDelta}[(\sqrt{\varDelta}-1)^2+(\sqrt{\varDelta}\ln\sqrt{\varDelta}+1-\sqrt{\varDelta})\\
&\quad\times(\sqrt{\varDelta}\ln\sqrt{\varDelta}-1+\sqrt{\varDelta})]\\
&=\frac{1}{\varDelta}[(\sqrt{\varDelta}-1)^2+\varDelta\ln^2\sqrt{\varDelta}-(\sqrt{\varDelta}-1)^2]\\
&=\ln^2\sqrt{\varDelta}=u^2.
\end{aligned}$$

故我们所构造的 Q 为抛物型的，其对应的 Q 过程的离散骨架由(17.4.6)给出，其中的 σ、τ 由(17.3.15)确定，因而 σ 及 τV 与我们所取定的一致，验算可知

$$x\sigma+A_2\tau=(a-\pi_2V\tau)+\pi_2V\tau=a.$$

其余元素亦可用样的方式验证，故(17.4.6)即为(17.4.4)所给的 P，所以 P 确为三阶抛物型有势 Q 过程的离散骨架.

推论 17.4.1 当条件(i)～(iii)成立时，P 作为三阶抛物型有势 Q 过程的离散骨架有唯一的连续扩充，且此连续扩充的 Q－矩阵由(17.4.5)给出，其中

$$x=\frac{1}{\sqrt{\varDelta}}[a-\pi_2(1-\sqrt{\varDelta}+\sqrt{\varDelta}\ln\sqrt{\varDelta})],$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{\varDelta}}[b-\pi_1(1-\sqrt{\varDelta}+\sqrt{\varDelta}\ln\sqrt{\varDelta})] \quad (17.4.12)$$

$$z=\frac{1}{\sqrt{\varDelta}}[c-\pi_3(1-\sqrt{\varDelta}+\sqrt{\varDelta}\ln\sqrt{\varDelta})].$$

证明 由定理 17.2.2 的证明立得.

定理 17.4.2 设 P 满足条件 $2+\varDelta-T>0$,则 P 为双曲型三阶有势 Q 过程的离散骨架的充要条件是

(i) $\varDelta>0$;

(ii) $T-1>2\sqrt{\varDelta}$;

(iii)

$$a\geqslant\frac{1}{2}\pi_2\left\{3-T+\frac{\ln\sqrt{\varDelta}\sqrt{(T-1)^2-4\varDelta}}{\ln[\frac{1}{2\sqrt{\varDelta}}((T-1)+\sqrt{(T-1)^2-4\varDelta})]}\right\},$$

$$b\geqslant\frac{1}{2}\pi_1\left\{3-T+\frac{\ln\sqrt{\varDelta}\sqrt{(T-1)^2-4\varDelta}}{\ln[\frac{1}{2\sqrt{\varDelta}}((T-1)+\sqrt{(T-1)^2-4\varDelta})]}\right\},$$

$$c\geqslant\frac{1}{2}\pi_3\left\{3-T+\frac{\ln\sqrt{\varDelta}\sqrt{(T-1)^2-4\varDelta}}{\ln[\frac{1}{2\sqrt{\varDelta}}((T-1)+\sqrt{(T-1)^2-4\varDelta})]}\right\}.$$

证明 必要性 (i),(ii) 由推论 17.3.1 立得,由已给条件 $2+\varDelta-T>0$,又当 Q 为双曲型时有 $\angle=e^{-2u}$,$T-1=2\sqrt{\varDelta}\,\mathrm{ch}k$,故

$$u=-\frac{1}{2}\ln\varDelta,\quad \mathrm{ch}k=\frac{T-1}{2\sqrt{\varDelta}},$$

$$\mathrm{sh}k=\frac{\sqrt{(T-1)^2-4\varDelta}}{2\sqrt{\varDelta}},$$

$$k=\ln[\frac{1}{2\sqrt{\varDelta}}((T-1)+\sqrt{(T-1)^2-4\varDelta})]. \quad (17.4.13)$$

由(17.3.17)

$$\sigma = \frac{\mathrm{sh}k}{k}e^{-u} = \frac{\sqrt{(T-1)^2 - 4\Delta}}{2\ln\left[\frac{1}{2\sqrt{\Delta}}((T-1) + \sqrt{(T-1)^2 - 4\Delta})\right]},$$

$$V\tau = 1 - e^{-u}(\mathrm{ch}k + \frac{u}{k}\mathrm{sh}k)$$

$$= 1 - \frac{T-1}{2} + \frac{(\ln\sqrt{\Delta})\sqrt{(T-1)^2 - 4\Delta}}{2\ln[\frac{1}{2\sqrt{\Delta}}((T-1) + \sqrt{(T-1)^2 - 4\Delta})]}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{3 - T + \frac{(\ln\sqrt{\Delta})\sqrt{(T-1)^2 - 4\Delta}}{\ln[\frac{1}{2\sqrt{\Delta}}((T-1) + \sqrt{(T-1)^2 - 4\Delta})]}\right\}. \tag{17.4.14}$$

故由(17.4.10)得(iii).

充分性　由 $\Delta > 0$,故取 $u = -\ln\sqrt{\Delta}$,又 $T - 1 > 2\sqrt{\Delta}$,故取 $k > 0$ 使 $\mathrm{ch}k = \frac{T-1}{2\sqrt{\Delta}}$,然后按(17.4.14)取定 σ 及 $V\tau$,按(17.4.9)取定 x,y,z,由(iii)知 x,y,z 均非负,故可按(17.4.5)构成可配称 Q — 矩阵.对此 Q — 矩阵,我们有

$$x + y + z + \frac{\pi_1}{\pi_2}x + \frac{\pi_2}{\pi_3}z + \frac{\pi_3}{\pi_1}y$$

$$= \frac{1}{\sigma}(3 - T - 2V\tau)$$

$$= (\frac{\mathrm{sh}k}{k}e^{-u})^{-1}[3 - 1 - 2e^{-u}\mathrm{ch}k - 2(1 - e^{-u}(\mathrm{ch}k + \frac{u}{k}\mathrm{sh}k))]$$

$$= \frac{k}{\mathrm{sh}k}(-2\mathrm{ch}k + 2(\mathrm{ch}k + \frac{u}{k}\mathrm{sh}k)) = 2u,$$

又

$$A_1 + A_2 + A_3 = A_1 + \frac{\pi_2}{\pi_1}A_1 + \frac{\pi_3}{\pi_1}A_1$$

$$= \frac{1}{\pi_1}A_1 = \frac{1}{\pi_1}(\frac{\pi_1}{\pi_2}xy + \frac{\pi_1}{\pi_3}xz + yz)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}[\frac{1}{\pi_2}(a - \pi_2V\tau)(b - \pi_1V\tau)$$

$$+\frac{1}{\pi_3}(a-\pi_2 V\tau)(c-\pi_3 V\tau)$$

$$+\frac{1}{\pi_1}(b-\pi_1 V\tau)(c-\pi_3 V\tau)]$$

$$=\frac{1}{\sigma^2}[(\frac{1}{\pi_2}ab+\frac{1}{\pi_3}ac+\frac{1}{\pi_1}bc)+V^2\tau^2$$

$$-((1+\frac{\pi_1}{\pi_2})a+(1+\frac{\pi_3}{\pi_1})b+(1+\frac{\pi_2}{\pi_3})c)V\tau].$$

但直接计算可知

$$\varDelta=1-[(1+\frac{\pi_1}{\pi_2})a+(1+\frac{\pi_3}{\pi_1})b+(1+\frac{\pi_2}{\pi_3})c]$$

$$+(\frac{ab}{\pi_2}+\frac{ac}{\pi_3}+\frac{bc}{\pi_1})$$

$$=1-(3-T)+(\frac{ab}{\pi_2}+\frac{ac}{\pi_3}+\frac{bc}{\pi_1})$$

$$=T-2+(\frac{ab}{\pi_2}+\frac{ac}{\pi_3}+\frac{bc}{\pi_1}),$$

故

$$\frac{ab}{\pi_2}+\frac{ac}{\pi_3}+\frac{bc}{\pi_1}=2+\varDelta-T.$$

代入前面的式子，得

$$A_1+A_2+A_3$$

$$=\frac{1}{\sigma^2}[2+\varDelta-T+V\tau(V\tau-3+T)]$$

$$=\frac{1}{\sigma^2}[2+\varDelta-T+(1-e^{-u}(\operatorname{ch}k+\frac{u}{k}\operatorname{sh}k))$$

$$\times(1-e^{-u}(\operatorname{ch}k+\frac{u}{k}\operatorname{sh}k)-2+2e^{-u}\operatorname{ch}k)]$$

$$=\frac{1}{\sigma^2}[2+\varDelta-T+(1-e^{-u}\operatorname{ch}k-\frac{u}{k}e^{-u}\operatorname{sh}k)$$

$$\times(-1+e^{-u}\operatorname{ch}k-\frac{u}{k}e^{-u}\operatorname{sh}k)]$$

$$=\frac{1}{\sigma^2}[2+\varDelta-T+\frac{u^2}{k^2}e^{-2u}\operatorname{sh}^2k-1+2e^{-u}\operatorname{ch}k-e^{-2u}\operatorname{ch}^2k]$$

$$=\frac{1}{\sigma^2}[\Delta+\frac{u^2}{k^2}e^{-2u}\operatorname{sh}^2k-e^{-2u}\operatorname{sh}^2k-e^{-2u}]$$

$$=\frac{k^2}{\operatorname{sh}^2k}(\frac{u^2}{k^2}e^{-2u}\operatorname{sh}^2k-e^{-2u}\operatorname{sh}^2k)e^{2u}$$

$$=u^2-k^2.$$

故我们构造的 $Q-$ 矩阵为双曲型的，并且我们所取的 u,k 与这个 $Q-$ 矩阵按(17.3.3)及 $u^2-k^2=A_1+A_2+A_3,k>0$ 所定义的 u,k 一致. 又由 $2+\Delta-T>0$，易知 $u\neq k$ 因而 $A_1+A_2+A_3>0$，故对此 $Q-$ 矩阵，σ 及 $V\tau$ 应按(17.3.17)定义，并且与我们所取的 σ 及 $V\tau$ 一致，直接计算得

$$x\sigma+A_2\tau=(a-\pi_2V\tau)+\pi_2V\tau=a.$$

同样可验证其余元素，故知(17.4.6)即由(17.4.4)所给的 P，因而 P 确为双曲型三阶有势 Q 过程的离散骨架.

由定理 17.4.2 的证明可得如下的

推论 17.4.2 设对于满足条件 $2+\Delta-T>0$ 的三阶可配称随机矩阵 P，(i)～(iii)成立，则 P 作为双曲型三阶有势 Q 过程的离散骨架有唯一的连续扩充，且此连续扩充的 $Q-$ 矩阵由(17.4.5)给出，其中的 x,y,z 由(17.4.9)及(17.4.14)确定.

定理 17.4.3 若 P 满足 $2+\Delta-T=0$，则 P 为双曲型有势 Q 过程的离散骨架的充要条件是 $\Delta>0$，此时 P 作为这种类型的离散骨架必有唯一的连续扩充，其连续扩充的 $Q-$ 矩阵由(17.4.5)给出，其中

$$x=\frac{a\ln\Delta}{\Delta-1},\qquad y=\frac{b\ln\Delta}{\Delta-1},\qquad z=\frac{c\ln\Delta}{\Delta-1}.\tag{17.4.15}$$

证明 必要性明显，往证充分性.

由 $\Delta>0$，取 $u=-\ln\sqrt{\Delta}$，由 $2+\Delta-T=0$，若 $\Delta=1$，则 $T=3$ 而 $P=I$，但我们已约定 P 非退化，故有 $\Delta<1$. 再取

$$\sigma=\frac{1}{2u}(1-e^{-2u})=\frac{(\Delta-1)}{\ln\Delta}.$$

令 x、y、z 如(17.4.15)所示，则 x、y、z 均非负，因而可按(17.4.5)构

成 Q — 矩阵. 对此 Q — 矩阵，我们有

$$x + y + z + \frac{\pi_1}{\pi_2}x + \frac{\pi_2}{\pi_3}z + \frac{\pi_3}{\pi_1}y$$

$$= \frac{1}{\sigma}(a + b + c + \frac{\pi_1}{\pi_2}a + \frac{\pi_2}{\pi_3}c + \frac{\pi_3}{\pi_1}b)$$

$$= \frac{\ln \Delta}{\Delta - 1}(3 - T)$$

$$= \frac{\ln \Delta}{\Delta - 1}(1 - \Delta) = -\ln\Delta = 2u.$$

故(17.3.3)所定义的 u 与我们所取的 u 一致，又可算得

$$A_1 + A_2 + A_3 = \frac{A_1}{\pi_1} = \frac{1}{\pi_1}(\frac{\pi_1}{\pi_2}xy + \frac{\pi_1}{\pi_3}xz + yz)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}(\frac{ab}{\pi_2} + \frac{ac}{\pi_3} + \frac{bc}{\pi_1}),$$

但我们曾经求出

$$\Delta = T - 2 + (\frac{ab}{\pi_2} + \frac{ac}{\pi_3} + \frac{bc}{\pi_1}).$$

故由 $2 + \Delta - T = 0$ 可知 $A_1 + A_2 + A_3 = 0$. 因而我们所构造的 Q — 矩阵为双曲型且其 σ、τ 由(17.3.18)确定，故与我们所取的 σ 一致，容易验证

$$x\sigma = a, \quad y\sigma = b, \quad z\sigma = c.$$

故由(17.4.6)按(17.3.18)而得到的离散骨架与 P 一致，即 P 确为三阶双曲型有势 Q 过程的离散骨架.

完全类似地，我们可以得到 P 成为三阶椭圆型有势 Q 过程的离散骨架的判定准则，即如下的

定理 17.4.4 P 成为三阶椭圆型有势 Q 过程的离散骨架的充要条件是

(i) $\Delta > 0$;

(ii) $T - 1 < 2\sqrt{\Delta}$;

(iii) 存在 k，使 $\cos k = \dfrac{T-1}{2\sqrt{\Delta}}$，并且

$$\begin{cases} \dfrac{k}{\sqrt{\Delta}\sin k}\left[a - \pi_2\left(1 - \sqrt{\Delta}\cos k + \dfrac{\sqrt{\Delta}\ln\sqrt{\Delta}}{k}\sin k\right)\right] \geqslant 0, \\ \dfrac{k}{\sqrt{\Delta}\sin k}\left[b - \pi_1\left(1 - \sqrt{\Delta}\cos k + \dfrac{\sqrt{\Delta}\ln\sqrt{\Delta}}{k}\sin k\right)\right] \geqslant 0, \\ \dfrac{k}{\sqrt{\Delta}\sin k}\left[c - \pi_3\left(1 - \sqrt{\Delta}\cos k + \dfrac{\sqrt{\Delta}\ln\sqrt{\Delta}}{k}\sin k\right)\right] \geqslant 0 \end{cases} \tag{17.4.16}$$

同时成立，当条件(i)～(iii)成立时，对每个适合于(17.4.16)的k，P作为三阶椭圆型有势Q过程的离散骨架，其连续扩充的Q－矩阵由(17.4.5)给出，其中的x、y、z依次取(17.4.16)左端的值.

定理17.4.4所给的准则不如定理17.4.1～定理17.4.3简洁明了，因为其中含有参数k. 但实际上更加细致的讨论完全可以消去参数k而得到直接由P的元素来表达的准则，详情参见§7.

§5　三状态可中断齐次 Markov 链的嵌入问题：退化情形

设已给三阶退化随机矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 1-(y+z) & y & z \\ x & 1-(x+z) & z \\ x & y & 1-(x+y) \end{pmatrix}. \tag{17.5.1}$$

直接计算可得

$$T = 3 - 2(x+y+z). \tag{17.5.2}$$

$$\Delta = [1-(x+y+z)]^2,$$

$$\sqrt{\Delta} = |1-(x+y+z)|. \tag{17.5.3}$$

若P为离散骨架，则$\Delta > 0$，因而$x+y+z \neq 1$，又由

$$T - 1 = 2[1-(x+y+z)], \tag{17.5.4}$$

故

$$|\omega| = \frac{|T-1|}{2\sqrt{\Delta}} = \left|\frac{T-1}{2[1-(x+y+z)]}\right| = 1. \tag{17.5.5}$$

因而 P 不能为双曲型离散骨架，故我们只要考虑 P 的抛物型及椭圆型嵌入.

对于抛物型嵌入，我们有

定理 17.5.1 形如(17.5.1)的三阶退化随机矩阵 P 成为抛物型离散骨架的充要条件是

$$0 \leqslant x+y+z < 1. \tag{17.5.6}$$

此时，P 有唯一的抛物型连续扩充，连续扩充的 $Q-$ 矩阵由(17.3.1)给出，其中当 $x+y+z=0$ 时，Q 为零矩阵；当 $x+y+z \neq 0$ 时，

$$\begin{aligned} a = h &= -\frac{y}{x+y+z}\ln[1-(x+y+z)], \\ b = d &= -\frac{z}{x+y+z}\ln[1-(x+y+z)], \\ c = g &= -\frac{x}{x+y+z}\ln[1-(x+y+z)]. \end{aligned} \tag{17.5.7}$$

证明 设 P 已给出如(17.5.1)，若 P 为抛物型离散骨架，则由 $T = 1 + 2\sqrt{\Delta}$ 及 $\Delta > 0$，可知 $T > 1$，从而由(17.5.2)，(17.5.3)可得(17.5.7). 反之，设已知(17.5.7)成立，则由(17.5.3)可知

$$\sqrt{\Delta} = 1-(x+y+z). \tag{17.5.8}$$

这时，对于所给的 P，若 $x+y+z=0$，则 P 为单位矩阵，显然可嵌入三个状态均为吸收状态的Markov链，其连续扩充即 $P(t) \equiv I$，对应的 $Q-$ 矩阵为零矩阵. 而零矩阵恰为抛物型的. 当 $x+y+z \neq 0$ 时，取 $u = -\frac{1}{2}\ln\Delta = -\ln[1-(x+y+z)]$，再按(17.3.15)取定 σ 及 τ(注意此处的 u、σ 及 τ 均由 P 所决定)，由§3可知，P 为抛物型离散骨架，当且仅当存在抛物型 $Q-$ 矩阵(17.3.1)，使 P 写成(17.3.14)的形式，其中的 σ 及 τ 由(17.3.15)给出，但 $-2u$ 表示

Q 的迹. 比较(17.5.1) 与(18.3.14) 可得

$$\begin{aligned} x &= c\sigma + A_1\tau = g\sigma + A_1\tau, \\ y &= a\sigma + A_2\tau = h\sigma + A_2\tau, \\ z &= b\sigma + A_3\tau = d\sigma + A_3\tau. \end{aligned} \qquad (17.5.9)$$

由于 $\sigma = e^{-u} > 0$,故有

$$a = h, \qquad b = d, \qquad c = g. \qquad (17.5.10)$$

由(17.3.2) 知,此时

$$\begin{aligned} A_1 &= c(a + b + c), \\ A_2 &= a(a + b + c), \\ A_3 &= b(a + b + c). \end{aligned} \qquad (17.5.11)$$

但由(17.3.3) 和(17.5.10) 应有

$$a + b + c = \frac{1}{2}(a + b + c + d + g + h) = u. \qquad (17.5.12)$$

又容易求得

$$\begin{aligned} \sigma + u\tau &= e^{-u} + \frac{1}{u}[1 - e^{-u}(1 + u)] \\ &= \frac{1}{u}(1 - e^{-u}) = \frac{1}{u}(1 - \sqrt{\Delta}) \qquad (17.5.13) \\ &= \frac{1}{u}(x + y + z). \end{aligned}$$

将(17.5.11) ~ (17.5.13) 代入(17.5.9),即可解得

$$\begin{aligned} a &= \frac{yu}{x + y + z}, \\ b &= \frac{zu}{x + y + z}, \\ c &= \frac{xu}{x + y + z}. \end{aligned} \qquad (17.5.14)$$

从而由(17.5.11) 又有

$$A_1 = \frac{xu^2}{x + y + z},$$

$$A_2 = \frac{yu^2}{x+y+z}, \tag{17.5.15}$$

$$A_3 = \frac{zu^2}{x+y+z}.$$

显然 a,b,c 均非负，$a+b+c=u$，$A_1+A_2+A_3=u^2$，故按(17.5.14)及(17.5.10)决定的 a,b,c,d,g,h 依(17.3.1)可构造抛物型的 Q — 矩阵，对此 Q — 矩阵，我们有

$$a\sigma + A_2\tau = \frac{yu}{x+y+z}e^{-u} + \frac{yu^2}{x+y+z}\frac{1}{u^2}[1-e^{-u}(1-u)]$$

$$= \frac{y}{x+y+z}(1-e^{-u})$$

$$= \frac{y}{x+y+z}[1-(1-(x+y+z))] = y.$$

用同样的方法验证其余各元素，可知 P 已写成(17.3.14)的形状.

总结以上的讨论，即得定理的证明.

形如(17.5.1)的随机矩阵为椭圆型骨架的充要条件是它可以表为(17.3.14)的形式，因而有

$$\begin{aligned} x &= c\sigma + A_1\tau = g\sigma + A_1\tau, \\ y &= a\sigma + A_2\tau = h\sigma + A_2\tau, \\ z &= b\sigma + A_3\tau = d\sigma + A_3\tau. \end{aligned} \tag{17.5.16}$$

其中的 σ 及 τ 由(17.3.16)给出，由(17.3.19)，(17.5.2)，(17.5.3)可知

$$\cos k = \frac{T-1}{2\sqrt{\Delta}} = \frac{2[1-(x+y+z)]}{2|1-(x+y+z)|}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{当 } 1-(x+y+z) > 0; \\ -1 & \text{当 } 1-(x+y+z) < 0. \end{cases} \tag{17.5.17}$$

因而

$$k = \begin{cases} 2n\pi, & \text{当 } 1-(x+y+z) > 0, \\ (2n-1)\pi, & \text{当 } 1-(x+y-z) < 0. \end{cases} \text{（}n\text{ 为自然数）} \tag{17.5.18}$$

这时由(17.3.16)

$$\sigma = \frac{\sin k}{k} e^{-u} = 0. \tag{17.5.19}$$

$$\tau = \frac{1}{u^2 + k^2}\left[1 - e^{-u}\left(\cos k + \frac{u}{k}\sin k\right)\right] \tag{17.5.20}$$

$$= \frac{1}{u^2 + k^2}(x + y + z).$$

故由(17.5.16)得

$$A_1 = \frac{x}{x + y + z}(u^2 + k^2),$$

$$A_2 = \frac{y}{x + y + z}(u^2 + k^2), \tag{17.5.21}$$

$$A_3 = \frac{z}{x + y + z}(u^2 + k^2).$$

由 $\Delta = e^{-2u}$ 及(17.5.3),可知

$$u^2 = \ln^2|1 - (x + y + z)|. \tag{17.5.22}$$

故(17.5.21)中的 A_1、A_2、A_3 可由 P 决定. 再由(17.3.2)及(17.3.3)得方程组

$$\begin{aligned}
&(c + d)(g + h) - dh = A_1,\\
&(a + b)(g + h) - bg = A_2,\\
&(a + b)(c + d) - ac = A_3,\\
&a + b + c + d + g + h = 2u.
\end{aligned} \tag{17.5.23}$$

此方程组的非负解即给出 P 的连续扩充的 $Q-$矩阵,故为讨论随机矩阵 P 是否为椭圆型骨架及其连续扩充的个数,只需讨论方程组(17.5.23)的非负解,通过变换

$$\begin{cases}
x_1 = a + b, \quad x_2 = c + d, \quad x_3 = g + h;\\
p = dh, \quad q = bg, \quad r = ac.
\end{cases} \tag{17.5.24}$$

方程组(17.5.23)可化为

$$\begin{cases}
x_2 x_3 = A_1 + p,\\
x_1 x_3 = A_2 + q,\\
x_1 x_2 = A_3 + r,\\
x_1 + x_2 + x_3 = 2u.
\end{cases} \tag{17.5.25}$$

首先我们假设 A_1、A_2、A_3 均不为 0，这时有下面的

引理 17.5.1 设区域 D 及三元函数 $F(x,y,z)$ 定义为

$$D=\{(x,y,z);x、y、z\geqslant 0,xy\leqslant A_1A_2,yz\leqslant A_2A_3,xz\leqslant A_1A_3\}$$

$$F(x,y,z)=\sqrt{(A_1+x)(A_2+y)(A_3-z)}\times$$
$$\times\left(\frac{1}{A_1+x}+\frac{1}{A_2+y}+\frac{1}{A_3+z}\right). \qquad (17.5.26)$$

令

$$T(A_1,A_2,A_3)=\min_{(x,y,z)\in D}F(x,y,z),$$

则 $T(A_1,A_2,A_3)$ 存在且

$$T(A_1,A_2,A_3)$$
$$=\begin{cases}F\left(\frac{A_2A_3}{A_2+A_3}-A_1,0,0\right)=2\sqrt{A_2+A_3}, & \frac{1}{A_2}+\frac{1}{A_3}<\frac{1}{A_1};\\ F\left(0,\frac{A_1A_3}{A_1+A_3}-A_2,0\right)=2\sqrt{A_1+A_3}, & \frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_3}<\frac{1}{A_2};\\ F\left(0,0,\frac{A_1A_2}{A_1+A_2}-A_3\right)=2\sqrt{A_1+A_2}, & \frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_2}<\frac{1}{A_3};\\ F(0,0,0)=\sqrt{A_1A_2A_3}\left(\frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_2}+\frac{1}{A_3}\right), & 其它.\end{cases}$$

(17.5.27)

证明 直接计算可得

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(A_2+y)(A_3+z)}{A_1+x}}\left(\frac{1}{A_2+y}+\frac{1}{A_3+z}-\frac{1}{A_1+x}\right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(A_1+x)(A_3+z)}{A_2+x}}\left(\frac{1}{A_1+x}+\frac{1}{A_3+z}-\frac{1}{A_2+y}\right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(A_1+x)(A_2+y)}{A_3+z}}\left(\frac{1}{A_1+x}+\frac{1}{A_2+y}-\frac{1}{A_3+z}\right).$$

(17.5.28)

对于 D 中的点 (x,y,z)，$\frac{\partial F}{\partial x}$、$\frac{\partial F}{\partial y}$、$\frac{\partial F}{\partial z}$ 中不可以有两个同时为 0，又若其中有一个为负，例如 $\frac{\partial F}{\partial x}<0$，则将有 $\frac{\partial F}{\partial y}$、$\frac{\partial F}{\partial z}$ 均为正，故 $\frac{\partial F}{\partial x}$、$\frac{\partial F}{\partial y}$、$\frac{\partial F}{\partial z}$ 中

至少有两个同时为正.若点(x,y,z)的坐标中有两个为正,则x,y,z中必有其一,例如x,使$x>0$且$\frac{\partial F}{\partial x}>0$,这时若使$x$变小而保持$y$,$z$不变,且点$(x,y,z)$不离开$D$,则对应的函数值将变小,故这点必不是$F(x,y,z)$的最小值点,所以$F(x,y,z)$的最小值只能在坐标轴上的点取得.

当$x=y=0$时

$$\frac{d}{dz}F(0,0,z)=\frac{d}{dz}\sqrt{A_1A_2(A_3+z)}\left(\frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_2}+\frac{1}{A_3+z}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{A_1A_2}{A_3+z}}\left(\frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_2}-\frac{1}{A_3+z}\right).$$

由

$$\frac{dF(0,0,z)}{dz}=0,$$

得

$$z=\frac{A_1A_2}{A_1+A_2}-A_3.$$

当

$$\frac{A_1A_2}{A_1+A_2}>A_3,$$

即

$$\frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_2}<\frac{1}{A_3}$$

时,$z>0$,此时

$$\min_{z\geqslant 0}F(0,0,z)=F\left(0,0,\frac{A_1A_2}{A_1+A_2}-A_3\right)=2\sqrt{A_1+A_2}. \tag{17.5.29}$$

当

$$\frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_2}\geqslant\frac{1}{A_3}$$

时,若$z\geqslant 0$,则

$$\frac{dF(0,0,z)}{dz}\geqslant 0,$$

故 $F(0,0,z)$ 随 z 增加，因而

$$\min_{z\geqslant 0}F(0,0,z) = F(0,0,0) = \sqrt{A_1A_2A_3}\left(\frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_2}+\frac{1}{A_3}\right). \tag{17.5.30}$$

类似地有

$$\min_{y\geqslant 0}F(0,y,0) = \begin{cases} F\left(0,\dfrac{A_1A_3}{A_1+A_3}-A_2,0\right) = 2\sqrt{A_1+A_3}, & \dfrac{1}{A_1}+\dfrac{1}{A_3}<\dfrac{1}{A_2}; \\ F(0,0,0), & \dfrac{1}{A_1}+\dfrac{1}{A_3}\geqslant\dfrac{1}{A_2}. \end{cases} \tag{17.5.31}$$

$$\min_{x\geqslant 0}F(x,0,0) = \begin{cases} F\left(\dfrac{A_2A_3}{A_2+A_3}-A_1,0,0\right) = 2\sqrt{A_2+A_3} & \dfrac{1}{A_2}+\dfrac{1}{A_3}<\dfrac{1}{A_1}; \\ F(0,0,0), & \dfrac{1}{A_2}+\dfrac{1}{A_3}\geqslant\dfrac{1}{A_1}. \end{cases} \tag{17.5.32}$$

因为条件 $\frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_2}<\frac{1}{A_3}$，$\frac{1}{A_2}+\frac{1}{A_3}<\frac{1}{A_1}$，$\frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_3}<\frac{1}{A_2}$ 中任何两个不同时成立，故综合(17.5.29)～(17.5.32)即得(17.5.27)

引理 17.5.2 若方程组(17.5.23)有非负解，则(17.5.25)作为 x_1、x_2、x_3、p、q、r 的方程组有满足条件

$$pq\leqslant A_1A_2,\qquad pr\leqslant A_1A_3,\qquad qr\leqslant A_2A_3. \tag{17.5.33}$$

$$x_1x_2x_3\geqslant \max(px_1+qx_2, px_1+rx_3, qx_2+rx_3) \tag{17.5.34}$$

的非负解，这时，对于按(17.5.27)定义的 D，$F(x,y,z)$ 及 $T(A_1,A_2,A_3)$，有

$$T(A_1,A_2,A_3)\leqslant 2u. \tag{17.5.35}$$

证明 当(17.5.23)有非负解时，由(17.5.23)的非负解经变换(17.5.24)可得(17.5.25)之非负解. 对于这样的非负解，由(17.3.2)可知

$$A_1A_2 = (cg+ch+dg)(ag+ah+bh)$$

$$\geqslant dg \cdot bh = dh \cdot bg = pq,$$

故(17.5.33)成立. 由(17.5.25)的前三式可得

$$x_1 = \frac{\sqrt{(A_1+p)(A_2+q)(A_3+r)}}{A_1+p},$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{(A_1+p)(A_2+q)(A_3+r)}}{A_2+q}, \qquad (17.5.36)$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{(A_1+p)(A_2+q)(A_3+r)}}{A_3+r}.$$

由此及(17.5.33)可验证(17.5.34)成立,再由(17.5.25)之第四式,知

$$x_1 + x_2 + x_3 = F(p,q,r) = 2u.$$

根据 P、q、r 的非负性及(17.5.33),得(17.5.35)成立.

引理 17.5.3 当 $A_1A_2A_3 \neq 0$ 时,方程组(17.5.23)的非负解存在的充要条件是

$$T(A_1,A_2,A_3) \leqslant 2u. \qquad (17.5.37)$$

并且当 $T(A_1,A_2,A_3) < 2u$ 时,(17.5.23)有无穷多组非负解;

当 $T(A_1,A_2,A_3) = 2u$ 时,(17.5.23)恰有两组非负解.

证明 条件(17.5.37)的必要性见引理 2.

当 $T(A_1,A_2,A_3) < 2u$ 时,若$\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} < \frac{1}{A_3}$,记 $z_0 = \frac{A_1A_2}{A_1+A_2} - A_3$,,则 $z_0 > 0$ 而 $F(0,0,z) < 2u$,由 $F(x,y,z)$ 的连续性,存在 $\delta > 0$,,使当 $0 \leqslant y \leqslant \delta$ 时,将有 $F(0,y,z_0) < 2u$,,令

$$\triangle = \min(\delta, \frac{A_2A_3}{z_0}),$$

则当 $0 < y_0 \leqslant \triangle$ 时

$$y_0z_0 \leqslant A_2A_3, \qquad F(0,y_0,z_0) < 2u.$$

定义 $f(t) = F(0,\frac{y_0}{t},z_0t)$,则 $f(t)$ 连续,且 $f(1) = F(0,y_0,z_0) < 2u$ 而

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{t\to 0^+} \sqrt{A_1(A_2+\frac{y_0}{t})(A_3+z_0t)}$$

$$\times\left(\frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_2+\frac{y_0}{t}}+\frac{1}{A_3+z_0t}\right)=+\infty.$$

故存在 $0<t_0<1$，使 $f(t_0)=2u$，即 $F(0,\frac{y_0}{t_0},z_0t_0)=2u$，记

$$q=\frac{y_0}{t_0},\qquad r=z_0t_0,$$

并取 $p=0$，则易见(17.5.33)成立，按(17.5.36)求出 x_1,x_2,x_3，则(17.5.34)亦成立，从而 $(x_1,x_2,x_3,0,q,r)$ 即为(17.5.25)的一组非负解，将其代入(17.5.24)并取 $d=0$，则可解得

$$c=x_2,\quad a=\frac{r}{x_2},\quad b=\frac{x_1x_2-r}{x_2},$$

$$g=\frac{qx_2}{x_1x_2-1},\quad h=x_3-\frac{qx_2}{x_1x_2-r}.\qquad(17.5.38)$$

由(17.5.34)易知(17.5.38)中之 a,b,c,d,g,h 非负，直接验证可知其为(17.5.23)的非负解，由于按条件 $0<y_0\leqslant\Delta$ 取定 y_0 显然有无穷多种不同的取法，而当这样取定的 y_0 与 y_0' 不同时，数组 $(\frac{y_0}{t_0},z_0t_0)$ 与数组 $(\frac{y_0'}{t_0'},z_0t_0')$ 必不相同，故按我们的方法可以得到(17.5.23)的无穷多组非负解，其余情形仿此.

当 $T(A_1,A_2,A_3)=2u$ 时. 若 $T(A_1,A_2,A_3)=F(0,0,\frac{A_1A_2}{A_1+A_2}-A_3)=2u$，则由 $F(p,q,r)=2u$，故令 $p=q=0,r=\frac{A_1A_2}{A_1+A_2}-A_3$，这时条件(17.5.33)，(17.5.34)自然成立. 按(17.5.36)求出 x_1,x_2,x_3，则得(17.5.25)之非负解 $(0,0,r,x_1,x_2,x_3)$，将其代入(17.5.24)，可得(17.5.23)的两组非负解

$$d=0,\quad c=x_2,\quad a=\frac{r}{x_2},\quad b=\frac{x_1-r}{x_2},\quad g=0,\quad h=x_3$$

及

$$h=0,\quad g=x_3,\quad b=0,\quad a=x_1,\quad c=\frac{r}{x_1},\quad d=x_2-\frac{r}{x_1}.$$

(17.5.39)

$T(A_1,A_2,A_3) = F(\frac{A_2A_3}{A_2+A_3} - A_1,0,0)$ 及 $T(A_1,A_2,A_3) = F(0,\frac{A_1A_3}{A_1+A_3} - A_2,0)$ 的情形仿此，而当 $T(A_1,A_2,A_3) = F(0,0,0)$ 时，则取 $p = q = r = 0$，按(17.5.36)求出 x_1,x_2,x_3 代入(17.5.24)即可得(17.5.23)的两组非负解

$$(a = d = g = 0, b = x_1, c = x_2, h = x_3);$$

$$(b = c = h = 0, a = x_1, d = x_2, g = x_3). \quad (17.5.40)$$

综上所述，引理得证.

现设 A_1,A_2,A_3 中有为0者，

当 $A_1 = A_2 = A_3 = 0$ 时，(17.5.23)有无穷多组非负解如下：

$$\begin{array}{l}(a = b = c = d = 0, g = s, h = 2u - s),\\ (c = d = a = h = 0, b = s, g = 2u - s),\\ (a = b = c = g = 0, d = s, h = 2u - s),\\ (c = g = d = h = 0, a = s, b = 2u - s),\\ (a = b = g = h = 0, c = s, d = 2u - s),\\ (g = h = d = b = 0, a = s, c = 2u - s).\\ \quad (0 \leqslant s \leqslant 2u)\end{array} \quad (17.5.41)$$

当 A_1,A_2,A_3 中恰有两个为0时，例如，设 $A_1 = A_2 = 0, A_3 \neq 0$，则必有 $g = h = 0$，而(17.5.23)化为

$$\begin{cases} ad + b(c + d) = A_3, \\ a + b = 2u - (c + d). \end{cases} \quad (17.5.42)$$

这是关于 a,b 的线性方程组，当取 $c = 0$ 时(17.5.42)有解的充要条件为

$$A_3 = d(2u - d),$$

此即 $d^2 - 2ud + A_3 = 0$，当且仅当 $u^2 \geqslant A_3$ 时关于 d 有解，并从而求得(17.5.23)的非负解

$$\begin{cases} g = h = c = 0, \\ d = u \pm \sqrt{u^2 - A_3}, \\ a = s, \\ b = (u \mp \sqrt{u^2 - A_3}) - s. \end{cases} \quad (17.5.43)$$

$$(0 \leqslant s \leqslant u \mp \sqrt{u^2 - A_3})$$

或取 $c > 0$,则由(17.5.42)可解得

$$\begin{cases} g = h = 0, \\ c = t, \qquad d = s, \\ b = \dfrac{1}{t}[A_3 - s(2u - (s + t))], \\ a = \dfrac{1}{t}[(s + t)(2u - (s + t)) - A_3]. \end{cases} \tag{17.5.44}$$

其中点 (s,t) 取值于区域 M:

$$M = \{(s,t); s \geqslant 0, t > 0, s[2u - (s + t)] \leqslant A_3 \leqslant (s + t)[2u - (s + t)]\}. \tag{17.5.45}$$

易知当且仅当 $u^2 \geqslant A_3$ 时,M 为无穷集,它是 sot 平面上第一象限中由两平行线 $s + t = u - \sqrt{u^2 - A_3}$ 及 $s + t = u + \sqrt{u^2 - A_3}$,与双曲线 $s[2u - (s + t)] = A_3$ 及坐标轴所夹的部分.

当 A_1, A_2, A_3 中仅有一个为 0 时,例如 $A_1 = 0, A_2$、$A_3 \neq 0$,则必有 $c = g = 0$,而(17.5.23)成为

$$\begin{cases} h(a + b) = A_2, \\ d(a + b) = A_3, \\ a + b + d + h = 2u. \end{cases} \tag{17.5.46}$$

由此知 $a + b, d + h$ 为二次方程

$$Z^2 - 2uZ + (A_2 + A_3) = 0$$

的二根,故有

$$u^2 \geqslant A_2 + A_3.$$

此时可得(17.5.23)的非负解

$$\begin{cases} a = u + \sqrt{u^2 - (A_2 + A_3)} - s, \\ b = s, \\ d = \dfrac{A_3}{A_2 + A_3}(u - \sqrt{u^2 - (A_2 + A_3)}), \\ h = \dfrac{A_2}{A_2 + A_3}(u - \sqrt{u^2 - (A_2 + A_3)}), \\ c = g = 0. \end{cases} \tag{17.5.47}$$

$$(0 \leqslant s \leqslant u + \sqrt{u^2 - (A_2 + A_3)})$$

及

$$\begin{cases} a = u - \sqrt{u^2 - (A_2 + A_3)} - s, \\ b = s, \\ d = \dfrac{A_3}{A_2 + A_3}(u + \sqrt{u^2 - (A_2 + A_3)}), \\ h = \dfrac{A_2}{A_2 + A_3}(u + \sqrt{u^2 - (A_2 + A_3)}), \\ c = g = 0, \end{cases} \quad (17.5.48)$$

$$(0 \leqslant s \leqslant u - \sqrt{u^2 - (A_2 + A_3)}).$$

综上述,可得

引理 17.5.4 当 $A_1A_2A_3 = 0$ 时,(17.5.23) 有解的充要条件是

$$u^2 \geqslant A_1 + A_2 + A_3. \quad (17.5.49)$$

这时(17.5.23) 有无穷多组解.

定理 17.5.2 当 $xyz = 0$ 时,形如(17.5.1) 的随机矩阵 P 必非椭圆型离散骨架.

证明 P 为椭圆型骨架的充要条件是方程组(17.5.23) 有非负解. 但由条件 $xyz = 0$ 及(17.5.2). 可知 $A_1A_2A_3 = 0$. 故由引理 17.5.4,(17.5.23) 有非负解的充要条件是

$$u^2 \geqslant A_1 + A_2 + A_3 = u^2 + k^2,$$

故知 $k = 0$,因而 P 不可能为椭圆型骨架.

定理 17.5.3 设 P 给出如(17.5.1) 且 $xyz \neq 0, 0 < x + y + z < 1$,则

(i) 当 $\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} < \dfrac{1}{x}$ 时,P 为椭圆型离散骨架的充要条件是

$$\frac{x}{4\pi^2(y + z)} \ln^2[1 - (x + y + z)] \geqslant 1. \quad (17.5.50)$$

(ii) 当 $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} < \dfrac{1}{y}$ 时,P 为椭圆型离散骨架的充要条件是

$$\frac{y}{4\pi^2(x + z)} \ln^2[1 - (x + y + z)] \geqslant 1. \quad (17.5.51)$$

(iii) 当$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}<\frac{1}{z}$时，$P$ 为椭圆型离散骨架的充要条件是

$$\frac{z}{4\pi^2(x+y)}\ln^2[1-(x+y+z)]\geqslant 1. \tag{17.5.52}$$

(iv) 当

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{x},$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}<\frac{1}{y},$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}<\frac{1}{z},$$

均不成立时，P 为椭圆型离散骨架的充要条件是

$$\frac{\ln^2[1-(x+y+z)]}{4\pi^2}\left[\frac{4xyz(x+y+z)}{(xy+xz+yz)^2}-1\right]\geqslant 1. \tag{17.5.53}$$

在所有情形下，当等号成立时，P 恰有两个椭圆型连续扩充，否则，将有无穷多个椭圆型连续扩充.

证明 P 为椭圆型离散骨架，当且仅当(17.5.23)有解，由 $xyz\neq 0$ 及(17.5.21)，可知 $A_1A_2A_3\neq 0$，根据引理 17.5.3，(17.5.23)有解的充要条件是(17.5.37)成立，当$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{x}$时，(17.5.37)成为 $u^2\geqslant A_2+A_3$，亦即

$$u^2\geqslant\frac{y+z}{x+y+z}(u^2+k^2).$$

注意(17.5.18)及(17.5.22)，即可得(17.5.50)，其余各式仿此.

定理 17.5.4 设 P 给出如(17.5.1)且 $xyz\neq 0, x+y+z>1$，则

(i) 当$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{x}$时，$P$ 为椭圆型离散骨架的充要条件是

$$\frac{x}{\pi^2(y+z)}\ln^2|1-(x+y+z)|\geqslant 1. \tag{17.5.54}$$

(ii) 当$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}<\frac{1}{y}$时，$P$ 为椭圆型离散骨架的充要条件是

$$\frac{y}{\pi^2(x+z)}\ln^2|1-(x+y+z)|\geqslant 1. \tag{17.5.55}$$

(iii) 当$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}<\frac{1}{z}$时，$P$ 为椭圆型离散骨架的充要条件是

$$\frac{z}{\pi^2(x+y)}\ln^2|1-(x+y+z)|\geqslant 1. \quad (17.5.56)$$

(iv) 当

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{x},$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}<\frac{1}{y},$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}<\frac{1}{z},$$

均不成立时，P 为椭圆型离散骨架的充要条件是

$$\frac{\ln^2|1-(x+y+z)|}{\pi^2}\left[\frac{4xyz(x+y+z)}{(xy+xz+yz)^2}-1\right]\geqslant 1. \quad (17.5.57)$$

在所有情形下，当等号成立时，P 恰有两个椭圆型连续扩充，否则将有无穷多个椭圆型连续扩充.

证明 仿定理 17.5.3.

§6 三状态不中断齐次 Markov 链的嵌入问题：非退化情形

设 $E=\{1,2,3\}$，在本节中，为简化记号，我们设三阶保守 Q－矩阵为

$$Q=\begin{pmatrix}-q_1 & q_{12} & q_{13}\\ q_{21} & -q_2 & q_{23}\\ q_{31} & q_{32} & -q_3\end{pmatrix}, \quad (17.6.1)$$

$$q_i=\sum_{j\neq i}q_{ij},(i\in E).$$

其余记号保持原来的意义.

在后面的讨论中，我们将用到以下的引理，先述之如次.

引理 17.6.1

(i) 设 $u \geqslant 0$,则有

(a) $e^u \geqslant 1 + u$; (b) $e^{-u} \geqslant 1 - u$.

当且仅当 $u = 0$ 时等号成立;

(ii) 设 $u \geqslant k > 0$,则有

(c) $e^u \geqslant \operatorname{ch}k + \dfrac{u}{k}\operatorname{sh}k$;

(d) $e^{-u} \geqslant \operatorname{ch}k - \dfrac{u}{k}\operatorname{sh}k$.

当且仅当 $u = k$ 时等号成立.

证明 注意到 $f(k) = \operatorname{ch}k + \dfrac{u}{k}\operatorname{sh}k$ 是 k 的严格上升函数即得 (c),(d) 等价于

$$\frac{u-k}{u+k}e^{2k} + \frac{2k}{u+k}e^{-(u-k)} \geqslant 1.$$

后者由周知的算术一几何加权平均不等式立得. (a),(b) 及引理的其它结论显然.

下面的命题对各类离散骨架都适用.

命题 17.6.1 设 $P = (p_{ij}; i,j \in E)$ 为三阶离散骨架,其对应的 Q 由(17.6.1) 给出,V、σ、τ 亦如 §17.3 所定义,则有

$$p_{ij}\sigma = q_{ij}[\sigma^2 + (1 - p_{kk} + p_{ik})\tau - V\tau^2] + \\ + q_{ik}\tau(p_{kj} - p_{ij}). \qquad (17.6.2)$$

$$(i,j \in E, i \neq j, k \in E - \{i,j\}).$$

证明 由条件,P 可写成(17.3.14) 的形式,故

$$p_{12} = q_{12}\sigma + A_2\tau,$$

$$p_{31} - p_{21} = q_{31}\sigma - q_{21}\sigma,$$

$$p_{32} - p_{12} = q_{32}\sigma - q_{12}\sigma,$$

$$p_{12} + p_{13} + p_{21} = (q_{12} + q_{13} + q_{21})\sigma + V\tau.$$

由此可得

$$\begin{aligned} p_{12}\sigma &= q_{12}\sigma^2 + A_2\sigma\tau, \\ q_{31}\sigma &= q_{21}\sigma + p_{31} - p_{21}, \\ q_{32}\sigma &= q_{12}\sigma + p_{32} - p_{12}, \\ q_{21}\sigma &= (p_{12} + p_{13} + p_{21}) - V\tau - (q_{12} + q_{13})\sigma. \end{aligned} \qquad (17.6.3)$$

故有

$$
\begin{aligned}
A_2\sigma &= (q_{12}q_{31} + q_{12}q_{32} + q_{13}q_{32})\sigma \\
&= q_{13}(q_{21}\sigma + p_{31} - p_{21}) + (q_{12} + q_{13})(q_{12}\sigma + p_{32} - p_{12}) \\
&= q_{12}[p_{12} + p_{13} + p_{21} - V\tau - (q_{12} + q_{13})\sigma + p_{31} - p_{21}] + \\
&\quad + (q_{12} + q_{13})(q_{12}\sigma + p_{32} - p_{12}) \\
&= q_{12}(1 - p_{33} + p_{13} - V\tau) + q_{13}(p_{32} - p_{12}).
\end{aligned}
$$

代入(17.6.3)即得

$$
p_{12}\sigma = q_{12}[\sigma^2 + (1 - p_{33} + p_{13})\tau - V\tau^2] + q_{13}\tau(p_{32} - p_{12}).
$$

同理可得(17.6.2)之其余各式.

定理 17.6.1 三阶随机矩阵 P 是抛物型离散骨架的充要条件是:

(i) $\Delta > 0$;

(ii) $T = 1 + 2\sqrt{\Delta}$; (17.6.4)

(iii) $p_{ij} \geqslant \dfrac{\sqrt{\Delta}^{-1} - (1 - \frac{1}{2}\ln\Delta)}{\sqrt{\Delta} - (1 + \frac{1}{2}\ln\Delta)} B_{ji}$.

B_{ij} 是元素 p_{ij} 在 P 中的代数余子式.

此时 P 有唯一的连续扩充,连续扩充的 Q—矩阵由(17.6.1)给出,其中

$$
q_{ij} = gp_{ij} - hB_{ji} \quad (i \neq j, i, j \in E).
$$

$$
g = \frac{\sqrt{\Delta} - (1 + \frac{1}{2}\ln\Delta)}{(1 - \sqrt{\Delta})^2}, \tag{17.6.5}
$$

$$
h = \frac{\sqrt{\Delta}^{-1} - (1 - \frac{1}{2}\ln\Delta)}{(1 - \sqrt{\Delta})^2}.
$$

证明 必要性 设 P 为抛物型离散骨架,条件(i),(ii)由§17.3中的推论17.3.1立得.设 P 所对应的 Q—矩阵由(17.6.1)给出,由 $V = u^2$ 及(17.3.15)可知

$$
V\tau^2 = u^2\tau \cdot \tau = [1 - \sigma(1 + u)]\tau \tag{17.6.6}
$$

在(17.6.2)中取 $i = 1, j = 2$ 及 $i = 1, j = 3$,以(17.6.6)代入并

简化，可得

$$q_{12}[\sigma^2+\sigma(1+u)\tau+(p_{13}-p_{33})\tau]+q_{13}\tau(p_{32}-p_{12})=p_{12}\sigma,$$
$$q_{12}\tau(p_{23}-p_{13})+q_{13}[\sigma^2+\sigma(1+u)\tau+(p_{12}-p_{22})\tau]=p_{13}\sigma. \tag{17.6.7}$$

这是关于 q_{12}, q_{13} 的线性方程组，注意

$\Delta=(p_{13}-p_{33})(p_{12}-p_{22})-(p_{32}-p_{12})(p_{23}-p_{13})=e^{-2u}=\sigma^2,$

$T=p_{11}+p_{22}+p_{33}=1+2\sqrt{\Delta}=1+2\sigma.$

容易算出(17.6.7)的系数行列式为 $D=\sigma^2(\sigma+u\tau)^2$，由(17.3.15)知 $\sigma>0, \tau>0$，故 $D>0$，从而(17.6.7)有唯一解，由克莱姆法则，易算出

$$q_{12}=\frac{p_{12}\sigma[\sigma(u-1)\tau]-\tau B_{21}}{\sigma(\sigma+u\tau)^2}.$$

此处及今后 B_{ij} 恒表 p_{ij} 在 P 中的代数余子式，以(17.3.15)代入并简化，得

$$q_{12}=\frac{p_{12}(e^{-u}+u-1)-B_{21}(e^{-u}-u-1)}{(1-e^{-u})^2}. \tag{17.6.8}$$

再注意

$$e^{-u}=\sqrt{\Delta}, \quad u=-\frac{1}{2}\ln\Delta.$$

则有

$$q_{12}=\frac{p_{12}[\sqrt{\Delta}-(1+\frac{1}{2}\ln\Delta)]-B_{21}[\sqrt{\Delta}^{-1}-(1-\frac{1}{2}\ln\Delta)]}{(1-\sqrt{\Delta})^2}$$
$$=gp_{12}-hB_{21}.$$

用同样的方法可得(17.6.5)之其余各式，故当 P 为抛物型离散骨架时，连续扩充必定唯一.

由 q_{12} 的非负性及(17.6.8)并应用引理 17.6.1 可得

$$p_{12}\geqslant\frac{e^{u}-u-1}{e^{-u}+u-1}B_{21},$$

此即

$$p_{12} \geqslant \frac{\sqrt{\Delta}^{-1} - (1 - \frac{1}{2}\ln\Delta)}{\sqrt{\Delta} - (1 + \frac{1}{2}\ln\Delta)} B_{21}.$$

同样可证(iii)之其余各式.

充分性　设 P 为三阶随机矩阵且满足条件(i)～(iii), P 的行列式记为 Δ,依(17.6.5)取定 q_{ij}, $(i \neq j, i, j \in E)$ 由条件(iii), q_{ij} 均非负,故可以按(17.6.1)构造 Q－矩阵,对此 Q－矩阵有

$$\begin{aligned}\sum_{i\neq j} q_{ij} &= \frac{1}{(1-\sqrt{\Delta})^2}\{[\sqrt{\Delta} - (1 + \frac{1}{2}\ln\Delta)](\sum_{i\neq j} p_{ij}) \\ &\quad - [\sqrt{\Delta}^{-1} - (1 - \frac{1}{2}\ln\Delta)](\sum_{i\neq j} B_{ij})\} \\ &= \frac{1}{(1-\sqrt{\Delta})^2}\{[\sqrt{\Delta} - (1 + \frac{1}{2}\ln\Delta)](3 - T) \\ &\quad - [\sqrt{\Delta}^{-1} - (1 - \frac{1}{2}\ln\Delta)][3\Delta - (B_{11} + B_{22} + B_{33})]\}.\end{aligned}$$

设 $B_{11} + B_{22} + B_{33} = S$,则 P 的特征多项式为

$$\lambda^3 - T\lambda^2 + S\lambda - \Delta = 0.$$

由于 $\lambda = 1$ 为 P 的一个特征值,故 $1 - T + S - \Delta = 0$,因而

$$\begin{aligned}S &= T + \Delta - 1 = 2\sqrt{\Delta} + \Delta, \\ 3 - T &= 2 - 2\sqrt{\Delta}, \\ 3\Delta - S &= 2\Delta - 2\sqrt{\Delta}.\end{aligned} \tag{17.6.9}$$

代入前式并化简,可得

$$\sum_{i\neq j} q_{ij} = -\ln\Delta = 2u. \tag{17.6.10}$$

由此,我们有

$$\begin{aligned}4u^2 = (\sum_{i\neq j} q_{ij})^2 &= (q_{12} + q_{13})^2 + (q_{21} + q_{23})^2 + \\ &+ (q_{31} + q_{32})^2 + 2q_{12}q_{21} + 2q_{13}q_{31} + 2q_{23}q_{32} + 2V.\end{aligned}$$

将(17.6.5)代入并注意到

$$\Delta = B_{11} + B_{21} + B_{31} = B_{12} + B_{22} + B_{32} = B_{13} + B_{23} + B_{33}$$

及

$$1 = p_{11} + p_{12} + p_{13} = p_{21} + p_{22} + p_{23} = p_{31} + p_{32} + p_{33},$$

然后集项,可得

$$\begin{aligned}4u^2 = &3(g - \Delta h)^2 - 2(g - \Delta h)[(p_{11} + p_{22} + p_{33})g \\ &- (B_{11} + B_{22} + B_{33})h] + [p_{11}^2 + p_{22}^2 + p_{33}^2 \\ &+ 2(p_{12}p_{21} + p_{13}p_{31} + p_{23}p_{32})]g^2 \\ &+ [B_{11}^2 + B_{22}^2 + B_{33}^2 + 2(B_{12}B_{21} + B_{13}B_{31} + B_{23}B_{32})]h^2 \\ &- 2(p_{11}B_{11} + p_{22}B_{22} + p_{33}B_{33} + p_{21}B_{21} + p_{12}B_{12} + p_{13}B_{13} \\ &+ p_{31}B_{31} + p_{23}B_{23} + p_{32}B_{32})gh + 2V.\end{aligned}$$

此即

$$\begin{aligned}4u^2 = &3(g - \Delta h)^2 - 2(g - \Delta h)(Tg - sh) + Tr(P^2)g^2 \\ &+ Tr((P^*)^2)h^2 - 2 \times 3\Delta gh + 2V. \qquad (17.6.11)\end{aligned}$$

($Tr(A)$ 表示矩阵 A 的迹). 设 P 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 则 P^2 的特征值为 $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2$, 故

$$\begin{aligned}Tr(P^2) &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3) \\ &= T^2 - 2S. \qquad (17.6.12)\end{aligned}$$

又

$$P^{-1} = \frac{1}{|P|}P^*,$$

故

$$P^* = |P|P^{-1}.$$

故 $(P^*)^2$ 的特征值为

$$\frac{\Delta^2}{\lambda_1^2}, \quad \frac{\Delta^2}{\lambda_2^2}, \quad \frac{\Delta^2}{\lambda_3^2}.$$

从而

$$\begin{aligned}Tr[(P^*)^2] &= \Delta^2\left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_3^2}\right) = (\lambda_1\lambda_2)^2 + (\lambda_1\lambda_3)^2 + (\lambda_2\lambda_3)^2 \\ &= (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)^2 - 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \\ &= S^2 - 2\Delta T. \qquad (17.6.13)\end{aligned}$$

将(17.6.12),(17.6.13)代入(17.6.11)并利用(17.6.9),可得

$$4u^2 = 2(1-\sqrt{\varDelta})^2(g+\sqrt{\varDelta}h)^2+2V.$$

将(17.6.5)代入，最后得到

$$4u^2 = 2u^2+2V,$$

因此 $V=u^2$，即我们构造的 Q — 矩阵为抛物型的.

由定理必要性部分的证明可知，我们所取的 $(q_{ij})(i\neq j,i,j\in E)$ 由解形如(17.6.7)的方程组得来，我们又已验证这样解得的 q_{ij} 适合 $u^2=V$，而在此条件下，形如(17.6.7)的方程组与(17.6.2)等价. 而(17.6.2)又与方程组

$$p_{ij}=q_{ij}\sigma+A_j\tau, \qquad (i\neq j,i,j\in E)$$

等价，故我们已经将 $P=(p_{ij})$ 写成(17.3.14)的形式，且其中的 u 满足

$$2u=\sum_{i\neq j}q_{ij},$$

所以 P 确为抛物型离散骨架，其对应的 Q — 矩阵由(17.6.1)及(17.6.5)给出.

定理 17.6.2 任给三阶随机矩阵 P，满足 $2+\varDelta-T\neq 0$，则 P 是双曲型离散骨架的充要条件是

(i) $\varDelta>0$;

(ii) $T>1+2\sqrt{\varDelta}$;

(iii) $$p_{ij}\geqslant\frac{e^{u}-\left(\operatorname{ch}k+\frac{u}{k}\operatorname{sh}k\right)}{e^{-u}-\left(\operatorname{ch}k-\frac{u}{k}\operatorname{sh}k\right)}B_{ji},(i\neq j,i,j\in E), \tag{17.6.14}$$

其中 $u=-\frac{1}{2}\ln\varDelta$, $\operatorname{ch}k=\frac{T-1}{2\sqrt{\varDelta}}$.

此时 P 有唯一的连续扩充，其对应的 Q — 矩阵由(17.6.1)给出，其中

$$q_{ij}=gp_{ij}-hB_{ji}, \qquad (i\neq j,i,j\in E).$$

$$g=\frac{e^{-u}-\operatorname{ch}k+\frac{u}{k}\operatorname{sh}k}{\frac{\operatorname{sh}k}{k}(2+\varDelta-T)}, \tag{17.6.15}$$

$$h = \frac{e^u - \mathrm{ch}k - \frac{u}{k}\mathrm{sh}k}{\frac{\mathrm{sh}k}{k}(2 + \varDelta - T)}.$$

证明 必要性 设P为双曲型离散骨架，则存在双曲型Q－矩阵Q，使P能写能(17.3.14)的形式，而其中的u,k及σ,τ按(17.3.3)及(17.3.17)定义. 由§17.3中的推论17.3.1立知(i)，(ii)成立，并且有

$$u = -\frac{1}{2}\ln\varDelta, \qquad \mathrm{ch}k = \frac{T-1}{2\sqrt{\varDelta}}. \qquad (17.6.16)$$

故u,k由P唯一决定，从而σ、τ亦由P唯一决定. 又由$V = u^2 - k^2$，故

$$V\tau^2 = V\tau\cdot\tau = \left[1 - e^{-u}(\mathrm{ch}k + \frac{u}{k}\mathrm{sh}k)\right]\tau$$
$$= (1 - e^{-u}\mathrm{ch}k - u\sigma)\tau. \qquad (17.6.17)$$

在(17.6.2)中取$i=1,j=2$及$i=1,j=3$，以(17.3.16)代入并化简，可得

$$\begin{cases} q_{12}[\sigma^2 + (e^{-u}\mathrm{ch}k + \sigma u)\tau + (p_{13} - p_{33})\tau] + q_{13}\tau(p_{32} - p_{12}) = p_{12}\sigma, \\ q_{12}\tau(p_{23} - p_{13}) + q_{13}[\sigma^2 + (e^{-u}\mathrm{ch}k + \sigma u)\tau + (p_{12} - p_{22})\tau] = p_{13}\sigma. \end{cases}$$
$$(17.6.18)$$

这是关于q_{12},q_{13}的线性方程组，计算可得此方程组的系数行列式为

$$D = \sigma^2[(\sigma + u\tau)^2 - (\tau k)^2].$$

以(17.3.17)代入并化简，再利用(17.6.16)，可得

$$D = \frac{e^{-2u}}{u^2 - k^2}\left(\frac{\mathrm{sh}k}{k}\right)^2(2 + \varDelta - T).$$

由引理17.3.1(iii)知$D > 0$，故(17.6.18)有唯一解，由克莱姆法则，易算出

$$q_{12} = \frac{p_{12}\sigma[\sigma^2 + (\sigma u - e^{-u}\mathrm{ch}k)\tau] - \sigma B_{21}}{D}.$$

以(17.3.17)代入并化简，可得

$$q_{12} = \frac{\left[e^{-u} - \left(\mathrm{ch}k - \frac{u}{k}\mathrm{sh}k\right)\right]p_{12} - \left[e^{u} - \left(\mathrm{ch}k - \frac{u}{k}\mathrm{sh}k\right)\right]B_{21}}{\frac{\mathrm{sh}k}{k}(2 + \Delta - T)}.$$

(17.6.19)

此即

$$q_{12} = g p_{12} - h B_{21}.$$

用同样的方法可得(17.6.15)之其余各式,故当 P 为双曲型离散骨架且满足条件 $2 + \Delta - T \neq 0$ 时,连续扩充必定唯一,由 q_{12} 的非负性,引理 17.6.1 及引理 17.3.1,从(17.6.19)可得

$$p_{12} \geqslant \frac{e^{u} - \left(\mathrm{ch}k + \frac{u}{k}\mathrm{sh}k\right)}{e^{-u} - \left(\mathrm{ch}k - \frac{u}{k}\mathrm{sh}k\right)} B_{21}.$$

同样可证(iii)之其余各式.

充分性　设 P 为三阶随机矩阵且满足条件(i)～(iii),P 的迹及行列式仍以 T、Δ 记之,取

$$u = -\frac{1}{2}\ln\Delta, \qquad \mathrm{ch}k = \frac{T-1}{2\sqrt{\Delta}}.$$

依(17.6.15)取定 $q_{ij}(i \neq j, i, j \in E)$,由条件(iii)及引理 17.6.1,$q_{ij}$ 均非负,故可以按(17.6.1)构成 Q — 矩阵,仿定理 17.6.1 的证明,对此 Q — 矩阵有

$$\sum_{i \neq j} q_{ij} = 2u, \qquad V = u^2 - k^2.$$

故知其为双曲型,由定理必要性部分的证明可知,我们所取的 $q_{ij}(i \neq j, i, j \in E)$ 由解形如(17.6.18)的方程组得来,而这样解得的 q_{ij} 又适合 $V = u^2 - k^2$,在此条件下,形如(17.6.18)的方程组与方程组(17.6.2)等价,而(17.6.2)又与方程组

$$p_{ij} = q_{ij}\sigma + A_j\tau, \qquad (i \neq j, i, j \in E).$$

等价,故我们已经将 P 写成(17.3.14)的形式,其中 u 及 k 满足

$$\sum_{i \neq j} q_{ij} = 2u, \qquad k^2 = V - u^2, \qquad (k > 0).$$

故 P 确为双曲型离散骨架，其对应的 Q 由(17.6.1)及(17.6.15)给出.

定理 17.6.3 任给三阶随机矩阵 P，满足条件 $2+\Delta-T=0$，则 P 为离散骨架的充要条件是 $\Delta>0$，这时 P 必为双曲型离散骨架，并且有唯一的连续扩充，连续扩充的 Q — 矩阵由(17.6.1)给出，其中

$$q_{ij}=\frac{1}{\sigma}p_{ij},\qquad (i\neq j,i,j\in E).\tag{17.6.20}$$

而 σ 由

$$u=-\frac{1}{2}\ln\Delta,\qquad \sigma=\frac{1}{2u}(1-\Delta).\tag{17.6.21}$$

决定.

证明 必要性显然，往证充分性.

对给定的 P，按(17.6.21)取定 u 及 σ，再按(17.6.20)取定 $q_{ij}(i\neq j,i,j\in E)$，显然 q_{ij} 非负，故可按(17.6.1)构成 Q — 矩阵. 对此 Q — 矩阵，我们有

$$\sum_{i\neq j}q_{ij}=\frac{1}{\sigma}\sum_{i\neq j}p_{ij}=\frac{2u}{1-\Delta}(3-T)=2u.$$

直接计算 P 的行列式，可得

$$\begin{aligned}\Delta=1-\sum_{i\neq j}p_{ij}+&\\&+(p_{21}p_{31}+p_{21}p_{32}+p_{23}p_{31}+p_{12}p_{31}+p_{12}p_{32}+\\&+p_{13}p_{32}+p_{12}p_{23}+p_{13}p_{21}+p_{13}p_{23}).\end{aligned}$$

由于 $\sum\limits_{i\neq j}p_{ij}=3-T$ 及 $2+\Delta-T=0$，故知

$$\begin{aligned}v=p_{21}p_{31}+p_{21}p_{32}+p_{23}p_{31}+&\\+p_{12}p_{31}+p_{12}p_{32}+p_{13}p_{32}+&\\+p_{12}p_{23}+p_{13}p_{21}+p_{13}p_{23}=0,&\end{aligned}$$

因此我们有

$$V=\frac{1}{\sigma^2}v=0.$$

即所构造的 Q 为双曲型的，再由(17.3.18)可知 Q 恰为 P 的连续扩

充的 Q — 矩阵. 最后,根据引理 17.3.1, P 只有唯一的连续扩充.

定理 17.6.4 三阶随机矩阵 P 是椭圆型离散骨架的充要条件是

(i) $\varDelta > 0$;

(ii) $|T-1| < 2\sqrt{\varDelta}$;

(iii) 存在 k 使

$$\cos k = \frac{T-1}{2\sqrt{\varDelta}},$$

并且

$$\left[\frac{e^{-u}}{\sin k} - \left(\operatorname{ctg} k - \frac{u}{k}\right)\right]p_{ij} \geqslant \left[\frac{e^{u}}{\sin k} - \left(\operatorname{ctg} k + \frac{u}{k}\right)\right]B_{ji},$$

$$(i \neq j, i, j \in E).$$

其中 $u = -\frac{1}{2}\ln\varDelta$.

这时,对应的 Q — 矩阵由(17.6.1)给出,其中

$$q_{ij} = g p_{ij} - h B_{ji}, \qquad (i \neq j, i, j \in E).$$

$$g = \frac{e^{-u} - \left(\cos k - \frac{u}{k}\sin k\right)}{\frac{\sin k}{k}(2 + \varDelta - T)}, \tag{17.6.22}$$

$$h = \frac{e^{u} - \left(\cos k + \frac{u}{k}\sin k\right)}{\frac{\sin k}{k}(2 + \varDelta - T)}.$$

对于适合条件的三阶随机矩阵 P,取 $u = -\frac{1}{2}\ln\varDelta$,取定所有适合(iii)的 k,则可以由(17.6.1)和(17.6.22)给出全部的连续扩充所对应的 Q — 矩阵.

证明 必要性 设 P 为椭圆型离散骨架,则存在椭圆型 Q — 矩阵 Q,使 P 可写成(17.3.14)的形式,其中的 u、k、σ、τ 由(17.3.3)及(17.3.16)确定. 由于

$$\sigma = \frac{\sin k}{k}e^{-u} \neq 0.$$

故 $k \neq n\pi$（n 为自然数）. 由推论 17.3.1 立得(i)，(ii) 成立，并且

$$u = -\frac{1}{2}\ln\Delta, \qquad \cos k = \frac{T-1}{2\sqrt{\Delta}}.$$

故 u 由 P 唯一决定，而 k 亦可由 P 定出，仿定理 17.6.1 或定理 17.6.2 之证明，由(17.6.2) 可得关于 q_{12}, q_{13} 的线性方程组

$$\begin{cases} q_{12}[\sigma^2 + (e^{-u}\cos k + \sigma u)\tau + (p_{13} - p_{33})\tau] + q_{13}\tau(p_{32} - p_{12}) = p_{12}\sigma, \\ q_{12}\tau(p_{23} - p_{13}) + q_{13}[\sigma^2 + (e^{-u}\cos k + \sigma u)\tau + (p_{12} - p_{22})\tau] = p_{13}\sigma. \end{cases}$$

(17.6.23)

此方程组之系数行列式为

$$D = \sigma^2[(\sigma + \tau u)^2 + (k\tau)^2] = \frac{\sigma^2}{u^2 + k^2}(2 + \Delta - T) > 0.$$

故(17.6.23) 有唯一解，直接可以解得

$$q_{12} = \frac{[e^{-u} - \cos k + \frac{u}{k}\sin k]p_{12} - (e^{u} - \cos k - \frac{u}{k}\sin k)]B_{21}}{\frac{\sin k}{k}(2 + \Delta - T)}$$

$$= g p_{12} - h B_{21}.$$

由此及 q_{12} 的非负性，易知

$$\left(\frac{e^{-u}}{\sin k} - \operatorname{ctg}k + \frac{u}{k}\right)p_{12} \geqslant \left(\frac{e^{u}}{\sin k} - \operatorname{ctg}k - \frac{u}{k}\right)B_{21}.$$

同理可得(17.6.22) 及条件(iii) 中的其余各式.

充分性　设 P 为三阶随机矩阵且满足条件(i)，(ii)，P 的行列式和迹为 Δ 和 T，取

$$u = -\frac{1}{2}\ln\Delta,$$

并且存在适合

$$\cos k = \frac{T-1}{2\sqrt{\Delta}} (\neq \pm 1)$$

的 k（$\neq n\pi$，n 为自然数）满足条件(iii)，我们按(17.6.22) 取定 q_{ij} （$i \neq j, i, j \in E$），易知 q_{ij} 非负. 依(17.6.1) 构成 Q — 矩阵，则仿定理 17.6.2 之证明可以验证 Q 为椭圆型且利用 Q 将 P 写成(17.3.14) 的形式时，恰有

$$2u = \sum_{i \neq j} q_{ij}.$$

故 P 确为椭圆型离散骨架，当 k 按条件(iii) 取定时，Q 由(17.6.22)决定且 Q 为椭圆型. 故由所有适合条件(iii) 的 k，可以构造出全部对应的 Q，从而按定理中所述的方法构造出 P 的全部连续扩充.

§7　非退化三状态离散骨架的判定

前面两节已经给出了不中断三状态齐次 Markov 链的嵌入问题的完整的解答，因而使这类嵌入问题彻底解决. 但对于非退化情形，椭圆型离散骨架判定准则中的条件(iii) 尚不令人十分满意，因为其中的参数 k 并非确知. 本节我们将作进一步的细致的讨论，给出更加易于进行判别的条件. 为此我们需再引入一些记号.

仍以 T 及 Δ 记三阶随机矩阵 P 的迹及行列式. B_{ij} 为 P 的元素 p_{ij} 在 P 中的代数余子式，在 $\Delta > 0$ 的条件下，我们令

$$\omega = \frac{T-1}{2\sqrt{\Delta}}; \tag{17.7.1}$$

$$\alpha_{ij} = p_{ij} + B_{ji}, \quad (i \neq j, i, j \in E); \tag{17.7.2}$$

$$\beta_{ij} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left[\left(\frac{T-1}{2}\right)\alpha_{ij} + (2 - T + \Delta)B_{ji}\right], \quad (i \neq j, i, j \in E). \tag{17.7.3}$$

再令

$$\Omega = \{(i,j): i, j \in E, i \neq j\}, \tag{17.7.4}$$

$$\Omega_1 = \{(i,j): i, j \in \Omega, \alpha_{ij} > 0\}, \tag{17.7.5}$$

$$\Omega_2 = \{(i,j): i, j \in \Omega, \alpha_{ij} = 0\}. \tag{17.7.6}$$

上述的 α_{ij} 及 β_{ij} 显然是易于计算的，从而 Ω_1, Ω_2 也易于确定.

引理 17.7.1　恒有

(i)　$\alpha_{ij} \geqslant 0$，从而 $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$; $\quad$ (17.7.7)

(ii)　若 $\alpha_{ij} = 0$，则 $\omega \geqslant 1$. $\quad$ (17.7.8)

证明　以 (i,j,k) 记 E 中元素的一个排列，易知有

$$B_{ji} = - p_{ij}p_{kk} + p_{ik}p_{kj},$$

从而

$$\alpha_{ij} = p_{ij}(1 - p_{kk}) + p_{ik}p_{kj} \geqslant 0. \qquad (17.7.9)$$

故(i) 成立. 进一步,若 $\alpha_{ij} = 0$,则由(17.7.9) 可知

$$p_{ij} \wedge (1 - p_{kk}) = 0, \qquad p_{ik} \wedge p_{kj} = 0. \qquad (17.7.10)$$

若 $p_{kk} = 1$,则 $p_{ik} = p_{jk} = 0$,此时必有

$$T = p_{ii} + p_{jj} + p_{kk} = 1 + p_{ii} + p_{jj} \geqslant 1, \qquad (17.7.11)$$

$$\Delta = p_{ii}p_{jj} - p_{ij}p_{ji}.$$

故知

$$(T - 1)^2 - 4\Delta = (p_{ii} - p_{jj})^2 + 4p_{ij}p_{ji} \geqslant 0.$$

即$(T - 1)^2 \geqslant 4\Delta$. 但由(17.7.11)知 $T \geqslant 1$,所以 $T - 1 \geqslant 2\sqrt{\Delta}$,(ii) 成立;若 $p_{kk} < 1$,则由(17.7.10) 必有 $p_{ij} = 0$,如果此时 $p_{ik} = 0$,则将有 $p_{ii} = 1$,仿上所证可知(ii) 亦成立;若 $p_{ik} > 0$,则由(17.7.10) 知 $p_{kj} = 0$,此时

$$\Delta = p_{jj}(T - 1 - p_{jj}) > 0. \qquad (17.7.12)$$

故 $T > 1 + p_{jj}$,但 $T = p_{ii} + p_{jj} + p_{kk}$,故必有

$$p_{ii} + p_{kk} > 1.$$

再由

$$(T - 1)^2 - 4\Delta = (T - 1)^2 - 4p_{jj}(T - 1) + 4p_{jj}^2$$
$$= (T - 1 - 2p_{jj})^2 \geqslant 0. \qquad (17.7.13)$$

故$(T - 1)^2 \geqslant 4\Delta$,但 $T > 1$,故 $T - 1 \geqslant 2\sqrt{\Delta}$,即(ii) 仍成立,综上述,(ii) 得证.

值得指出的是,从上述证明可以看出,引理 17.7.1 的成立只要求 $\Delta > 0$ 的条件,而与 P 是否可嵌入无关;另外,由引理 17.7.1 直接可知:若 $\omega < 1$,则 $\Omega = \Omega_1$.

现将定理 17.6.2 改写成更易于判别的形式

定理 17.7.1 任给三阶随机矩阵 P,若 $2 + \Delta - T \neq 0$,则 P 是双曲型离散骨架的充要条件是:

(i) $\Delta > 0$,且 $\omega > 1$; (17.7.14)

(ii)

$$(\max_{\Omega_1}\frac{2B_{ji}}{\alpha_{ij}})(\frac{1+\Delta}{2\sqrt{\Delta}}-\omega)\leqslant\frac{(-\ln\sqrt{\Delta})\sqrt{\omega^2-1}}{\ln(\omega+\sqrt{\omega^2-1})}+\sqrt{\Delta}-\omega. \tag{17.7.15}$$

当条件满足时,连续扩充唯一.

注 条件(17.7.15)虽然表面形式稍繁,但却容易计算,因而非常便于实际判别.

证明 只需证明(17.7.15)与定理 17.6.2 中条件(iii)的等价性.

将定理 17.6.2 中的条件 iii)作一简单的恒等变形,可知其等价于

$$\frac{u}{k}\operatorname{sh}k(p_{ij}+B_{ji})\geqslant(p_{ij}+B_{ji})(\frac{T-1}{2\sqrt{\Delta}}-\sqrt{\Delta})+ \\ +B_{ji}\frac{1}{\sqrt{\Delta}}(2+\Delta-T),\quad((i,j)\in\Omega). \tag{17.7.16}$$

若 $\alpha_{ij}=p_{ij}+B_{ji}=0$,则由 $p_{ij}\geqslant 0$ 立知 $B_{ji}\leqslant 0$. 但

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}}(2+\Delta-T)>0.$$

故此时(17.7.16)自动成立. 故(17.7.16)成立,当且仅当它对于 $(i,j)\in\Omega_1$ 成立,因而(17.7.16)等价于

$$\alpha_{ij}\geqslant\frac{k}{u\operatorname{sh}k}[\alpha_{ij}(\frac{T-1}{2\sqrt{\Delta}}-\sqrt{\Delta})+ \\ +B_{ji}\frac{1}{\sqrt{\Delta}}(2+\Delta-T)],\quad((i,j)\in\Omega_1). \tag{17.7.17}$$

但当 $(i,j)\in\Omega_1$ 时,$\alpha_{ij}>0$,故(17.7.17)又等价于

$$1\geqslant\frac{k}{u\operatorname{sh}k}[(\frac{T-1}{2\sqrt{\Delta}}-\sqrt{\Delta})+ \\ +\frac{B_{ji}}{\alpha_{ij}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\Delta}}(2+\Delta-T)],\quad((i,j)\in\Omega_1). \tag{17.7.18}$$

注意到 $\operatorname{ch}k=\omega$ 及 $k>0$,易算出

$$\mathrm{sh}k = \sqrt{\omega^2 - 1}, \quad k = \ln(\omega + \sqrt{\omega^2 - 1}).$$

将其代入并稍加整理，即知(17.7.18)与(17.7.15)等价.

用完全相同的方法，可将定理3,2改写成为'

定理 17.7.2 三阶随机矩阵 P 是抛物型离散骨架的充要条件是

(i) $\Delta > 0$, 且 $\omega = 1$;

(ii)

$$\max_{\Omega_1} \frac{2B_{ji}}{\alpha_{ij}} \leqslant \frac{(-\ln\sqrt{\Delta})\cdot 2\sqrt{\Delta}}{(1-\sqrt{\Delta})^2} - \frac{2\sqrt{\Delta}}{1-\sqrt{\Delta}}.$$

为了使定理17.6.4也能写成和上面定理一样易于判别的形式，我们还需要进行一些讨论，为此，有必要将 Ω_1 再作细分，令

$$\Omega_A = \{(i,j):(i,j)\in\Omega, \alpha_{ij}>0, \beta_{ij}>0\},$$

$$\Omega_B = \{(i,j):(i,j)\in\Omega, \alpha_{ij}>0, \beta_{ij}<0\},$$

$$\Omega_C = \{(i,j):(i,j)\in\Omega, \alpha_{ij}>0, \beta_{ij}=0\}.$$

显然 $\Omega_1 = \Omega_A \cup \Omega_B \cup \Omega_C$.

将定理17.6.4中的条件(iii)也作一些简单的恒等变形，易知它等价于：存在 $k>0$, $\cos k = \dfrac{T-1}{2\sqrt{\Delta}} = \omega$，使得

$$\frac{u}{k}(p_{ij}+B_{ji}) \geqslant \frac{1}{\sin k}\Big[(p_{ij}+B_{ji})\cdot\frac{1}{2\sqrt{\Delta}}(T-1-2\Delta) + \\ + \frac{B_{ji}}{\sqrt{\Delta}}(2-T+\Delta)\Big], \quad ((i,j)\in\Omega).$$

或等价地(根据引理17.7.1)

$$\frac{u}{k}\alpha_{ij} \geqslant \frac{1}{\sin k}\beta_{ji}, \quad ((i,j)\in\Omega_1). \qquad (17.7.19)$$

下面我们讨论使(17.7.19)成立的 k 的集合的性质，为此，再引入一些记号，令

$$K = \{k: k>0, \cos k = \frac{T-1}{2\sqrt{\Delta}}\},$$

$$K_1 = \{k: k\in K, \sin k > 0\},$$

$$K_2 = \{k : k \in K, \sin k < 0\}.$$

由于我们限于讨论非退化情况，故$\sin k \neq 0$，从而 $K = K_1 \cup K_2$，当然 K_1 及 K_2 亦可明显表出如下：

$$K_1 = \{k : k = \arccos \frac{T-1}{2\sqrt{\varDelta}} + 2m\pi, m \in N\}. \tag{17.7.20}$$

$$K_2 = \{k : k = \arccos \frac{T-1}{2\sqrt{\varDelta}} + (2m+1)\pi, m \in N\}. \tag{17.7.21}$$

这里 N 表非负整数集. 对于固定的$(i,j) \in \Omega$，令

$K_{ij} = \{k : k \in K$，且 k 使(17.7.19) 对固定的(i,j) 成立$\}$

$\overline{K} = \{k : k \in K$，且 k 使(17.7.19) 对所有的$(i,j) \in \Omega_1$ 成立$\}$.

显然有

$$\overline{K} = \bigcap_{\Omega_1} K_{ij} = (\bigcap_{\Omega_A} K_{ij}) \cap (\bigcap_{\Omega_B} K_{ij}) \cap (\bigcap_{\Omega_C} K_{ij}). \tag{17.7.22}$$

此处约定

$$\bigcap_{\varnothing} K_{ij} = K.$$

我们的目标是要搞清 $\overline{K}$ 的结构，为此先讨论 K_{ij} 的结构.

引理 17.7.2 若$(i,j) \in \Omega_A$，则 $K_2 \subset K_{ij}$，因而

$$K_{ij} = K_2 \cup C_{ij}.$$

其中 $C_{ij} = K_{ij} - K_2 \subset K_1$ 为空集或有限集，进一步，若令

$$\theta = (-\ln \sqrt{\varDelta}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\varDelta}} \sqrt{4\varDelta - (T-1)^2}.$$

则 C_{ij} 非空的充要条件是

$$\arccos \frac{T-1}{2\sqrt{\varDelta}} \leqslant \frac{\alpha_{ij}}{\beta_{ij}} \cdot \theta. \tag{17.7.23}$$

这时

$$|C_{ij}| = \left[\frac{\frac{\alpha_{ij}}{\beta_{ij}} \cdot \theta - \arccos \frac{T-1}{2\sqrt{\varDelta}}}{2\pi} \right] + 1 = n + 1. \tag{17.7.24}$$

($[x]$ 表示 x 的整数部分)

而 C_{ij} 可以明显写出为

$$C_{ij}=\{\arccos\frac{T-1}{2\sqrt{\Delta}}+2m\pi, m=0,1,2,\cdots,n\}.$$

证明 设 $k\in K_2$，则 $\sin k<0$，但 $(i,j)\in\Omega_A$，故 $\alpha_{ij}>0$，$\beta_{ij}>0$. 故(17.7.19)对此 (i,j) 必成立，因而 $k\in K_{ij}$，得证 $K_2\subset K_{ij}$. 若 $k\in C_{ij}$，则 $k\in K_{ij}$ 且 $k\in K_1$，故 $\sin k>0$，因而(17.7.19)成立当且仅当

$$\frac{1}{k}\geqslant\frac{1}{u\sin k}\cdot\frac{\beta_{ij}}{\alpha_{ij}},$$

亦即

$$k\leqslant\frac{\alpha_{ij}}{\beta_{ij}}\cdot u\sin k. \tag{17.7.25}$$

但 $\cos k=\dfrac{T-1}{2\sqrt{\Delta}}$，$\sin k>0$，故

$$\sin k=\sqrt{1-\cos^2 k}=\frac{1}{2\sqrt{\Delta}}\sqrt{4\Delta-(T-1)^2},$$

又 $u=-\ln\sqrt{\Delta}$，从而(17.7.25)即为

$$k\leqslant\frac{\alpha_{ij}}{\beta_{ij}}(-\ln\sqrt{\Delta})\frac{1}{2\sqrt{\Delta}}\sqrt{4\Delta-(T-1)^2}$$

$$=\frac{\alpha_{ij}}{\beta_{ij}}\theta. \tag{17.7.26}$$

此式右边是有限数，而左边的 $k\in K_1$ 如(17.7.20)所定义，故满足条件(17.7.26)的 k 或者不存在，或者存在但至多有有限个，由(17.7.20)易知，K_1 的最小元为 $\arccos\dfrac{T-1}{2\sqrt{\Delta}}$，从而 C_{ij} 非空当且仅当(17.7.23)成立. 至此，引理的各结论已易于得到.

用相同的方法可以证明

引理 17.7.3 若 $(i,j)\in\Omega_B$，则 $K_1\subset K_{ij}$ 因而

$$K_{ij}=K_1\cup C_{ij},$$

其中 $C_{ij}=K_{ij}-K_1\subset K_2$ 为空集或有限集，并且 C_{ij} 非空的充要条件是

$$\pi+\arccos\frac{T-1}{2\sqrt{\Delta}}\leqslant-\frac{\alpha_{ij}}{\beta_{ij}}\cdot\theta. \tag{17.7.27}$$

这时(仍以$[x]$表示x的整数部分)

$$|C_{ij}| = \left[\frac{\frac{-\alpha_{ij}}{\beta_{ij}} \cdot \theta - \arccos\frac{T-1}{2\sqrt{\Delta}} - \pi}{2\pi}\right] + 1$$

$$= n + 1. \tag{17.7.28}$$

而C_{ij}可以明显写出为

$$C_{ij} = \{\arccos\frac{T-1}{2\sqrt{\Delta}} + (2m+1)\pi, m = 0,1,2,\cdots,n\}.$$

引理 17.7.4 若$(i,j) \in \Omega_C$,则$K_{ij} = K_1 \cup K_2 = K$.

证明 当$(i,j) \in \Omega_C$时,$\beta_{ij} = 0$.故所有$k \in K$使(17.7.19)成立.

由引理17.7.4.(17.7.22)可以写为

$$\overline{K} = (\bigcap_{\Omega_A} K_{ij}) \cap (\bigcap_{\Omega_B} K_{ij}). \tag{17.7.29}$$

现在,下面的两条引理已属显然,故我们述而不证.

引理 17.7.5 $K_2 \subset \bigcap_{\Omega_A} K_{ij}$因而

$$\bigcap_{\Omega_A} K_{ij} = K_2 \cup C_A,$$

其中

$$C_A = \bigcap_{\Omega_A} K_{ij} - K_2 \subset K_1$$

为空集或有限集.C_A非空的充要条件是

$$\arccos\frac{T-1}{2\sqrt{\Delta}} \leqslant (\min_{\Omega_A}\frac{\alpha_{ij}}{\beta_{ij}})\theta. \tag{17.7.30}$$

这时(仍以$[x]$表示x的整数部分)

$$|C_A| = \left[\frac{(\min_{\Omega_A}\frac{\alpha_{ij}}{\beta_{ij}})\theta - \arccos\frac{T-1}{2\sqrt{\Delta}}}{2\pi}\right]$$

$$= n + 1. \tag{17.7.31}$$

而C_A可以明显写出为

$$C_A = \{\arccos\frac{T-1}{2\sqrt{\Delta}} + 2m\pi, m = 0,1,2,\cdots,n\}. \tag{17.7.32}$$

引理 17.7.6

$$K_1 \subset \bigcap_{\Omega_B} K_{1j},$$

因而

$$\bigcap_{\Omega_B} K_{1j} = K_1 \cup C_B.$$

其中

$$C_B = \bigcap_{\Omega_B} K_{ij} - K_1 \subset K_2.$$

为空集或有限集，C_B 非空的充要条件是

$$\arccos \frac{T-1}{2\sqrt{\Delta}} + \pi \leqslant (\min_{\Omega_B} \frac{\alpha_{ij}}{-\beta_{ij}})\theta. \qquad (17.7.33)$$

这时（仍以 $[x]$ 表示 x 的整数部分）

$$|C_B| = \left[\frac{(\min_{\Omega_B} \frac{\alpha_{ij}}{-\beta_{ij}})\theta - \arccos \frac{T-1}{2\sqrt{\Delta}} - \pi}{2\pi}\right]$$

$$= n + 1. \qquad (17.7.34)$$

而 C_B 可以明显写出为

$$C_B = \{\arccos \frac{T-1}{2\sqrt{\Delta}} + (2m+1)\pi, m = 0,1,2,\cdots,n\}.$$

$$(17.7.35)$$

由此可以看到，若 $\Omega_A \neq \varnothing$ 且 $\Omega_B \neq \varnothing$，则 $\overline{K} = C_A \cup C_B$. 且 $\overline{K}$ 为空集或有限集并能明显写出，下面我们再证明一条引理.

引理 17.7.7 设 P 是三阶随机矩阵，$\Delta = |P| > 0$，且 $\forall (i,j) \in \Omega, \alpha_{ij} > 0$，那么只有两种可能情况发生：或者 $\Omega_A \cup \Omega_B = \varnothing$，或者 $\Omega_A \neq \varnothing$ 且 $\Omega_B \neq \varnothing$.

证明 用反证法，设结论不真，则尚有两种情况可能发生，即或者 $\Omega_A \neq \varnothing$ 且 $\Omega_B = \varnothing$，或者 $\Omega_A = \varnothing$ 且 $\Omega_B \neq \varnothing$.

若 $\Omega_A \neq \varnothing$ 而 $\Omega_B = \varnothing$，则对所有的 $(i,j) \in \Omega, \beta_{ij} \geqslant 0$，且存在 $(i,j) \in \Omega$ 使 $\beta_{ij} > 0$ 即

$$\forall (i,j) \in \Omega, (\frac{T-1}{2} - \Delta)(p_{ij} + B_{ji}) \geqslant (2 + \Delta - T)(-B_{ji}).$$

$\exists\ (i,j) \in \Omega, (\frac{T-1}{2} - \varDelta)(p_{ij} + B_{ji}) > (2 + \varDelta - T)(-B_{ji})$,
从而

$$(\frac{T-1}{2} - \varDelta)\sum_{i\neq j}(p_{ij} + B_{ji}) > (2 + \varDelta - T)\sum_{i\neq j}(-B_{ji}). \tag{17.7.36}$$

注意到

$$\sum_{i\neq j} p_{ij} = 3 - T$$

及

$$\sum_{i\neq j} B_{ji} = 3\varDelta - \sum_{i} B_{ii} = 3\varDelta - S,$$

则由(17.7.36)有

$$(\frac{T-1}{2} - \varDelta)(3 - T + 3\varDelta - S) > (2 - T + \varDelta)(S - 3\varDelta).$$

整理得

$$\frac{T-1}{2}(3-T) - \varDelta(3-T) + \frac{3}{2}\varDelta(3-T) = (\frac{3-T}{2})S.$$

由于我们限于讨论非退化情况,故$T<3$而$3-T>0$ 约去$3-T$后再变形可得

$$T + \varDelta - 1 > S. \tag{17.7.37}$$

另一方面,于(17.6.9)中我们已有$T + \varDelta - 1 = S$,故得矛盾.

同样地,若$\Omega_A = \varnothing$但$\Omega_B \neq \varnothing$,则将导出

$$T + \varDelta - 1 < S = T + \varDelta - 1,$$

亦得矛盾,因而引理得证.

最后,我们证明,当$\Omega_A \cup \Omega_B = \varnothing$时,$P$必可嵌入且连续扩充唯一.

引理 17.7.8 若$\Omega_A \cup \Omega_B = \varnothing$,则$P$可嵌入且有唯一的连续扩充.

证明 因$\Omega_A \cup \Omega_B = \varnothing$,故$\Omega = \Omega_C$,故$\forall\ i \neq j, \beta_{ij} = 0$即

$$(p_{ij} + B_{ji})(\frac{T-1}{2} - \varDelta) + B_{ji}(2 - T + \varDelta) = 0,$$

亦即

$$(e^{-u} - \cos k)p_{ij} = (e^{u} - \cos k)B_{ji} \quad (\forall\ i \neq j). \qquad (17.7.38)$$

此时定理 17.6.4 的条件(iii)自然满足. 故 P 必可嵌入，又由(17.7.38)及(17.6.22)知

$$\begin{aligned} q_{ij} &= g p_{ij} - h B_{ji} \\ &= \frac{e^{-u} - \cos k + \frac{u}{k}\sin k}{\frac{\sin k}{k}(2 + \varDelta - T)} p_{ij} - \frac{e^{u} - \cos k - \frac{u}{k}\sin k}{\frac{\sin k}{k}(2 + \varDelta - T)} B_{ji} \\ &= \frac{1}{\frac{\sin k}{k}(2 + \varDelta - T)} \left(\frac{u}{k}\sin k \cdot p_{ij} + \frac{u}{k}\sin k \cdot B_{ji}\right) \\ &= \frac{u}{2 + \varDelta - T}(p_{ij} + B_{ji}) \\ &= \frac{u}{2 + \varDelta - T}\alpha_{ij}. \end{aligned}$$

故 Q 由 P 确定，从而连续扩充唯一.

现在我们亦可将定理 17.6.4 改写成下面的易于判别的形式.

定理 17.7.3 三阶随机矩阵 P 是椭圆型离散骨架的充要条件是

(i) $\varDelta > 0$ 且 $-1 < \omega < 1$,

(ii) 或者 $\Omega_A \cup \Omega_B = \varnothing$，或者 Ω_A 及 Ω_B 均非空且关系式

$$\arccos \frac{T-1}{2\sqrt{\varDelta}} \leqslant \left(\min_{\Omega_A} \frac{\alpha_{ij}}{\beta_{ij}}\right)\theta. \qquad (17.7.39)$$

$$\arccos \frac{T-1}{2\sqrt{\varDelta}} + \pi \leqslant \left(\min_{\Omega_B} \frac{\alpha_{ij}}{-\beta_{ij}}\right)\theta \qquad (17.7.40)$$

中至少一个成立.

这时，P 至多只有有限多个连续扩充，而连续扩充唯一的充要条件是：或者 $\Omega_A \cup \Omega_B = \varnothing$，或者关系式

$$\arccos \frac{T-1}{2\sqrt{\varDelta}} \leqslant \left(\min_{\Omega_A} \frac{\alpha_{ij}}{\beta_{ij}}\right)\theta < \arccos \frac{T-1}{2\sqrt{\varDelta}} + 2\pi,$$

$$\arccos\frac{T-1}{2\sqrt{\Delta}}+\pi\leqslant(\min_{\Omega_B}\frac{\alpha_{ij}}{-\beta_{ij}})\theta<\arccos\frac{T-1}{2\sqrt{\Delta}}+3\pi$$

中必有且仅有一个成立.

证明　由前述各引理立得.

总结所有的定理,我们可以得到判定三阶离散骨架的十分具体的步骤如后面的附表,在这个表中,我们只标明了连续扩充的存在性及唯一性,当连续扩充不唯一时,连续扩充的个数及全部连续扩充的构造没有在表中指出,它们都可以根据相应各节中的定理作出完整的回答,可以构造例子以说明表中的各种情况的存在性,但限于篇幅,不一一列举.

附表　三阶离散骨架的判定

(一) 退化情形

设 P 由(17.5.1)给出.

1　当 $x+y+z=1$ 时,P 不可嵌入;

2　当 $x+y+z\neq 1$ 时,

(1)　P 为抛物型离散骨架,当且仅当 $0\leqslant x+y+z<1$;此时,连续扩充唯一.

(2)　P 为椭圆型离散骨架,当且仅当下列条件之一成立:

(i)　$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{x}$ 而 $\frac{x\ln^2|1-(x+y+z)|}{\lambda\pi^2(y+z)}\geqslant 1$;

(ii)　$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}<\frac{1}{y}$ 而 $\frac{y\ln^2|1-(x+y+z)|}{\lambda\pi^2(x+z)}\geqslant 1$;

(iii)　$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}<\frac{1}{z}$ 而 $\frac{z\ln^2|1-(x+y+z)|}{\lambda\pi^2(x+y)}\geqslant 1$;

(iv)　$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{x},\frac{1}{x}+\frac{1}{z}<\frac{1}{y},\frac{1}{x}+\frac{1}{y}<\frac{1}{z}$ 均不成立而

$$\frac{\ln^2|1-(x+y+z)|}{\lambda\pi^2}\left[\frac{4xyz(x+y+z)}{(xy+xz+yz)^2}-1\right]\geqslant 1;$$

其中 $xyz \neq 0$,而

$$\lambda = \begin{cases} 1, & x + y + z > 1; \\ 4, & x + y + z < 1. \end{cases}$$

此时,若条件中的等号成立,则 P 恰有两个椭圆型连续扩充;否则 P 有无穷多个椭圆型连续扩充.

(3) P 必不为双曲型离散骨架.

（二） **非退化情形**

设 P 为非退化三阶随机矩阵,沿用 §6—§7 所有记号,但作以下补充:

$$m_A = (\min_{\Omega_A} \frac{\alpha_{ij}}{\beta_{ij}})\theta,$$

$$m_B = (\min_{\Omega_B} \frac{\alpha_{ij}}{-\beta_{ij}})\theta,$$

$$\varphi = \arc\cos \frac{T-1}{2\sqrt{\Delta}},$$

$$\mu_1 = (\max_{\Omega_1} \frac{2B_{ji}}{\alpha_{ij}})(\frac{1+\Delta}{2\sqrt{\Delta}} - \omega)$$

$$- \frac{(-\ln\sqrt{\Delta})\sqrt{\omega^2-1}}{\ln(\omega+\sqrt{\omega^2-1})} +$$

$$+ \omega - \sqrt{\Delta} \quad (\text{当 } \omega > 1 \text{ 时}),$$

$$\mu_2 = (\max_{\Omega_1} \frac{2B_{ji}}{\alpha_{ij}})$$

$$- \frac{2\sqrt{\Delta}(-\ln\sqrt{\Delta})}{(1-\sqrt{\Delta})^2} +$$

$$+ \frac{2\sqrt{\Delta}}{(1-\sqrt{\Delta})}, \quad (\text{当 } \omega = 1 \text{ 时}).$$

1 $\Delta \leqslant 0$ 时,P 不可嵌入;

2 $\Delta > 0$ 时,

(1) $\omega \leqslant -1$ 时,P 不可嵌入;

(2) $\omega > 1$

$$\begin{cases} 2+\Delta-T\neq 0 \begin{cases} \mu_1>0, P \text{ 不可嵌入；} \\ \mu_1\leqslant 0, P \text{ 为双曲型骨架} \\ \qquad \text{且连续扩充唯一；} \end{cases} \\ 2+\Delta-T=0, P \text{ 为双曲型骨架} \\ \qquad \text{且连续扩充唯一.} \end{cases}$$

(3) $\omega=1\begin{cases} \mu_2>0, P \text{ 不可嵌入；} \\ \mu_2\leqslant 0, P \text{ 为抛物型骨架} \\ \qquad \text{且连续扩充唯一.} \end{cases}$

(4) $|\omega|<1$

(i) $\Omega_A\neq\varnothing, \Omega_B=\varnothing, P$ 不可嵌入；

(ii) $\Omega_A=\varnothing, \Omega_B\neq\varnothing, P$ 不可嵌入；

(iii) $\Omega_A\cup\Omega_B=\varnothing, P$ 为椭圆型骨架且连续扩充唯一.

(iv) $\Omega_A\neq\varnothing, \Omega_B\neq\varnothing$.

(a) $m_A\geqslant\varphi$,

$$\begin{cases} m_B\geqslant\varphi+\pi, P \text{ 为椭圆型骨架，连续扩充不唯一，} \\ \qquad \text{且有有限多个.} \\ m_B<\varphi+\pi \begin{cases} m_A\geqslant\varphi+2\pi, P \text{ 为椭圆型骨架，连续扩充不唯一，} \\ \qquad \text{且有有限多个；} \\ m_A<\varphi+2\pi, P \text{ 为椭圆型骨架且连续扩充唯一.} \end{cases} \end{cases}$$

(b) $m_A<\varphi$,

$$\begin{cases} m_B<\varphi+\pi, P \text{ 不可嵌入；} \\ \varphi+\pi\leqslant m_B<\varphi+3\pi, P \text{ 为椭圆型骨架且连续扩充唯一；} \\ m_B\geqslant\varphi+3\pi, P \text{ 为椭圆型骨架，连续扩充不唯一，} \\ \qquad \text{且有有限多个.} \end{cases}$$

§8 补充与注记

G. Elfving[1] 于 1937 年提出 Markov 链的嵌入问题后，D. G. Kendall 首先给出两状态情形的嵌入问题的解答，他的结果在 J. F. C. Kingman[1] 的论文中宣布；王梓坤、吴立德也得到了这一结果

(见王梓坤[1]). 但这些结果都限于不中断情形. 肖果能、陈安岳[1]讨论了两状态可中断齐次 Markov 链的嵌入问题. 肖果能[3]还研究了二阶离散骨架的行向量的特征. 关于三状态嵌入问题的研究,S. Johansen[1]在1974年曾给出三状态情形连续扩充存在的条件,但其结果并不完备. 肖果能[4]完成了对三阶有势 Markov 过程的离散骨架的研究. 肖果能[5]还对一类三阶双随机型离散骨架,肖果能、陈安岳[4]对三阶对称型离散骨架作了研究. 这些都是关于三状态嵌入问题的一些特殊情形的结果. 关于一般三状态嵌入问题,肖果能、陈安岳[3]将其划分为退化情形与非退化情形,分别讨论了存在性问题、唯一性问题及构造问题.

18 更新序列与 P—函数

§1 更新序列

定义 18.1.1 一个数列 $f=(f_1,f_2,\cdots)$ 叫做一个 $f-$ 序列，如果

$$f_r \geqslant 0, \qquad r=1,2,\cdots, \tag{18.1.1}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} f_r \leqslant 1. \tag{18.1.2}$$

定义 18.1.2 一个数列 $u=(u_1,u_2,\cdots)$ 叫做一个更新序列，如果存在一个 $f-$ 序列 $f=(f_1,f_2,\cdots)$，使得

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_n = \sum_{r=1}^{n} f_r u_{n-r}, \qquad n=1,2,\cdots. \end{cases} \tag{18.1.3}$$

f 叫做 u 的 $f-$ 序列. 有时，u 叫做由 f 产生的更新序列.

显然 $f-$ 序列和由它产生的更新序列相互唯一决定. 确切言之，有下列结果：

定理 18.1.1 设 $f=(f_n)$ 是一个 $f-$ 序列，u 是由 f 产生的更新序列，则

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_n = \sum_{r=1}^{n} \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_r=n} f_{i_1} f_{i_2} \cdots f_{i_r}, \end{cases} \tag{18.1.4}$$

和

$$f_n = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_r=n} u_{i_1} u_{i_2} \cdots u_{i_r}. \tag{18.1.5}$$

证明 对 n 用归纳法.

由(18.1.5)可以得到如下的有用的结果：

定理 18.1.2 一个数列 $u=(u_n)$ 是一个更新序列的充要条件是

$$0 \leqslant u_n \leqslant 1 \tag{18.1.6}$$

和

$$\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_r=n} u_{i_1}u_{i_2}\cdots u_{i_r} \geqslant 0, n=1,2,\cdots \tag{18.1.7}$$

同时成立. 其中 $i_1, i_2, \cdots, i_r$ 是正整数.

下面的两个定理表明，更新序列可视为随机矩阵 (p_{ij}) 及其各阶乘积 $(p_{ij}^{(n)})$ 的对角线元素. 这里，

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k\in S} p_{ik}^{(n-1)} p_{kj}, n = 1,2,\cdots.$$

定理 18.1.3 设 (p_{ij}) 为一个随机矩阵. 即

$$p_{ij} \geqslant 0, \qquad \sum_{j\in S} p_{ij} = 1. \tag{18.1.8}$$

对任意 $a \in S$，令 $u_n = p_{aa}^{(n)}$，则 $u=(u_n)$ 是一个更新序列. 其中

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k\in S} p_{ik}^{(n-1)} p_{kj}, n = 1,2,\cdots. \tag{18.1.9}$$

$$p_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 1 & i = j; \\ 0 & i \neq j. \end{cases} \tag{18.1.10}$$

证明 只需找出 u_n 的 $f-$ 序列. 令

$$f_n = \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_{n-1} \neq a} p_{ai_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} a}.$$

则

$$f_n \geqslant 0; \tag{18.1.11}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \leqslant 1. \tag{18.1.12}$$

且

$$u_n = p_{aa}^{(n)} = \sum_{k\in S} p_{ak}^{(n-1)} p_{ka}$$

$$= \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_{n-1} \in S} p_{ai_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} a}$$

$$=\sum_{r=1}^{n}\Big(\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_{r-1}\neq a} p_{ai_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{r-1}a}\Big)\Big(\sum_{j_1,j_2,\cdots,j_{n-r-1}\in S} p_{aj_1}p_{j_1j_2}\cdots p_{j_{n-r-1}a}\Big)$$

$$=\sum_{r=1}^{n} f_r u_{n-r}. \tag{18.1.13}$$

定理 18.1.4 若 $u=(u_n)$ 是一个更新序列，则存在一个随机矩阵及一个状态 $a\in S$，使对所有 n，

$$u_n = p_{aa}^{(n)}. \tag{18.1.14}$$

证明 记

$$g_n = 1-\sum_{m=1}^{n} f_m, \tag{18.1.15}$$

$$N=\sup\{n: g_n>0\}\leqslant\infty. \tag{18.1.16}$$

对 $0\leqslant j\leqslant N$. 令

$$p_{ij}=\begin{cases} g_{i+1}/g_i, & \text{如 } j=i+1,\\ f_{i+1}/g_i, & \text{如 } j=0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases} \tag{18.1.17}$$

则易证 $p_{00}^{(n)}=u_n$.

§2 更新序列关于圈乘运算的封闭性

定义 18.2.1 设 $u=(u_n)$ 和 $v=(v_n)$ 是两个更新序列. 令

$$w_n=u_nv_n,\qquad n=1,2,\cdots.$$

称 $w=(w_1,w_2,\cdots)$ 为 u 和 v 的圈积. 并记 $w=u\otimes v$. "$\otimes$" 叫做 Kingman 圈乘运算. 简称圈乘运算.

我们将证明，全体更新序列所构成的集合 R 对圈乘运算是封闭的. 在这个运算下，R 构成一个可交换的(可结合)半群，从而可引入一些新的概念和导出一系列重要而深入的结果.

定理 18.2.1 设 $u=(u_n)$ 和 $v=(v_n)$ 是两个更新序列，则 $w=(u_nv_n)$ 也是更新序列.

证明 设 $g=(g_n)$ 和 $h=(h_n)$ 分别是 u 和 v 的 f－序列. 记

$$w_n = u_n v_n, \tag{18.2.1}$$

$$f_n = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_r=n} w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_r}, \quad n = 1,2,\cdots. \tag{18.2.2}$$

则

$$\begin{cases} w_0 = 1, \\ 0 \leqslant w_n \leqslant 1, \qquad n = 1,2,\cdots. \end{cases} \tag{18.2.3}$$

由(18.2.1),(18.2.2)和(18.2.3)得

$$\begin{aligned}
f_n &= \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_r=n} w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_r} \\
&= \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_r=n} u_{i_1} u_{i_2} \cdots u_{i_r} v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_r} \\
&= \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_r=n} \Big(\sum_{t_1=1}^{i_1} \sum_{n_1^{(1)}+n_2^{(1)}+\cdots+n_{t_1}^{(1)}=i_1} g_{n_1^{(1)}} g_{n_2^{(1)}} \cdots g_{n_{t_1}^{(1)}} \Big) \\
&\quad \cdots \Big(\sum_{t_r=1}^{i_r} \sum_{n_1^{(r)}+n_2^{(r)}+\cdots+n_{t_r}^{(r)}=i_r} g_{n_1^{(r)}} g_{n_2^{(r)}} \cdots g_{n_{t_r}^{(r)}} \Big) \\
&\quad \Big(\sum_{l_1=1}^{i_1} \sum_{m_1^{(1)}+m_2^{(1)}+\cdots+m_{l_1}^{(1)}=i_1} h_{m_1^{(1)}} h_{m_2^{(1)}} \cdots h_{m_{l_1}^{(1)}} \Big) \\
&\quad \cdots \Big(\sum_{l_r=1}^{i_r} \sum_{m_1^{(r)}+m_2^{(r)}+\cdots+m_{l_r}^{(r)}=i_r} h_{m_1^{(r)}} h_{m_2^{(2)}} \cdots h_{m_{l_r}^{(r)}} \Big) \\
&= \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \sum_{\substack{i_1+i_2+\cdots+i_r=n \\ t_1,l_1=1,2,\cdots,i_1 \\ \cdots \\ t_r,l_r=1,2,\cdots,i_r}} \sum_{\substack{n_1^{(1)}+n_2^{(1)}+\cdots+n_{t_1}^{(1)}=m_1^{(1)}+m_2^{(1)}+\cdots+m_{l_1}^{(1)}=i_1 \\ \cdots \\ n_1^{(r)}+n_2^{(r)}+\cdots+n_{t_r}^{(r)}=m_1^{(r)}+m_2^{(r)}+\cdots+m_{l_r}^{(r)}=i_r}} \\
&\quad g_{n_1^{(1)}} \cdots g_{n_{t_1}^{(1)}} \cdots g_{n_1^{(r)}} \cdots g_{n_{t_r}^{(r)}} h_{m_1^{(1)}} \cdots h_{m_{l_1}^{(1)}} \cdots h_{m_1^{(r)}} \cdots h_{m_{l_r}^{(r)}} \\
&= \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} G_{(r)}.
\end{aligned} \tag{18.2.4}$$

显然上式中任一项中 g 的足标之和与 h 的足标之和均等于 n,故合

并相同的项(这里认为例如 $g_1g_{n-1}h_1h_{n-1}$ 与 $g_{n-1}g_1h_{n-1}h_1$ 是不相同的项)后,就可写成

$$f_n = \sum_{l=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_l=m_1+m_2+\cdots+m_s=n} a_{n_1n_2\cdots n_lm_1m_2\cdots m_s}g_{n_1}g_{n_2}\cdots g_{n_l}h_{m_1}h_{m_2}\cdots h_{m_s}. \tag{18.2.5}$$

下面来决定(18.2.5)中的系数 $a_{n_1n_2\cdots n_lm_1m_2\cdots m_s}$. 容易看出一个项 $g_{n_1}g_{n_2}\cdots g_{n_l}h_{m_1}h_{m_2}\cdots h_{m_s}$ 包含在 $G^{(r)}$ 里当且仅当足标 $n_1,n_2,\cdots,n_l$ 和 $m_1,m_2,\cdots,m_s$ 能分别分成 r 段,使得每段足标之和顺序对应相等. 现假定 $n_1,n_2,\cdots,n_l$ 和 $m_1,m_2,\cdots,m_s$ 最多能分别分成 r 段使得对应段之和相等,于是 $g_{n_1}g_{n_2}\cdots g_{n_l}h_{m_1}h_{m_2}\cdots h_{m_s}$ 在且仅在 $G^{(1)},G^{(2)},\cdots,G^{(r)}$ 中出现,且 $G^{(j)}(1\leqslant j\leqslant r)$ 中出现的次数为 C_{r-1}^{j-1}. 于是当 $r>1$ 时,就有

$$a_{n_1n_2\cdots n_lm_1m_2\cdots m_s} = \sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}C_{r-1}^{j-1} = 0.$$

故

$$f_n = \sum_{l=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\sum_{\substack{n_1+n_2+\cdots+n_l=m_1+m_2+\cdots+m_r=n\\ n_1+n_2+\cdots+n_k\neq m_1+m_2+\cdots+m_q\\ k=1,2,\cdots,l-1;q=1,2,\cdots,r-1}} g_{n_1}g_{n_2}\cdots g_{n_l}h_{m_1}h_{m_2}\cdots h_{m_r}. \tag{18.2.6}$$

这说明

$$f_n\geqslant 0,\qquad n=1,2,\cdots. \tag{18.2.7}$$

故由定理 18.1.2 知 $f=(f_n)$ 是一个 $f-$ 序列. $w=u\otimes v$ 是一个由 f 产生的更新序列.

§3 P — 函数及其圈乘运算的封闭性

更新序列在连续情形下的模仿是 $P-$ 函数.

定义 18.3.1 函数族 $F=\{F_n(t_1,t_2,\cdots,t_n),n\geqslant 1,t_i\geqslant 0\}$ 叫做一个 $F-$ 函数族,如果对任意 $n\geqslant 1,t_i\in[0,\infty),i=1,2,\cdots,n$.

$$\begin{cases} F_r(t_1, t_2, \cdots, t_r) \geqslant 0, & r = 1, 2, \cdots, \\ \sum_{r=1}^{n} F_r(t_1, t_2, \cdots, t_r) \leqslant 1. \end{cases} \tag{18.3.1}$$

定义 18.3.2 设 $p(t)(t > 0)$ 是一个有限非负函数，对任意 $n \geqslant 1, t_1, t_2, \cdots, t_n > 0$，令

$$F_n(t_1, t_2, \cdots, t_n; p)$$
$$= \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_r=n} p(t_1 + \cdots + t_{i_1}) p(t_{i_1+1} + \cdots + t_{i_1+i_2}) \cdots$$
$$p(t_{i_1+i_2+\cdots+i_{r-1}+1} + \cdots + t_{i_1+i_2+\cdots+i_r}). \tag{18.3.2}$$

如果函数族 $F_p = \{F_n(t_1, t_2, \cdots, t_n; p), n \geqslant 1, t_1, t_2, \cdots, t_n \in [0, \infty)\}$ 是一个 $F-$ 函数族，则称 $p(t)$ 为 $P-$ 函数.

由(18.3.2)，仿定理 18.1.1 立得

定理 18.3.1 设 $p(t)(t > 0)$ 是一个 $P-$ 函数，则对任意 $n \geqslant 1, t_1, t_2, \cdots, t_n \in (0, \infty)$，我们有

$$p(t_1 + t_2 + \cdots + t_n) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_r=n}$$
$$F_{i_1}(t_1, t_2, \cdots, t_{i_1}; p) F_{i_2}(t_{i_1+1} + t_{i_1+2} + \cdots + t_{i_1+i_2}; p) \cdots$$
$$F_{i_r}(t_{i_1+i_2+\cdots+i_{r-1}+1}, t_{i_1+i_2+\cdots+i_{r-1}+2}, \cdots, t_{i_1+i_2+\cdots+i_r}; p). \tag{18.3.3}$$

由(18.3.2)和定理 18.3.1 知 $P-$ 函数 $p(t), t \geqslant 0$ 与 $F-$ 函数族 $F_p = \{F_n(t_1, t_2, \cdots, t_n; p), n \geqslant 1, t_1, t_2, \cdots, t_n \in (0, \infty)\}$ 相互唯一决定. 因此，我们把 $p(t), t \geqslant 0$ 叫做由 $F-$ 函数族 F_p 产生的 $P-$ 函数.

定义 18.3.3 设 $p(t), q(t), t \in (0, \infty)$ 为两个 $P-$ 函数，令 $R(t) = p(t)q(t)$. 称 $R(t), t \in (0, \infty)$ 为 p 与 q 的圈积，并记为 $R = p \otimes q$. "$\otimes$" 叫做 $P-$ 函数的 Kingman 圈乘运算. 简称为圈乘运算.

仿定理 18.3.1 的证明，可证

定理 18.3.2 任意两个 $P-$ 函数的圈积也是 $P-$ 函数.

由定义易证明下面的定理

定理 18.3.3 设 $(p_{ij}(t))$ 是一个马氏过程，则对任意 $i, p_{ii}(t)$ 是一个 $P-$ 函数.

§ 4　标准 P — 函数

在 P — 函数理论中，一类特殊的 P — 函数即标准 P — 函数占有重要地位.

定义 18.4.1　设 $p(t)\quad(t>0)$ 为一个 P — 函数，如果

$$\lim_{t\downarrow 0}p(t)=1. \tag{18.4.1}$$

则称 $p(t)$ 为标准 P — 函数. 对于标准 P — 函数，我们常令

$$p(0)=1. \tag{18.4.2}$$

此后，我们只考虑标准 P — 函数. 全体标准 P — 函数的集合记为 $\mathscr{P}$.

定理 18.4.1　设 $p\in\mathscr{P}$. 则

(i)　$p(t)>0,\quad \forall\, t\geqslant 0;$　(18.4.3)

(ii)　$p(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上一致连续；

(iii)　$q=\lim\limits_{t\downarrow 0}\dfrac{1-p(t)}{t}\leqslant\infty$　(18.4.4)

存在，而且

$$p(t)\geqslant e^{-qt}. \tag{18.4.5}$$

证明　在(18.3.2)中取 $n=2$，则由(18.3.1)得

$$p(s+t)\geqslant p(s)p(t). \tag{18.4.6}$$

从而对 $\forall\, n\geqslant 1$,

$$p(t)\geqslant\left(p\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n. \tag{18.4.7}$$

因 $\lim\limits_{t\downarrow 0}p(t)=1$. 故存在 $t_0>0$，使当 $t<t_0$ 时，$p(t)>0$. 对 $t>t_0$，令 $n>\dfrac{t}{t_0}$，则 $\dfrac{t}{n}<t_0$. 从而 $p\left(\dfrac{t}{n}\right)>0$，故由(18.4.7)也有 $p(t)>0$. (18.4.3)得证.

仍由(18.3.1)和(18.3.2)得

$$-p(t)[1-p(s)]\leqslant p(s+t)-p(t)\leqslant(1-p(s))(1-p(t)).$$

故

$$|p(s+t)-p(t)|\leqslant 1-p(s).$$

即

$$|p(t_1) - p(t_2)| \leqslant 1 - p(|t_2 - t_1|). \qquad (18.4.8)$$

从而 $p(t)$ 一致连续.

因 $0 < p(t) \leqslant 1$,令

$$\varphi(t) = -\log p(t).$$

则 $\varphi(t)$ 为非负有限值函数.而且

$$\varphi(s+t) \leqslant \varphi(s) + \varphi(t).$$

令

$$q = \sup_{t>0} \frac{\varphi(t)}{t}. \qquad (18.4.9)$$

则

$$q = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\varphi(t)}{t}. \qquad (18.4.10)$$

因 $p(t) \to 1$,故 $\varphi(t) \to 0$. 因此

$$\frac{1-p(t)}{t} = \frac{1-e^{-\varphi(t)}}{t} \sim \frac{\varphi(t)}{t}.$$

(18.4.4) 得证.再由(18.4.9) 立得(18.4.5).

§5 Kingman 不等式及其改进

设 $p \in \mathscr{P}$,则由(18.3.1)和(18.3.2)的变形,对 $n \geqslant 1, 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$,我们有

$$F(t_1, t_2, \cdots, t_n; p) \geqslant 0, \qquad (18.5.1)$$

$$G(t_1, t_2, \cdots, t_n; p) \geqslant 0. \qquad (18.5.2)$$

这里,

$$F(t_1, t_2, \cdots, t_n; p) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_r = n} \prod_{k=1}^{r} p(t_{i_k} - t_{i_{k-1}}), \qquad (18.5.3)$$

$$G(t_1, t_2, \cdots, t_n; p) = 1 - \sum_{r=1}^{n} F(t_1, t_2, \cdots, t_r; p). \qquad (18.5.4)$$

(18.5.1) 和(18.5.2) 统称为 n 阶 Kingman 不等式.

Kingman 不等式在 P — 函数理论中具有重要的作用,由它可以导出许多有意义的结果. 因此,我们希望改进 Kingman 不等式. 事实上,除了在 $p(t)\equiv 1$ 这种情形,$G(t_1,t_2,\cdots,t_n;p)\equiv 0$ 以外,对其它 $p(t)\not\equiv 1$ 的 $p\in\mathscr{P}$,$G(t_1,t_2,\cdots,t_n;p)$ 是严格大于 0 的. 确切地说,我们有

设 $p\in\mathscr{P}$,$p(t)\not\equiv 1$,则对任意的 $0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n<t_{n+1}<\cdots$,

$$G(t_1,t_2,\cdots,t_{n+1};p)\geqslant\frac{1}{2}[G(t_1,t_2,\cdots,t_n;p)]^2,\quad n=1,2,\cdots. \tag{18.5.5}$$

为证以上结果,先证几条引理.

引理 18.5.1 设 $p\in\mathscr{P}$,$0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n$,$n\geqslant 1$,则

$$F(t_1,t_2,\cdots,t_n;p)=F(t_n-t_{n-1},t_n-t_{n-2},\cdots,t_n;p).$$

证明 由(18.4.5)立得.

对 $x\in[0,1]$,由下列方程定义 $B_l(x)$,$C_l(x)$ $(l=0,1,2,\cdots)$:

$$B_0(x)=1;\quad \int_{B_{l+1}(x)}^{1}\frac{B_l(u)}{u}du=1-x,\quad l=0,1,2,\cdots; \tag{18.5.6}$$

$$C_0(x)=x;\quad C_{l+1}(x)=C_l(B_{l+1}(x)),\quad l=0,1,2,\cdots. \tag{18.5.7}$$

引理 18.5.2 对每个 l,$B_l(x)$ 和 $C_l(x)$ 都是 x 的单调增可微函数. 而且

$$x\leqslant B_{l+1}(x)\leqslant B_l(x)\leqslant B_l(1)=1, \tag{18.5.8}$$

$$x\leqslant C_l(x)\leqslant C_{l+1}(x)\leqslant C_l(1)=1, \tag{18.5.9}$$

$$B'_{l+1}(x)=B_{l+1}(x)/B_l(B_{l+1}(x)), \tag{18.5.10}$$

$$C'_l(x)=B_l(x). \tag{18.5.11}$$

对 $l\geqslant 1$,如果 $x<1$,则(18.5.8)和(18.5.9)中的不等式是严格的.

证明　只证(18.5.8). 先证 $B_l(x) \geqslant x$.

对 l 用归纳法. $B_0(x) = 1 \geqslant x$. 设对 $B_l(x) \geqslant x$,则由(18.5.6)

$$1 - x = \int_{B_{l+1}(x)}^{1} \frac{B_l(u)}{u} du \geqslant \int_{B_{l+1}(x)}^{1} du = 1 - B_{l+1}(x).$$

从而　$B_{l+1}(x) \geqslant x$.

于是,$\forall\ l \geqslant 0, B_l(x) \geqslant x$,由此易知 $B_l(x) \leqslant 1$. 往证

$$B_{l+1}(x) \leqslant B_l(x). \qquad (18.5.12)$$

由(18.5.6),

$$\int_{B_1(x)}^{1} \frac{B_0(u)}{u} du = 1 - x.$$

即

$$\int_{B_1(x)}^{1} \frac{du}{u} = 1 - x.$$

$$-\log B_1(x) = 1 - x.$$

$$B_1(x) = e^{-(1-x)} \leqslant 1 = B_0(x).$$

故当 $l = 0$ 时,(18.5.12) 成立.

设　$B_l(x) \leqslant B_{l-1}(x)$,则

$$\int_{B_{l+1}(x)}^{1} \frac{B_l(u)}{u} du = 1 - x = \int_{B_l(x)}^{1} \frac{B_{l-1}(u)}{u} du.$$

因 $B_l(u) \leqslant B_{l-1}(u)$,故由上式知

$$B_{l+1}(x) \leqslant B_l(x).$$

由归纳法原理知(18.5.12) 成立.

在(18.5.6) 中取 $x = 1$,则得

$$\int_{B_{l+1}(1)}^{1} \frac{B_l(u)}{u} du = 0.$$

再由 $B_l(u) \geqslant u$ 知 $B_{l+1}(1) = 1$.

引理 18.5.3　设 $p \in P$,$R(x)$ 是一个定义在[0,1]上的实值函数. 如果对于 $u_1 < u_2$,

$$g(u_2) \geqslant R(p(u_1)) - p(u_1), \qquad (18.5.13)$$

则对 $s_1 < s_2$,

$$p(s_1) \geqslant \frac{R(p(s_2 - s_1))}{p(s_2 - s_1)} - \frac{1 - p(s_2)}{p(s_2 - s_1)}. \tag{18.5.14}$$

证明 重写(18.5.13)为

$$1 - p(u_1) - p(u_2) + p(u_1)p(u_2 - u_1) \geqslant R(p(u_1)) - p(u_1),$$

则

$$p(u_1)p(u_2 - u_1) \geqslant R(p(u_1)) - (1 - p(u_2)).$$

在上式中,令 $u_1 = s_2 - s_1$, $u_2 = s_1$,得

$$p(s_2 - s_1)p(s_1) \geqslant R(p(s_2 - s_1)) - (1 - p(s_2)).$$

两边除以 $p(s_2 - s_1)$ 得(18.5.14).

以下为了方便起见,对固定的 $p \in P$,简记

$$f(t_n) = F(t_1, t_2, \cdots, t_n; p), \tag{18.5.15}$$

$$g(t_n) = 1 - \sum_{r=1}^{n} f(t_r), \tag{18.5.16}$$

其中,$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$.则 $f(t_n) \geqslant 0, g(t_n) \geqslant 0$.

注意 $f(t_n)$ 与 $g(t_n)$ 的值不仅与 t_n 有关,还与 $t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}$ 有关.

引理 18.5.4 设 $p \in P, 0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n, n > 2, 1 \leqslant j \leqslant n-2$,如果

$$p(s_n - s_{n-1}) \geqslant p(s_n - s_{n-2}) \geqslant \cdots \geqslant p(s_n - s_{n-j}) > 0, \tag{18.5.17}$$

则

$$\frac{1 - p(s_n)}{p(s_n - s_{n-j})} \geqslant \sum_{k=1}^{n-j-1} f(s_k)\left(1 - \frac{p(s_n - s_k)}{p(s_n - s_{n-j})}\right) + \sum_{k=1}^{j}\left(1 - \frac{p(s_n - s_{n-k})}{p(s_n - s_{n-k+1})}\right)\frac{R(p(s_n - s_{n-k}))}{p(s_n - s_{n-k})}, \tag{18.5.18}$$

其中 $R(x)$ 是满足(18.5.13)的实值函数.

证明 对 j 用归纳法.首先注意到

$$f(s_r) = p(s_r) - \sum_{k=1}^{r-1} f(s_k)p(s_r - s_k). \tag{18.5.19}$$

记 $M = p(s_n)$,则有

$$1 - M - \sum_{k=1}^{n-1} f(s_k)(1 - p(s_n - s_k)) = 1 - f(s_n) - \sum_{k=1}^{n-1} f(s_k) \geqslant 0.$$

于是

$$1 - M \geqslant f(s_{n-1})(1 - p(s_n - s_{n-1})) + \sum_{k=1}^{n-2} f(s_k)(1 - p(s_n - s_k)). \tag{18.5.20}$$

用(18.5.19)代入上式得

$$1 - M \geqslant p(s_{n-1})(1 - p(s_n - s_{n-1})) + \sum_{k=1}^{n-2} f(s_k)(1 - p(s_n - s_k) - p(s_{n-1} - s_k)(1 - p(s_n - s_{n-1}))). \tag{18.5.21}$$

由引理 18.5.3 得

$$p(s_{n-1}) \geqslant \frac{R(p(s_n - s_{n-1}))}{p(s_n - s_{n-1})} - \frac{1 - M}{p(s_n - s_{n-1})}. \tag{18.5.22}$$

由二阶 Kingman 不等式，我们有

$$p(s_{n-1} - s_k) \leqslant \frac{p(s_n - s_k)}{p(s_n - s_{n-1})}. \tag{18.5.23}$$

将(18.5.22)和(18.5.23)代入(18.5.21)得

$$\frac{1 - M}{p(s_n - s_{n-1})} \geqslant \sum_{k=1}^{n-2} f(s_k)\left(1 - \frac{p(s_n - s_k)}{p(s_n - s_{n-1})}\right) + (1 - p(s_n - s_{n-1}))\frac{R(p(s_n - s_{n-1}))}{p(s_n - s_{n-1})}.$$

故当 $j = 1$ 时，引理 18.5.4 成立.

当 $n = 3$ 时，j 只可能取 1. 故不妨设 $n \geqslant 4$. 假设对 $1 \leqslant j \leqslant n - 3$，(18.5.18) 成立. 往证(18.5.18) 对 $j + 1$ 成立.

由归纳假设，我们有

$$\frac{1 - M}{p(s_n - s_{n-j})} \geqslant \sum_{k=1}^{n-j-1} f(s_k)\left(1 - \frac{p(s_n - s_k)}{p(s_n - s_{n-j})}\right) + \sum_{k=1}^{j}\left(1 - \frac{p(s_n - s_{n-k})}{p(s_n - s_{n-k+1})}\right)\frac{R(p(s_n - s_{n-k}))}{p(s_n - s_{n-k})}$$

$$=p(s_{n-j-1})\left(1-\frac{p(s_n-s_{n-j-1})}{p(s_n-s_{n-j})}\right)$$

$$+\sum_{k=1}^{n-j-2}f(s_k)\left(\left(1-\frac{p(s_n-s_k)}{p(s_n-s_{n-j})}\right)\right.$$

$$\left.-p(s_{n-j-1}-s_k)\left(1-\frac{p(s_n-s_{n-j-1})}{p(s_n-s_{n-j})}\right)\right)$$

$$+\sum_{k=1}^{j}\left(1-\frac{p(s_n-s_{n-k})}{p(s_n-s_{n-k+1})}\right)\frac{R(p(s_n-s_{n-k}))}{p(s_n-s_{n-k})}. \tag{18.5.24}$$

由引理 18.5.3 知

$$p(s_{n-j-1})\geqslant\frac{R(p(s_n-s_{n-j-1}))}{p(s_n-s_{n-j-1})}-\frac{1-M}{p(s_n-s_{n-j-1})}, \tag{18.5.25}$$

$$p(s_{n-j-1}-s_k)\leqslant\frac{p(s_n-s_k)}{p(s_n-s_{n-j-1})}. \tag{18.5.26}$$

将(18.5.25)及(18.5.26)代入(18.5.24)得

$$\frac{1-M}{p(s_n-s_{n-j-1})}\geqslant\sum_{k=1}^{n-j-2}f(s_k)\left(1-\frac{p(s_n-s_k)}{p(s_n-s_{n-j-1})}\right)$$

$$+\sum_{k=1}^{j+1}\left(1-\frac{p(s_n-s_{n-k})}{p(s_n-s_{n-k+1})}\right)\frac{R(p(s_n-s_{n-k}))}{p(s_n-s_{n-k})}.$$

故(18.5.18)对 $j+1$ 成立.由归纳法原理,引理得证.

定理 18.5.1 设 $p\in P$, $0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{r+1}$, $r\geqslant 1$. 则

$$g(t_{r+1})\geqslant C_l\left(\sum_{k=1}^{r}f(t_i)\right)-\sum_{k=1}^{r}f(t_i),\quad l=0,1,2,\cdots. \tag{18.5.27}$$

证明 如果 $p(t)\equiv 1$,无需证.今假定 $p(t)\not\equiv 1$,则可证,对$\forall\, t>0$, $p(t)<1$.现对 l 用归纳法证明(18.5.27).当 $l=0$ 时,(18.5.27)即化为 Kingman 不等式:

$$g(t_{r+1})\geqslant 0. \tag{18.5.28}$$

假设定理对某个 $l\geqslant 0$ 成立.记

$$\alpha = \sum_{i=1}^{r} f(t_i),$$

$$\beta = F(t_{r+1} - t_r; p) + F(t_{r+1} - t_r, t_{r+1} - t_{r-1}; p) + \cdots$$
$$+ F(t_{r+1} - t_r, t_{r+1} - t_{r-1}, \cdots, t_{r+1} - t_1; p).$$

由于 $C_l(1) = 1$，故不妨假定 $\alpha < 1$. 先设 $\alpha \geqslant \beta$. 固定 $s_i = t_i, 1 \leqslant i \leqslant r, s_{r+n} = t_{r+1}$. 记 $N = r + N$. 然后考虑如何选择适当的 $s_{r+1}, s_{r+2}, \cdots, s_{N-1}$ 使得引理 18.5.4 的条件成立. 由引理 18.5.2 我们有

$$\alpha < B_{l+1}(\alpha) < 1. \qquad (18.5.29)$$

但是

$$\beta \geqslant F(s_{r+n} - s_r; p) = p(s_N - s_r). \qquad (18.5.30)$$

因此

$$p(s_N - s_r) < B_{l+1}(\alpha) < 1. \qquad (18.5.31)$$

由于 $p(0) = 1$ 及 $p(t)$ 的连续性，我们可选取 $s_{r+1} > s_r$，从而 $s_N - s_{r+1} < s_N - s_r$，使得 $p(s_N - s_{r+1}) = B_{l+1}(\alpha)$. 类似地选取 $s_{r+2}, s_{r+3}, \cdots, s_{N-1}$. 于是，我们得到一个增序列

$\{s_i; r + 1 \leqslant i < r + n\}, t_r = s_r < s_{r+1} < \cdots < s_{N-1} < s_N = t_{r+1}$，

使得

$$B_{l+1}(\alpha) = \beta_{n-1} < \beta_{n-2} < \cdots < \beta_1 < \beta_0 \equiv 1, \qquad (18.5.32)$$

$$\Delta\beta_i = \Delta\beta_{i-1}, \quad i = 1, 2, \cdots, n-2, \qquad (18.5.33)$$

其中

$$\beta_i = p(s_N - s_{N-i}), \quad 1 \leqslant i \leqslant n - 1,$$
$$\Delta\beta_i = \beta_i - \beta_{i+1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n - 2.$$

由归纳假设，我们有

$$g(u_2) \geqslant C_l(p(u_1)) - p(u_1) \quad u_1 < u_2. \qquad (18.5.34)$$

于是由 (18.5.32) — (18.5.34) 及引理 18.5.4 知，对 $n > 2$

$$\frac{1 - p(s_N)}{p(s_N - s_{r+1})} \geqslant \sum_{k=1}^{r} f(s_k)\left(1 - \frac{p(s_N - s_k)}{p(s_N - s_{k+1})}\right)$$
$$+ \sum_{k=1}^{n-1}\left(1 - \frac{\beta_k}{\beta_{k-1}}\right)\frac{C_l(\beta_i)}{\beta_i}. \qquad (18.5.35)$$

$$1-p(s_N)\geqslant-\sum_{k=1}^{r}f(s_k)p(s_N-s_k)$$
$$+\beta_{n-1}(\alpha+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{C_l(\beta_k)}{\beta_k\beta_{k-1}}\Delta\beta_{k-1}).$$

(18. 5. 36)

但是,

$$(\frac{C_l(x)}{x})'=\frac{xB_l(x)-C_l(x)}{x^2}\leqslant 0,$$

从而$\frac{C_l(x)}{x}$单调减. 故有

$$\sum_k\frac{C_l(\beta_{k-1})}{\beta_{k-1}^2}\Delta\beta_{k-1}\leqslant\sum_k\frac{C_l(\beta_k)}{\beta_k\beta_{k-1}}\Delta\beta_{k-1}$$
$$\leqslant\sum_k\frac{C_l(\beta_k)}{\beta_k^2}\Delta\beta_k. \qquad (18.5.37)$$

固定 $\beta_{n-1}=B_{l+1}(\alpha)$,然后令 $n\to\infty$,由(18. 5. 36),(18. 5. 37)得

$$1-p(s_N)\geqslant-\sum_{k=1}^{r}f(s_k)p(s_N-s_k)$$
$$+B_{l+1}(\alpha)(\alpha+\int_{B_{l+1}(\alpha)}^{1}\frac{C_l(u)}{u^2}du).$$

但由分部积分

$$\alpha+\int_{B_{l+1}(\alpha)}^{1}\frac{C_l(u)}{u^2}du=\frac{C_{l+1}(\alpha)}{B_{l+1}(\alpha)}$$

于是

$$1-p(s_N)\geqslant-\sum_{k=1}^{r}f(s_k)p(s_N-s_k)+C_{l+1}(\alpha).$$

(18. 5. 38)

注意到 $s_N=t_{r+1},s_i=t_i,1\leqslant i\leqslant r$ 及

$$f(t_{r+1})=p(t_{r+1})-\sum_{i=1}^{r}f(t_i)p(t_{r+1}-t_i).$$

我们得

$$1-f(t_{r+1})\geqslant C_{l+1}(\alpha). \qquad (18.5.39)$$

从而 $g(t_{r+1})\geqslant C_{l+1}(\alpha)-\alpha$. 也即

$$g(t_{r+1}) \geqslant C_{l+1}\Big(\sum_{i=1}^{r} f(t_i) - \sum_{i=1}^{r} f(t_i)\Big). \qquad (18.5.40)$$

其次，如果 $\alpha < \beta$，用 $t_{r+1} - t_{r+1-i}$ 代替 t_i，$1 \leqslant i \leqslant r+1$. 则由前面所证

$$1 - F(t_{r+1} - t_r, t_{r+1} - t_{r-1}, \cdots, t_{r+1}; p) \geqslant C_{l+1}(\beta)$$

但是因为 $C_{l+1}(x)$ 关于 x 单调增加，$C_{l+1}(\beta) \geqslant C_{l+1}(\alpha)$，故由引理 18.5.1，

$$g(t_{r+1}) \geqslant C_{l+1}(\alpha) - \alpha, \qquad (18.5.41)$$

故对 $l+1$，定理成立.

由定理 18.5.1 知，当 $p(t) \neq 1$ 时，$g(t_r)$ 严格大于 0. 这加强了 Kingman 不等式 $g(t_n) \geqslant 0$. 我们还可以通过对 l 取极限而进一步加强 Kingman 不等式.

引理 18.5.5 $\lim\limits_{l\to\infty} B_l(x) = x$

$$\lim_{l\to\infty} C_l(x) = \frac{1}{2}(1 + x^2).$$

证明 由引理 18.5.2 得

$$C_{l+1}(x) - C_l(x) = C_l(B_{l+1}(x)) - C_l(x) = \int_x^{B_{l+1}(x)} B_l(u)du$$

但是对于 $u \geqslant x$，有 $B_l(u) \geqslant B_l(x) \geqslant B_{l+1}(x) \geqslant B_{l+1}(x) - x$，故

$$C_{l+1}(x) - C_l(x) \geqslant (B_{l+1}(x) - x)^2.$$

因为 $C_l(x)$ 关于 l 单调有界. 故由上式得

$$\lim_{l\to\infty} B_l(x) = x.$$

又由于 $C_l(x) = 1 - \int_x^1 B_l(u)du$. 故由控制收敛定理

$$\lim_{l\to\infty}\int_x^1 B_l(u)du = \int_x^1 u\,du = \frac{1}{2}(1 - x^2).$$

从而

$$\lim_{l\to\infty} C_l(x) = \frac{1}{2}(1 + x^2).$$

定理 18.5.2 $g(t_{r+1}) \geqslant \dfrac{1}{2}(g(t_r))^2.$

证明 利用引理 18.5.5 和定理 18.5.1 立得本定理.

§6 P — 函数的振荡

标准 P — 函数理论中的一个饶有兴趣的问题是 P — 函数的振荡问题. 因为每个标准马尔可夫对角线转移函数 $p_{ii}(t)$ 均可看作标准 P — 函数. 故该问题又称为马尔可夫振荡问题.

对任意给定的 $t > 0$,令

$$M = p(t), \tag{18.6.1}$$

$$m = \inf\{p(s); 0 \leqslant s \leqslant t\}. \tag{18.6.2}$$

P — 函数的振荡问题就是研究,当 p 变化时,有序对 (M,m) 变化的情况.

由上节的定理,我们有

定理 18.6.1 设 $p \in \mathscr{P}$. 我们有

$$M \leqslant \frac{1 + m^2}{2}. \tag{18.6.3}$$

证明 我们证明

$$p^2(s) \geqslant 2p(t) - 1, \quad 0 \leqslant s \leqslant t. \tag{18.6.4}$$

当 $s = 0$ 或 $s = 1$ 时,(18.6.4) 显然成立. 对 $s \in (0,1)$,在定理 18.5.2 中令 $r = 1, t_1 = t - s, t_2 = t$,我们得到

$$2p(s)p(t - s) - p^2(t - s) \geqslant 2p(t) - 1. \tag{18.6.5}$$

但 $p^2(s) \geqslant 2p(s)p(t - s) - p^2(t - s)$,故 $p^2(s) \geqslant 2p(t) - 1$.

由(18.6.4) 变形得

$$p(t) \leqslant \frac{1 + p^2(s)}{2}, \quad 0 \leqslant s \leqslant t. \tag{18.6.6}$$

由此立得(18.6.3).

给定 $M = p(1)$. 令

$$M(m,p) = \inf\{p(t); 0 \leqslant t \leqslant 1\}; \tag{18.6.7}$$

$$I(M) = \inf\{m(M,p); p \in \mathscr{P}\}; \tag{18.6.8}$$

$$v_0 = \inf\{M; I(M) > 0\}. \tag{18.6.9}$$

定理 18.6.2 $v_0 \leqslant \frac{1}{2}$.

证明　由定理 18.6.1 立得.

§7　补充与注记

关于更新序列与 P — 函数的详细论述见 Kingman[2].

Kingman[2] 中用概率方法证明了更新序列及 P — 函数的圈乘运算的封闭性. 侯振挺[4] 首次发表更新序列圈乘运算封闭性的纯分析证明. 接着，黄之瑞[1] 用分析方法证明 P — 函数圈乘运算的封闭性. 王伯英[1] 给出了更新序列圈乘运算封闭性的简化的分析证明. 该方法也可用于简化关于 P — 函数圈乘运算封闭性分析证明.

由于更新序列对于圈乘运算封闭，故更新序列的任一正整数次圈积也为更新序列. Kingman[2] 猜想：这一结论对不小于 1 的实数次圈积也成立，即猜测：如 u 为更新序列，则 $u^t = (u_n^t)$，$(t \in [1, \infty))$ 亦为更新序列，这一猜想目前尚无实质性进展.

引理 18.5.2— 引理 18.5.4 属于余耀棋[1]. 在该文中还给出了当 $r = 1, l = 1$ 时的定理 18.5.1. 余耀棋[2] 与邹捷中[2] 独立地证明了定理 18.5.1 的一般情形. 这里给出的证明出于邹捷中[3].

关于 v_0 的确切值，R. Davidson 曾证明 $v_0 \geqslant e^{-1}$，并猜测 $v_0 = e^{-1}$. 这意味着猜测 $v_0 \leqslant e^{-1}$. 一个较弱的猜测 $v_0 \leqslant \frac{1}{2}$ 见 Kendall[3]. 余耀棋[1] 证明了 $v_0 \leqslant 0.515$. 邹捷中[2] 证明了 Kendall 弱猜想，即 $v_0 \leqslant \frac{1}{2}$. 最近，戴永隆的系列文章证明了 Davidson 猜想 $v_0 = e^{-1}$. 从而最终解决了这个二十多年未解决的难题. 在戴永隆[1] 中有关于马尔可夫振荡问题及 Davidson 猜想的很好的详细论述及有关参考文献.

Davidson 曾猜测 $M \leqslant e^{m-1}$. Joshi[3,4] 及戴永隆证明了对一些特殊类型的 P — 函数，上述 Davidson 猜测 $M \leqslant e^{m-1}$ 成立. (18.6.3) 见邹捷中[3] 及戴永隆[1]. 注意到(18.6.3) 中右边表达式 $\frac{m^2+1}{2}$ 为 e^{m-1} 的二阶近似是非常有趣的.

参　考　文　献

E. Archinard

[1] Taboo Probabilities in the entrance boundary theory of Markov chains, Z. Wahrs. Verw. Geb. 29(1974),165 — 179 .

陈安岳

[1] 双有限有势Q过程的构造,数学年刊,5A：2(1984), 153 — 164.

[2] 关于接触过程临界值及其它,经济数学,Vol. 2,NO. 2(1985),42 — 50.

[3] 带瞬时态Q过程的构造问题,数学年刊,8A：1(1987), 52 — 60.

[4] 带瞬时态Q过程构造论的若干问题,长沙铁道学院博士学位论文,1988.

陈安岳、张汉君

[1] Criterion for the Existence of Reversible Q — processes, Acta Mathematica Sinica, New series, Vol. 3,NO. 2(1987),133 — 142.

[2] 单瞬时态可逆Q过程存在性问题,应用概率统计,Vol. 8,NO. 3(1992),234 — 241.

陈木法

[1] 有限流出有势Q过程,数学学报,Vol. 25(1982),136 — 166.

[2] 跳过程与无穷粒子系统,北京师范大学出版社,1986.

陈木法、程汉生

[1] ωB方程及其在瞬时Q过程构造论中的应用,北京师范大学学报,4(1981),1 — 15.

K. L. Chung

[1] Markov Chains with Stationary Transition Probabilities, 2nd ed., Springer, Berlin, 1967(1st ed., Springer — Verlag, 1960).

A. G. Cornish

[1] V. M. Joshi and the Markov oscillation problem, Applied Probability, Stochastic Processes and Sampling Theory(ed. I. B. MacNeill & G. J. Umphrey), D. Reidel Publishing Company, 1987, 1 — 7.

James R. Cuthbert

[1] On Uniqueness of the Logarithm for Markov Semi — Groups J. London Math. Soc 4(1972), 623 — 630.

[2] The Logarithm Function for Finet State Markov Semi — Groups, J. London Math. Soc 2(1973), 524 — 532.

戴永隆

[1] 马尔可夫振荡问题,广东科学技术出版社,1993.

R. Davidson

[1] Smith's phenomenon, and jump p — functions, Stochastic analysis, (eds. D. G. Kendall & E. F. Harding, Wiley, New Yoyk(1973), 234 — 239.

J. L. Doob

[1] Markov chains — denumerable case, Trans. Amer. Math., 58(1945), 455 — 473.

[2] Compactification of the discrte state space of a Markov process, Z. Wahrs Verw. Geb. 10(1968), 236 — 251.

[3] State spaces for Markov chains, Transaction of Amer. Math. Soc 149(1970), 279 — 305.

G. Elfving

[1] Zur Throrie der Markoffschen Ketten Acta Soc, Sci Fenncae n. Ser. A2. NO. 8(1937).

费志凌

[1] 含有限个瞬时态生灭矩阵的特征,长沙铁道学院学报,Vol. 4,NO. 3(1986).

[2] 含有限个瞬时态诚实 Q 过程的唯一性准则,应用概率统计,Vol. 9,NO. 1(1993),51 — 57.

W. Feller

[1] On the integro — differential equations of purely discontinuous Markoff process, Trans. Amer. Math: Soc. 48(1940),488 — 515. ibid. ,58(1945),474.

[2] An introduction to probabihty theory and its applications, New York,Wiley,Vol. Ⅱ, 1966.

D. Freedman

[1] Approximating countable Markov chains. Springer — Verlag,1983.

M. Fukushima

[1] Dirichlet Forms and Markov processes, North Holland Math. Lib. Series 23, 1980.

Halina Frydman

[1] A Structure of the Bang — Bang Representation for 3 × 3 Embeddable Mattrices, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 53 (1980),305 — 316.

[2] The embedding problem for Markov chains with three states, Math. Proc. Cambridge Philos Soc. 87(1980),285 — 294.

侯振挺

[1] Q 过程唯一性准则,中国科学,2(1974),115 — 130.

[2] 生灭过程由 0^+— 系统的唯一决定性,经济数学,Vol. 1:2(1985).

[3] Q 过程的唯一性准则,湖南科学技术出版社,1982.

[4] 更新序列对于圈乘运算的封闭性,中国科学,A(1982),

31 — 39.
侯振挺、郭青峰
[1] 齐次可列马尔可夫过程,科学出版社,北京,1978.
侯振挺、陈木法
[1] 马尔可夫过程与场论,科学通报,NO. 20(1980),913 — 916.
侯振挺、费志凌
[1] 关于Q — 矩阵问题的一个Williams定理的注记,数理统计与应用概率,2(1990),230 — 242;3(1990),318 — 335.
黄之瑞
[1] F — 函数族及某些应用,数学年刊.
S. Johansen
[1] Some Results on the Imbedding Problem for Finite Markov Chains, J. London Math. Soc. (2) 8(1974).
S. Johansen and F. L. Ramseg
[1] A Bang — Bang representation for 3 × 3 imbeddable stochastic matrices Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 47 (1979), 107 — 118.
V. M. Joshi
[1] An new bound for standard p — functions Ann. Prob. 3(1975), 346 — 352
[2] An improved upper bound for standard p — functions, Ann. Prob. 5(1977), 999 — 1003.
[3] An upper bound for exponentially starting standard p — functions, Sankhya, Series A, 39(1977), 334 — 340.
[4] A generalization of Davidson's upper bound for standard jump p — functions, J. Indian Statistical Association, 19(1981), 69 — 76.
D. G. Kendall

[1] Some analytical properties of continaous stationary Markov transition functions, Trans. Amer Math. Soc 78(1955), 529 — 540.

[2] Some recent advances in the theory of denumerable Markov processes, Trans. 4th pragut Conf., On Information Theory etc. (1967).

[3] An introduction to stochastic analysis, "Stochastic Analysis", Ed. D. G. Kendall & E. F. Harding Jobn Wiley & Sons, London, 1973.

J. F. Kingman

[1] The Imbedding Problem for Finite Markov Chains, Z. Wahrs. Ver. Geb. (1962), 14 — 24.

[2] Regeneratve Phenomenea ,Wiley & Sons, London, 1973.

A. N. Kolmogorov

[1] Über die analytischen Methoden in der wahrs., Math. Ann., 104(1931), 415 — 458.

[2] Zur theorie der Markffschen ketten, Mathematische Annalen, 112(1936), 155 — 160.

[3] On the differentiability of the transition probabilities in homogeneous Markov processes with a denumerable number of states, Ucenye Zapiski MGY 148, Mat. 4(1951), 53 — 59(Russian).

刘再明

[1] 瞬时态Q过程定性理论的若干问题,长沙铁道学院博士学位论文,1988.

[2] 某些马氏过程的萌芽系统问题,长沙铁道学院学报, Vol. 7 : 2(1989), 1 — 5.

[3] "双无限"不中断Q过程唯一性的注记,数学年刊, Vol. 12A : 5(1991), 619 — 626.

[4] 一类单瞬时态Q－矩阵,长沙铁道学院学报, Vol.

9：2(1991),80 — 85.

[5] 不满足(S)条件Q — 矩阵问题，长沙铁道学院学报，Vol. 10：2(1992),86 — 91.

[6] 含瞬时态的B型Q过程(Ⅰ),(Ⅱ),(Ⅲ),长沙铁道学院学报,Vol. 11：4(1993),79 — 85;Vol. 12：1(1994),91 — 93;Vol. 12：3(1994).

[7] 一类含保守瞬时态的Q — 矩阵，数学杂志,No. 2,Vol. 14(1994).

刘再明、陈安岳

[1] 瞬时对角型Q — 矩阵的特征，数学杂志,NO. 2,Vol. 10(1990),191 — 198.

刘再明、侯振挺

[1] 含瞬时态生灭Q — 矩阵问题，科学通报,Vol. 38：6(1993),577 — 579.

J. Neveu

[1] Lattice methods and submarkovian processes, Proc. 4th Berkeley Sympos. Math. Statist. Probability 2(1961), 347 — 391.

钱敏、侯振挺等

[1] 可逆马尔可夫过程，湖南科学技术出版社，1979.

钱敏平

[1] 平稳马氏链的可逆性，北京大学学报，4(1978).

G. E. H. Reuter

[1] Remarks on a Markov Chain Example of Kolmogorov, Z. W. verw. Geb. 13(1969),315 — 320.

[2] On Kendall's Conjecture Comcerning 0^+ — equivalence of Markov Transition Functions. J. London Math. Soc. Vol. 35,NO. 2(1987),377 — 384.

L. C. G. Rogers and D. Williams

[1] Construction and Approximation of Transition Matrix

Functions, Applied Probability Trust(1986),133 — 160.

M. L. Silverstein

[1] Symmetric Markov Processes, Lecture Notes in Mathematics, 426(1976), Springer — Verlag.

唐令琪

[1] 单瞬时态生灭过程的构造,数学年刊,8A:5(1987),565 — 570.

王梓坤

[1] 随机过程论,科学出版社,北京,1965.

[2] 生灭过程与马尔科夫链,科学出版社,北京,1980.

王伯英

[1] 更新序列圈乘运算封闭性的一个证明,科学通报,28(1983),1414 — 1416.

D. Williams

[1] A new method of approximation in Markov chains theory and its application to some problems in the theory of random time substitution, Proc. London Math. Soc. (3)16(1966),213 — 240.

[2] A Note on the Q — matrices of Markov chains, Z. Wahrs. verw. Geb. 7(1967),116 — 121.

[3] The Q — matrix Problem, Seminaire de Probabilites X, Lecture Notes in Mathematics 511, Springer, Berlin, (1976),216 — 234.

[4] The Q — matrix Problem, 2: The Kolmogorov backward equations, Seminaire de Probabilites X, Lecture Notes in Mathematics 511, Springer, Berlin, (1976),505 — 520.

[5] Diffusions,Markov Processes and Martingales, Wiley,New York,1979.

肖果能

[1] 常返Q过程的定性理论, 湖南数学年刊,Vol.

4：1(1984),7 — 23.

[2] 单瞬时生灭过程由 0^+ — 系统的唯一决定性，数理统计与应用概率，Vol. 1：2(1986)，45 — 50.

[3] 二阶离散骨架的行向量，长沙铁道学院学报，Vol. 8：4(1990)，36 — 41.

[4] 三阶有势 Q 过程的离散骨架，数学杂志，Vol. 11. NO. 3(1991)，320 — 330

[5] 一类三阶双随机矩阵的嵌入问题，长沙铁道学院学报，Vol. 11：4(1993)，59 — 67.

肖果能、陈安岳

[1] 两状态可中断齐次 Markov 链的嵌入问题，长沙铁道学院学报，Vol. 6，NO. 2(1988)，109 — 118

[2] 一个二次方程组的非零解，长沙铁道学院学报，Vol. 7：2(1989)，19 — 25.

[3] 三状态齐次 Markov 链的嵌入问题，数学季刊，Vol. 4：4(1989)，100 — 102.

[4] 对称型三阶离散骨架的判定，数理统计与应用概率，Vol. 5：2(1990)，221 — 229.

杨向群

[1] 可列马尔科夫过程构造论，湖南科学技术出版社，1980；第二版，1986.

余耀棋

[1] 标准 p — 函数的界的新结果，数学年刊，5A(1984)，473 — 482.

[2] 关于 p — 函数 n 阶 Kingman 不等式的改进，中山大学学报(自然科学)，3(1984)，51 — 54

张汉君

[1] 生灭过程由 0^+ — 系统的唯一决定性，经济数学，Vol. 2：2(1985)，62 — 72.

[2] 端 Q 过程构造理论，长沙铁道学院博士论文，1988.

[3] Q 过 程 的 分 类, 长 沙 铁 道 学 院 学 报,Vol. 9,NO. 4(1991),59 — 66.

[4] 极大Q过程判别准则,数学年刊,13A : 4(1992),442 — 450.

[5] Q过程构造论中的H — 条件,长沙铁道学院学报,Vol. 10,NO. 1(1992),68 — 72.

[6] 含有限个瞬时态的Kolmogorov 矩阵,长沙铁道学院学报,Vol. 11,NO. 4(1993),68 — 73.

[7] 极大Q过程存在准则,长沙铁道学院学报,Vol. 12,NO. 1(1994),84 — 90.

[8] 广义Kolmogorov矩阵定性理论,应用概率统计,Vol. 10,NO. 1(1994),18 — 24.

[9] 瞬时态可和的Q — 矩阵,数学年刊,15(A) : 3(1994),111 — 118.

邹捷中

[1] 单瞬时生灭过程由 0^+ — 系统的唯一决定性,长沙铁道学院学报,Vol. 3 : 3(1985),57 — 62.

[2] p — 函数的振荡问题,长沙铁道学院博士论文,1986.

[3] Some new inequalities for p — functions ,J. London Math Soc(2) 38(1988).

邹捷中、刘再明

[1] 一类含瞬时态的Q — 矩阵,应用概率统计,Vol. 7 : 2(1991),125 — 132.